SOMA WÜRFEL

BERNDT E. SCHWERDTFEGER

Für Stefanie zum Geburtstag

Einleitung

Als *Werner Heisenberg* einst in einer Vorlesung über Quantenphysik über den in Würfelgitter zerlegten Raum sprach, wurde bei seinem Zuhörer *Piet Hein* die Phantasie angeregt und die einzelnen Würfel fügten sich zu diversen Blöcken zusammen und er stellte sich vor, wie aus den unregelmäßig geformten Basisklötzen größere Würfel oder andere Figuren gebildet werden können.

So jedenfalls erzählte es *Martin Gardner* in seiner Kolumne *Mathematical Games* im *Scientific American* (Sep. 1958, [3, ch. 6, The Soma Cube]). Mehr Hintergrund findet man auf den Webseiten von *Thorleif Bundgård* [2].

Piet Hein ließ sich seine Erfindung 1933 patentieren und die ersten Puzzle wurden vor 80 Jahren in Dänemark unter dem Namen Soma vertrieben.

Berlin, 15. Mai 2015 B. E. Schwerdtfeger

1. Basis

In seiner Patentschrift (siehe Anhang A) beschreibt *Piet Hein* sieben Blöcke aus drei oder vier Würfeln in perspektivischen Zeichnungen, die hier mit METAPOST gezeichnet sind:

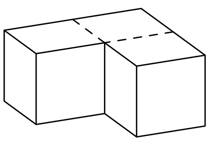

Fig. 1

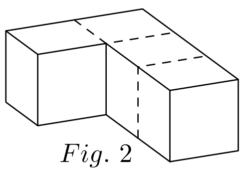

Fig. 2

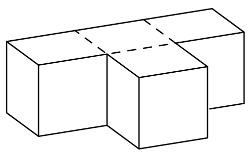

Fig. 3

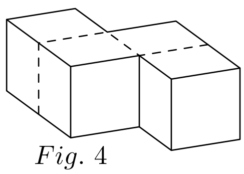

Fig. 4

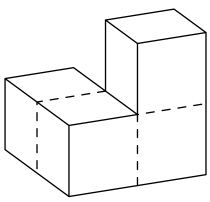

Fig. 5

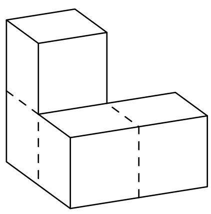

Fig. 6

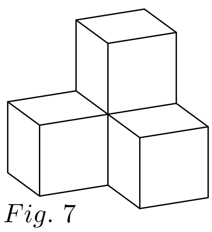

Fig. 7

Diese Formen stellen alle aus drei oder vier Würfeln zusammen geklebten Körper dar, die nicht *konvex* sind, d.h. die Punkte enthalten, deren Verbindungslinien den Körper verlassen.

Das Puzzle mit diesen Soma Formen besteht nun darin, andere Strukturen zu finden, die man mit diesen bauen kann – das sehen wir auf der nächsten Seite.

Date: 2017-04-08.

2. Puzzle

Etwas unerwartet mag sein, dass man mit den obigen Formen den Würfel in *Fig.* 8 bauen kann, wie dies *Piet Hein* in seiner Patentschrift behauptet. Er gibt dort noch 5 weitere Formen an, die hier mit Ausnahme der *Fig.* 10 abgebildet sind.

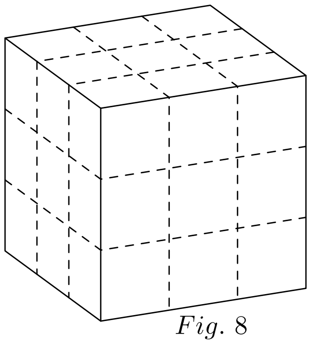

Fig. 8

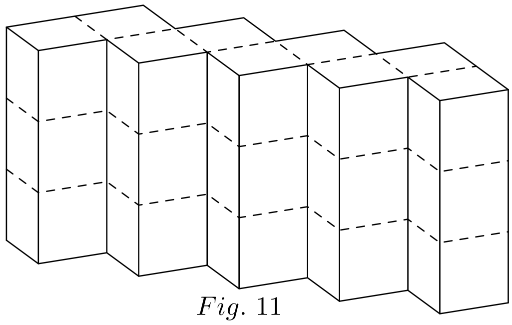

Fig. 11

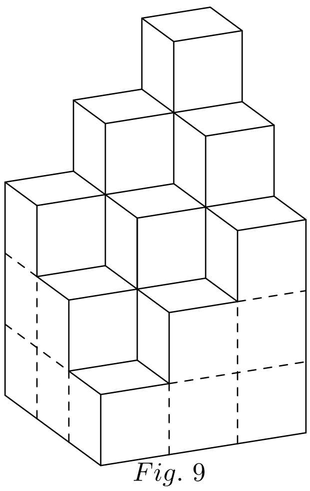

Fig. 9

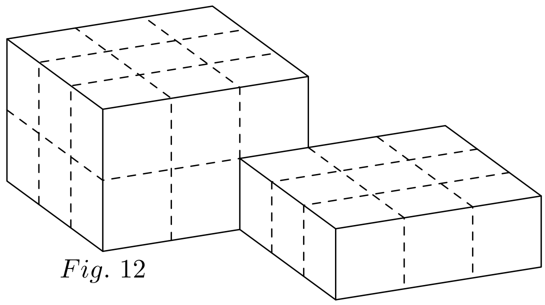

Fig. 12

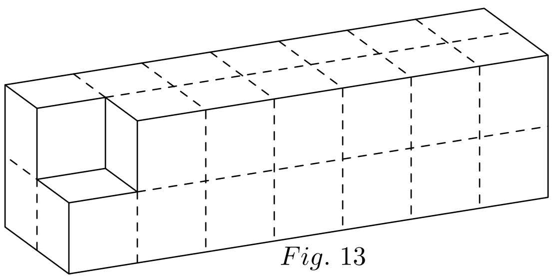

Fig. 13

Bei *Martin Gardner* [3] sind darüber hinaus noch 20 Konstruktionen mitgeteilt – aus hunderten, die seine vom Soma-*Fieber* angesteckten Leser ihm zugeschickt hatten. Ich empfehle *Thorleif*'s Soma Webseite [2] – wenn man keine Angst vor Ansteckung hat.

3. Hindernisse

Nachdem man sich erfolgreich hat anstecken lassen, stellt man verblüfft fest, dass man gelegentlich stecken bleibt und es vielleicht noch drei oder vier zu füllende Stellen gibt, aber die einzig übrige Form dort nicht hinein passt – vertrackt!

Man bekommt ein Gefühl von *Hindernissen*, die man nicht *sehen* kann und die doch irgendwo vorhanden sind – woran liegt das? Kann man dies *verstehen*?

Schauen wir uns die *Fig.* 8 genauer an. Der große Würfel hat 6 Seiten, 12 Kanten und 8 Ecken und besteht aus $3 \times 3 \times 3 = 27$ kleinen Würfeln. Von diesen sind 26 sichtbar, der zentrale kleine Würfel in der Mitte des großen ist versteckt. Die 26 sichtbaren Würfel sind 8 Eck-Würfel, 12 Kanten-Würfel und 6 Würfel der Seitenmitten.

Die sieben einzelnen Bausteine des SOMA-Puzzle bezeichnen wir wie *Piet Hein* einfach mit den Zahlen 1–7 der Figuren 1–7; wir nennen sie SOMA-Steine.

Wenn man sich vorstellt, wo welcher Stein im Würfel angeordnet werden kann, sieht man ein, dass nur die SOMA-Steine 2 und 3 zwei Ecken füllen können, die übrigen belegen jeder maximal nur eine Ecke des großen Würfels. Das ergibt zusammen 9 mögliche Ecken, wir haben aber nur 8 beim Würfel, d.h. einer der SOMA-Steine $1, 4, 5, 6, 7$ liegt in keiner Ecke oder wenn doch, muss entweder 2 oder 3 nur eine Ecke belegen.

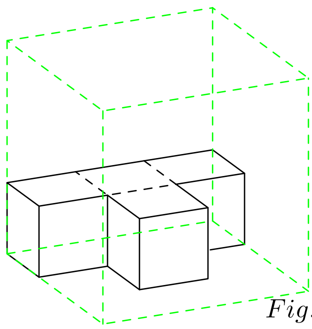

Fig. 14

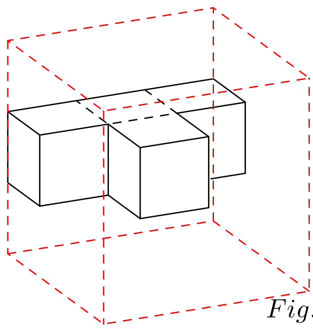

Fig. 15

Bei SOMA-Stein 3 geht dies aber nicht: wenn ein Ende nicht in einer Ecke liegt, kann auch das andere Ende nicht in einer Ecke liegen. Also kann die in *Fig.* 15 beschriebene Position von Stein 3 nicht in der *Fig.* 8 vorkommen, weil wir dann nur noch 7 Ecken füllen könnten.

Folglich *muss* Stein 3 immer eine der 12 Kanten des großen Würfels belegen.

Wenn Stein 2 auch eine Kante belegt (also 2 Ecken füllt), dann liegt genau ein Stein aus der Menge $\{1, 4, 5, 6, 7\}$ nicht in einer Ecke. Der Stein 2 muss aber wenigstens eine Ecke belegen, andernfalls gäbe es zu wenige Ecksteine. Wenn also Stein 2 keine Kante und nur eine Ecke belegt, liegen alle Steine der Menge $\{1, 4, 5, 6, 7\}$ ebenfalls in einer Ecke.

Damit haben wir schon eine Reihe von Einschränkungen kennen gelernt, die auf jeden Fall zu erfüllen sind. Andernfalls stoßen wir unweigerlich auf ein Hindernis.

4. NOTATIONEN

Die Positionen der 27 kleinen Würfel werden nummeriert von 0–26 oder mit den Koordinaten (x, y, z), wobei $0 \le x, y, z \le 2$. Der Zusammenhang zwischen den Würfelnummern n und den Koordinaten ist einfach

$$n = x + 3 \cdot y + 9 \cdot z$$

Umgekehrt bestimmt n eindeutig die Werte von x, y und z durch

$$x \equiv n \mod 3 \qquad y \equiv \frac{n - x}{3} \mod 3 \qquad z \equiv \frac{n - x - 3y}{9} \mod 3$$

Man kann jetzt eine erfolgreiche Konfiguration eines Würfels (*Fig.* 8) mit den SOMA-Steinen 1–7 durch einen 27-dimensionalen Vektor $c = (c_0, c_1, \dots, c_{26})$ beschreiben, wobei jedes c_n die Werte $1, \dots, 7$ annehmen kann, wenn der Würfel Nr. n mit dem SOMA-Stein c_n gebaut wurde.

Ein Beispiel soll dies veranschaulichen. Wir stellen uns den Würfel in drei Ebenen $z = 0, 1, 2$ vor. In *Fig.* 16 sind diese etwas auseinandergezogen. Das Koordinatensystem gibt die Orientierung im Raum an, auf den kleinen Würfeln sind die Würfelnummern n markiert.

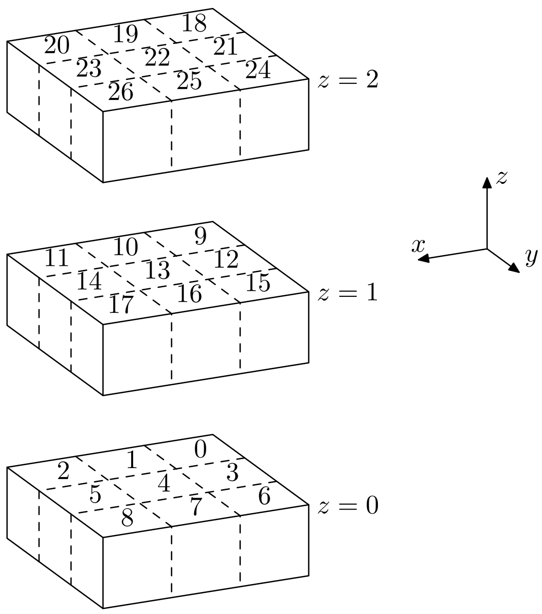

Fig. 16

Als Beispiel: $c = (6, 6, 1, 6, 3, 1, 3, 3, 3, 7, 5, 5, 6, 5, 1, 2, 2, 2, 7, 7, 5, 7, 4, 4, 4, 4, 2)$ ist eine gültige Würfel-Konfiguration, die wir kürzer (ohne die Klammern und Kommas) einfach $c = 661631333755651222775744442$ schreiben werden. Man kann statt in der Würfelnummerierung $n = 0, \ldots, 26$ eine Lösung auch in den drei Ebenen mit den Variablen x, y, z schreiben

$z =$		0			1			2	
$y = 2:$	3	3	3	2	2	2	4	4	2
$y = 1:$	6	3	1	6	5	1	7	4	4
$y = 0:$	6	6	1	7	5	5	7	7	5
$x =$	0	1	2	0	1	2	0	1	2

Diese Schreibweise als Matrix ist anschaulicher, wenn die SOMA-Steine vor einem liegen: man kann sich die passenden Steine nehmen und nach dem Matrix-Schema zusammenstellen, bis der Würfel fertig ist. Die Vektor-Schreibweise dagegen ist konzis.

5. Parität

Wir werden ein wenig Mathematik anwenden und damit lernen zu *sehen*, worin die verborgenen Hindernisse bestehen.

Wir stellen uns die einzelnen Würfel mit einer *Ladung* versehen vor: ein Würfel der Nummer n habe die Ladung $(-1)^n$ (man darf sich auch statt einer Ladung zwei *Farben*, etwa *schwarz* und *weiß*, vorstellen).

Wir nennen sie die *Parität* und die entsprechende Matrix sieht so aus

$$
\begin{array}{ccc@{\qquad}ccc@{\qquad}ccc}
+ & - & + & - & + & - & + & - & + \\
- & + & - & + & - & + & - & + & - \\
+ & - & + & - & + & - & + & - & +
\end{array}
$$

Offenbar ist die Gesamtparität des Würfels $p = +1$, egal, wie er aus den Steinen $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ zusammen gesetzt wurde. Die Gesamtladung ergibt die *Paritätsgleichung*:

$$p(1) + p(2) + p(3) + p(4) + p(5) + p(6) + p(7) = p = +1$$

Bei jeder Positionierung der Steine im Würfel sind die Ladungen der Einzelwürfel eines Steins abwechselnd verteilt, also ist immer

$$p(2) = 0 \qquad p(4) = 0 \qquad p(5) = 0 \qquad p(6) = 0$$

und da wir oben sahen, dass die Enden vom Stein 3 in Ecken liegen müssen, d.h. gerade Parität haben, erhalten wir $p(3) = +2$. Je nach Position im Würfel folgt für die beiden übrigen Steine 1 und 7

$$p(1) = \pm 1 \qquad p(7) = \pm 2$$

und das richtige Vorzeichen wird sich aus der eben aufgestellten Paritätsgleichung ergeben, die sich mittlerweile zu

$$p(1) + p(7) = -1$$

vereinfacht hat. Es gibt nur eine Möglichkeit für die Vorzeichen, nämlich

$$p(1) = +1 \qquad p(7) = -2$$

und die Ladungsbelegung der Steine 1 und 7 ist festgelegt. Damit haben wir weitere Einschränkungen für die Positionen der SOMA-Steine erhalten – und jetzt sollte es ein Leichtes sein, ohne weitere Hindernisse den Würfel zusammen zu setzen.

Es sei noch erwähnt, dass es bis auf Symmetrien (Rotationen und Spiegelungen) genau 240 verschiedene Arten gibt, den Würfel (*Fig.* 8) aus den SOMA-Steinen zusammen zu bauen (siehe *Berlekamp, Conway, Guy* [1, vol. 4, p. 847]).

Literatur

[1] Elwyn R. Berlekamp, John H. Conway, and Richard K. Guy, *Winning Ways for Your Mathematical Plays*, 2nd ed., A K Peters, 2004.

[2] Thorleif Bundgård, *Thorleif's SOMA page*, https://fam-bundgaard.dk/SOMA/SOMA.HTM. Accessed April 8, 2017.

[3] Martin Gardner, *Origami, Eleusis, and the Soma Cube*, The new Martin Gardner Mathematical Library, Cambridge University Press, 2008.

Anhang A. Piet Hein's Patent

Auf den Webseiten von *Thorleif Bundgård* [2] (https://fam-bundgaard.dk/SOMA/NEWS/N030310.HTM) stehen Details zu den verschiedenen Patenten. Auf den nächsten beiden Seiten ist *Piet Hein*'s englische Patent Beschreibung von 1933 abgedruckt.

PATENT SPECIFICATION

420,349

Convention Date (Denmark): Dec. 2, 1933.

Application Date (in United Kingdom): March 20, 1934. No. 8670 / 34.

Complete Accepted: Nov. 29, 1934.

COMPLETE SPECIFICATION.

Toy Building or Puzzle Blocks.

I, PIET HEIN, a Danish Citizen, of Raadhusstræde 1, Copenhagen, Denmark, do hereby declare the nature of this invention and in what manner the same is to be performed, to be particularly described and ascertained in and by the following statement:—

This invention relates to toy building or puzzle blocks for use in building up three-dimensional geometrical figures or structures.

Building or puzzle blocks are well known in which the individual blocks or units are formed by different combinations of regular solid figures such as cubes, the individual blocks being adapted to be assembled together to form various different figures or structures.

The object of my invention is to provide an improved set of blocks or units in which a minimum number of blocks of simple form are employed and a very large number of combinations of the blocks is possible.

According to my invention a set of toy building or puzzle blocks consists of seven blocks or units each of which has the outline of three or four cubes assembled together in such a manner that at least three faces of each cube are free. The set of seven blocks is equivalent to twenty-seven cubes and experiments and calculations have shown that from the set of seven blocks it is possible to construct approximately the same number of geometrical figures as could be constructed from twenty-seven separate cubes.

The principle underlying the invention is that blocks composed of three or four cubes assembled together can be arranged in a maximum number of different positions and that no advantage is gained by reducing or increasing the number of cubes forming each block.

The blocks may be made of wood, metal, mouldable materials, clay, glass, or any other suitable material, or even from edible substances, suitably wrapped, and the faces of the blocks may be provided with complimentary pegs and recesses or other means for holding them in the assembled position.

The blocks in a set may be coloured or uncoloured, and the individual blocks of a set may be differently coloured if desired.

My invention is illustrated in the accompanying drawings in which:—

Figures 1 to 7 are perspective views of the seven blocks forming a set.

Figures 8 to 13 are examples of solid geometrical figures or bodies which can be built up from the seven blocks.

Each of the blocks illustrated in Figures 1 to 7 has the outline of a figure formed by placing three or four cubes in juxtaposition. The block shown in Figure 1 is formed from three cubes while each of the others is formed from four cubes arranged in different relationships, the whole set being the equivalent of twenty-seven cubes.

Having now particularly described and ascertained the nature of my said invention, and in what manner the same is to be performed, I declare that what I claim is:—

1. An improved set of toy building or puzzle blocks consisting of seven different blocks or units each of which has the outline of three or four cubes assembled together in such a manner that at least three faces of each cube are free, the set of seven blocks being equivalent to twenty-seven cubes.

2. The improved set of toy building or puzzle blocks substantially as described with reference to the accompanying drawings.

Dated this 19th day of March, 1934.

BARKER, BRETTELL & DUNCAN.

Redhill: Printed for His Majesty's Stationery Office, by Love & Malcomson, Ltd.—1934.

[This Drawing is a reproduction of the Original on a reduced scale.]

Fig. 1.

Fig. 2.

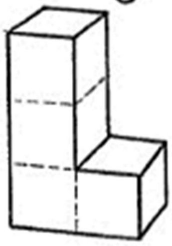

Fig. 3.

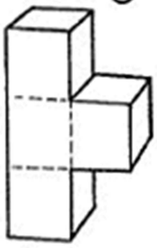

Fig. 4.

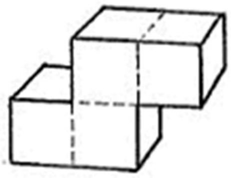

Fig. 5.

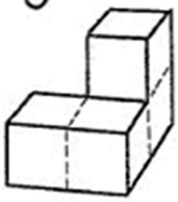

Fig. 6.

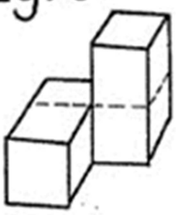

Fig. 7.

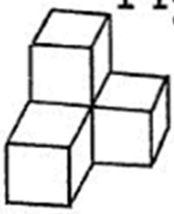

Fig. 8.

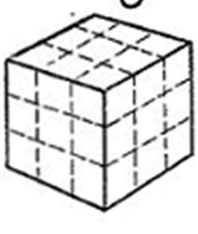

Fig. 9.

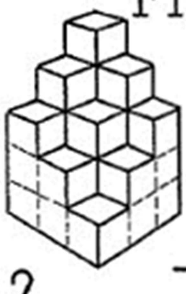

Fig. 10.

Fig. 11.

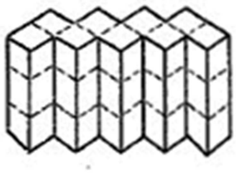

Fig. 12.

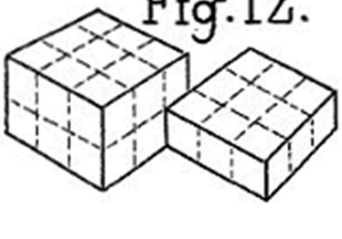

Fig. 13.