

INNERE PLANETEN DES SONNENSYSTEMS

BERNDT E. SCHWERTDFEGER

Für Carmen

ZUSAMMENFASSUNG. Diese Arbeit gibt eine anschauliche Darstellung der vier inneren Planetenbahnen des Sonnensystems.

PREFACE

In dieser Arbeit veranschauliche ich die *Bahnen* der *inneren* Planeten: *Merkur, Venus, Erde* und *Mars*. Diese Bahnen sind *ebene Kurven* im *Raum*. Seit KEPLER (1571 – 1630) kennen wir die Form dieser Kurven: sie sind *Ellipsen*, die wir in verschiedenen Bahnebenen in ihrer richtigen relativen Position und Orientierung im Raum anordnen müssen.

Die Veranschaulichung wird durch Zeichnungen mit METAPOST erreicht, wobei ich die Bahnneigung gegen die Ekliptik vernachlässige. Die Darstellung bleibt auf Schulniveau, mit begrifflicher Einführung von Ideen unter Berücksichtigung von Berechnungen.

Berlin, April 24, 2010

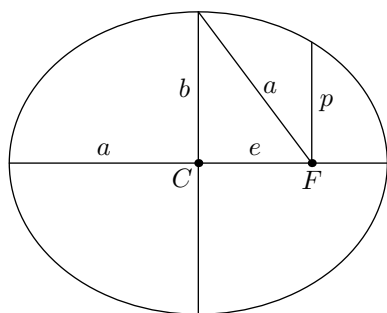
© 2010–2014 Berndt E. Schwerdtfeger

v1.0, 22 März 2014

1. PLANETENBAHNEN

1.1. **Innerhalb der Bahnebene.** Zum Aufwärmen beginnen wir mit etwas ebener Geometrie. Wir erinnern an die *grundlegenden Invarianten* einer Ellipse, wie in *Kegelschnitte* von COXETER [1, §8.4] oder ausführlicher in [2, §1.4] behandelt.

Die grundlegenden Invarianten einer Ellipse sind der *Parameter* p und die *numerische Exzentrizität* ε . Die *ovale Form* wird durch ε , die Größe durch p bestimmt. Im astronomischen Zusammenhang wird statt des Parameters p oft die *große Halbachse* a angegeben.



Die Größen in der Abbildung stehen in folgender Beziehung

$$\begin{aligned} a &= \frac{p}{1 - \varepsilon^2} & b &= \frac{p}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \\ e &= \varepsilon \cdot a & a^2 &= b^2 + e^2 \end{aligned}$$

b ist die *kleine Halbachse*, e die *lineare Exzentrizität*

Die Gleichung der Ellipse im Koordinatensystem der Achsen lautet

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

2010 *Mathematics Subject Classification*. Primary 70F15.

Key words and phrases. Sonnenbahnen innerer Planeten, Himmelsmechanik, KEPLER'S Gesetze, Gravitationsgesetz, Bahnelemente.

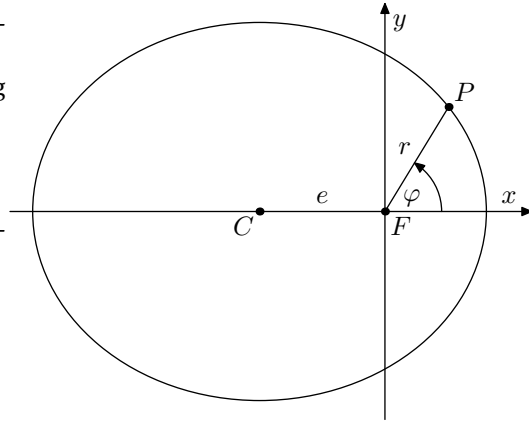
Wenn wir dies $x^2 + (ay/b)^2 = a^2$ schreiben, erscheint die Ellipse als ein in y -Richtung um den Faktor $b/a = \sqrt{1 - \varepsilon^2}$ gestauchter Kreis vom Radius a .

Wenn der *Brennpunkt* F im Ursprung liegt, lautet die Ellipsengleichung

$$(1) \quad (x + e)^2 + \frac{y^2}{1 - \varepsilon^2} = a^2$$

Hieraus leiten wir die Gleichung in *Polarkoordinaten* ab

$$(2) \quad r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi}$$



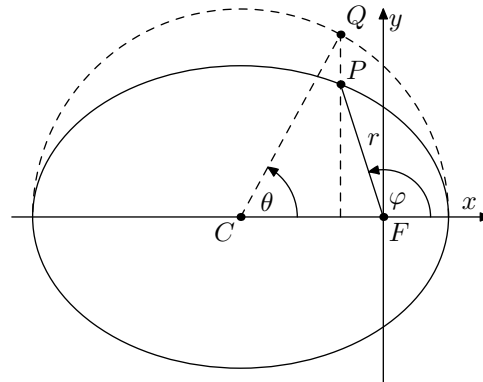
Beweis. Wegen (1)

$$0 = (1 - \varepsilon^2)(x^2 + 2ex + e^2 - a^2) + y^2 = x^2 + y^2 - \varepsilon^2 x^2 + 2(1 - \varepsilon^2)ex - (1 - \varepsilon^2)b^2 = r^2 - \varepsilon^2 x^2 + 2pex - p^2 = r^2 - (\varepsilon x - p)^2 = (r + \varepsilon x - p)(r - \varepsilon x + p)$$

was uns zwei mögliche Polargleichungen für den rechten Brennpunkt gibt: $r(1 + \varepsilon \cos \varphi) = p$ und $r(\varepsilon \cos \varphi - 1) = p$; letzteres ergibt nur Punkte bei $\varepsilon > 1$ (*Hyperbel*), da $r > 0$. \square

In der nächsten Abbildung laufe $P = (x, y) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$ auf der Ellipse und sein Zwilling $Q = (x, ay/b)$ auf dem Kreis mit Radius a um $M = (-e, 0)$

$$(3) \quad \begin{aligned} \sin \theta &= \frac{\sqrt{1 - \varepsilon^2} \sin \varphi}{1 + \varepsilon \cos \varphi} \\ \cos \theta &= \frac{\cos \varphi + \varepsilon}{1 + \varepsilon \cos \varphi} \\ \sin \varphi &= \frac{\sqrt{1 - \varepsilon^2} \sin \theta}{1 - \varepsilon \cos \theta} \\ \cos \varphi &= \frac{\cos \theta - \varepsilon}{1 - \varepsilon \cos \theta} \\ \tan \frac{\varphi}{2} &= \sqrt{\frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon}} \tan \frac{\theta}{2} \end{aligned}$$



Polarkoordinaten von Q ergeben $a \sin \theta = ay/b$ und $a \cos \theta = x + e$, mit (2) also:

$$\begin{aligned} \sin \theta &= \frac{y}{b} = \frac{r \sin \varphi}{b} = \frac{\sqrt{1 - \varepsilon^2} \sin \varphi}{1 + \varepsilon \cos \varphi} \\ \cos \theta &= \frac{x + e}{a} = \frac{r \cos \varphi + \varepsilon a}{a} = \frac{(1 - \varepsilon^2) \cos \varphi}{1 + \varepsilon \cos \varphi} + \varepsilon = \\ &= \frac{\cos \varphi - \varepsilon^2 \cos \varphi + \varepsilon + \varepsilon^2 \cos \varphi}{1 + \varepsilon \cos \varphi} = \frac{\cos \varphi + \varepsilon}{1 + \varepsilon \cos \varphi} \end{aligned}$$

was die ersten beiden Relationen in (3) ergibt. Die anderen folgen sofort, etwa

$$\tan \frac{\theta}{2} = \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} = \frac{\sqrt{1 - \varepsilon^2} \sin \varphi}{1 + \varepsilon \cos \varphi + \cos \varphi + \varepsilon} = \frac{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}{1 + \varepsilon} \frac{\sin \varphi}{1 + \cos \varphi}$$

Wir notieren auch die (direkt aus (3) folgende) Formel:

$$(4) \quad r = a(1 - \varepsilon \cos \theta) = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi}$$

Das Differential von (4) gibt $dr = a\epsilon \sin\theta d\theta$; analog aus (2) erhalten wir

$$\begin{aligned} r\epsilon \sin\varphi d\varphi &= (1 + \epsilon \cos\varphi) dr = a\epsilon(1 + \epsilon \cos\varphi) \sin\theta d\theta = && \text{aus (3)} \\ &= a\sqrt{1 - \epsilon^2} \epsilon \sin\varphi d\varphi \end{aligned}$$

daher

$$(5) \quad (1 - \epsilon \cos\theta) d\varphi = \sqrt{1 - \epsilon^2} d\theta$$

1.2. **Himmelsmechanik.** Bezeichne V unseren 3-dimensionalen Vektorraum mit der *Sonne* im Ursprung. Der Vektor $v \in V$ zeige zum betrachteten Planeten. Wegen NEWTON's *Gravitationsgesetz* gilt

$$(6) \quad \ddot{v} = -\frac{\alpha}{r^3} v, \quad r = |v|,$$

mit $\alpha = G \cdot (M + m)$, G ist die *Gravitationskonstante*, M ist die Sonnenmasse und m die des Planeten.

Bemerkung. Tatsächlich lassen wir den Schwerpunkt im Ursprung ruhen, die *Sonne* ist an der Position $-\frac{m}{M+m}v$ und der Planet bei $\frac{M}{M+m}v$. In den Illustrationen macht dies keinen Unterschied, da die Schwerpunkte aller inneren Planeten tief innerhalb der *Sonne* liegen. Übrigens ist ein Punkt, der die *Sonne* in einer Zeichnung darstellt, im Verhältnis etwa fünfmal so groß wie die reale *Sonne*.

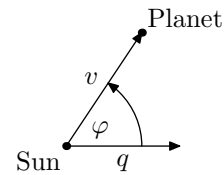
Der Vektor $c = v \times \dot{v}$ ist konstant: $\dot{c} = v \times \ddot{v} = 0$, da \ddot{v} parallel zu v ist nach (6). Sei $L = \mathbf{R}c$ die von c aufgespannte Gerade, und $P = L^\perp$ die senkrecht zu L liegende Ebene, also $V = L \oplus P$. Wir sahen gerade, dass v und \dot{v} beide für alle Zeit in der Ebene P liegen: $v, \dot{v} \in P$, die planetare Bewegung ist *eben*.

Nun untersuchen wir den Vektor $q = \dot{v} \times c - \frac{\alpha}{r} v \in P$. Differenzierung ergibt

$$\dot{q} = \ddot{v} \times c - \frac{\alpha}{r} \dot{v} + \frac{\alpha \dot{r}}{r^2} v = -\frac{\alpha}{r^3} v \times c - \frac{\alpha}{r} \dot{v} + \frac{\alpha \dot{r}}{r^2} v = 0$$

da $v \times c = v \times (v \times \dot{v}) = r\dot{r}v - r^2\dot{v}$, und $v \cdot \dot{v} = r\dot{r}$ als Ableitung von $v \cdot v = r^2$. Also ist q ein unveränderlicher Vektor in der Bahnebene und wir setzen φ als Winkel zwischen v und q , womit wir *Polarkoordinaten* $r = |v|$, $\varphi = \angle(q, v)$ in P eingeführt haben.

Nun ist $q \cdot v = v \cdot (\dot{v} \times c) - \alpha r = (v \times \dot{v}) \cdot c - \alpha r = c \cdot c - \alpha r$ oder $r(\alpha + |q| \cos\varphi) = |c|^2$, was die Gestalt (2) annimmt mit $\epsilon = |q|/\alpha$ und $p = |c|^2/\alpha$. Dies ist KEPLER's erstes Gesetz.



Im Fall $\epsilon < 1$ (Ellipse) ist der minimale Abstand des Planeten von der *Sonne* $r_{min} = \frac{p}{1+\epsilon}$ bei $\varphi = 0$ (*Perihel*) und der maximale Abstand $r_{max} = \frac{p}{1-\epsilon}$ bei $\varphi = \pi$ (*Aphel*). Der Winkel φ wird auch *wahre Anomalie* und der Winkel θ aus dem vorigen Abschnitt 1.1 wird *exzentrische Anomalie* genannt.

Führen wir eine Orthonormalbasis (e_0, e_1, e_2) in V ein, so dass $L = \mathbf{R}e_0$ und $P = \mathbf{R}e_1 + \mathbf{R}e_2$, wo e_1 zum Perihel zeigt (also $q = |q|e_1$) und $e_2 = e_0 \times e_1$. Dann ist $v = xe_1 + ye_2$ und $\dot{v} = \dot{x}e_1 + \dot{y}e_2$, folglich $c = v \times \dot{v} = (x\dot{y} - \dot{x}y)e_0$. In Polarkoordinaten haben wir

$$\begin{aligned} x &= r \cos\varphi & \dot{x} &= \dot{r} \cos\varphi - r\dot{\varphi} \sin\varphi \\ y &= r \sin\varphi & \dot{y} &= \dot{r} \sin\varphi + r\dot{\varphi} \cos\varphi \end{aligned}$$

und $|c| = x\dot{y} - \dot{x}y = r^2\dot{\varphi}$. Dies ist die Konstanz des *Bahndrehimpulses* von KEPLER's zweitem Gesetz:

$$(7) \quad \sqrt{p\alpha} dt = r^2 d\varphi$$

Die Bewegung der Planeten auf Ellipsen ist nicht gleichförmig für $\varepsilon > 0$, weil r nicht konstant ist. Die richtige Beziehung ist die berühmte KEPLER Gleichung (8), die Zeit und Bahnposition verknüpft. Der Beweis ergibt auch KEPLER's drittes Gesetz (9).

$$(8) \quad \theta - \varepsilon \sin \theta = \frac{2\pi}{T}(t - t_0)$$

$$(9) \quad \frac{a^3}{T^2} = \frac{\alpha}{4\pi^2} = \frac{G(M + m)}{4\pi^2}$$

wo T die Umlaufzeit des Planeten um die *Sonne* ist.

Beweis. (4) in (7) eingesetzt $\sqrt{p\alpha} dt = a^2(1 - \varepsilon \cos \theta)^2 d\varphi = a^2\sqrt{1 - \varepsilon^2}(1 - \varepsilon \cos \theta) d\theta$ wegen (5). Durch Integration erhalten wir (wo t_0 zur Perihelzeit korrespondiert):

$$\sqrt{\frac{\alpha}{a^3}} \int_{t_0}^t dt = \sqrt{\frac{\alpha}{a^3}}(t - t_0) = \int_0^\theta (1 - \varepsilon \cos \theta) d\theta = \theta - \varepsilon \sin \theta$$

Nach einem Umlauf ist $\theta = 2\pi$ und $t - t_0 = T$, was den Beweis vollendet. \square

2. BAHNELEMENTE

Die Bahnebene der *Erde* heißt *Eklptik*, die Position der *Sonne* ist im Ursprung und die x -Achse zeigt zum *Frühlingpunkt* \Uparrow . Ich vernachlässige die Bahnneigungen der anderen Planeten gegen die Eklptik.

Für unsere Zwecke sind die ungefähren Positionen aus STANDISH [4] ausreichend. Die Berechnungen der Bahnelemente, insbesondere der *exzentrischen* Anomalie θ , wird mit dem Programm `solar.c` durchgeführt, siehe Anhang A.

Die Bahnen werden mit METAPOST als gedrehte Ellipsen mit der *Sonne* im Ursprung gezeichnet. Die Werte für die *wahre Anomalie* werden aus dem Ergebnis des `solar` Programms genommen. Die Veranschaulichung der Bahnformen und Planetenpositionen zum 13.10.2013 wurde mit dem folgenden METAPOST Programm erzeugt:

```
% -----
%   Abbildung 5 -- inner planets
% -----

beginfig(5);
def orbit(expr ra,rb,an)=
  (fullcircle xscaled 2ra yscaled 2rb shifted -(ra+-+rb,0) rotated an)
enddef;
path vernal,part;
part = ((-0.25,0.25){2up+left}..(-0.2,0.5){right}.. (0,0){down});
vernal = part & reverse part reflectedabout ((0,0),up);
v=.4mm;
picture sun,mercury,venus,earth,mars;

draw fullcircle scaled 10v;
fill fullcircle scaled 2v;
sun = currentpicture;
clearit;

draw fullcircle scaled 5v shifted (0,.5v);
draw halfcircle scaled 5v rotated 180 shifted (0,5.5v);
draw (-2v,-4v)--(2v,-4v);
draw (0,-2v)--(0,-6v);
mercury = currentpicture;
clearit;
```

```

draw fullcircle scaled 5v shifted (0,.5v);
draw (-2v,-4v)--(2v,-4v);
draw (0,-2v)--(0,-6v);
venus = currentpicture;
clearit;

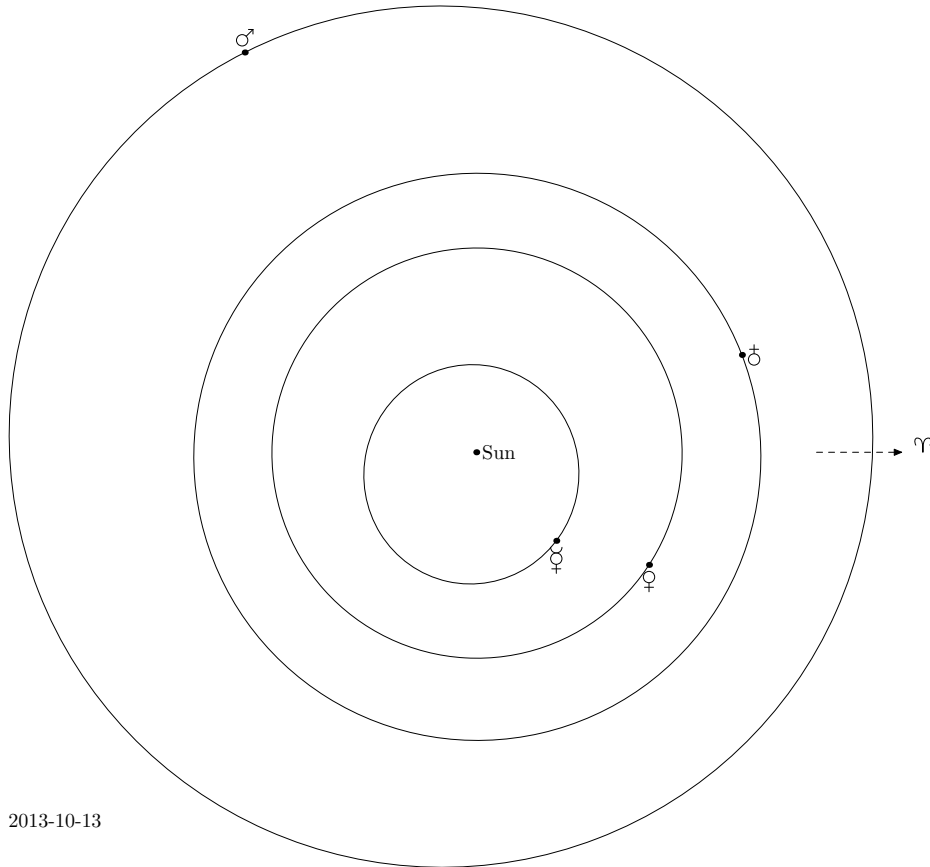
draw fullcircle scaled 5v shifted (0,-2.5v);
draw (-2v,2v)--(2v,2v);
draw (0,0)--(0,4v);
earth = currentpicture;
clearit;

path q[];
draw fullcircle scaled 5v shifted (0,-2.5v);
z10=(2.5/sqrt(2)*v,2.5/sqrt(2)*v);
z20=z10+(3v,3v);
q0=z10--z20;
q1=(x20-2v,y20)--z20;
q2=(x20,y20-2v)--z20;
draw q0 shifted (0,-2.5v);
draw q1 shifted (0,-2.5v);
draw q2 shifted (0,-2.5v);
mars = currentpicture;
clearit;

path p[];
z0=(0,0);
a1=3.871u; b1=0.9786*a1;
a2=7.233u; b2=0.99998*a2;
a3=10u; b3=0.99986*a3;
a4=15.237u; b4=0.996*a4;
% Sun
% Mercury
% Venus
% Earth
% Mars
% *** Output of solar 2013-10-13: ***
%julian : 2456579
%Mercury: -47.89, Perihel: 77.48
%Venus : -33.10, Perihel: 131.78
%Earth : 20.12, Perihel: 102.97
%Mars : 120.08, Perihel: -23.86
label.lft(btex 2013-10-13 etex,(-13u,-13u));
v1=-47.89; v2=-33.10; v3=20.12; v4=120.08;
w1=77.48; w2=131.78; w3= 102.97; w4=-23.86;
for i=1 upto 4:
  p[i]=orbit(a[i],b[i],w[i]);
  draw p[i];
endfor
for i=1 upto 4:
  z[i]=2a[i]*dir v[i];
  p[4+i]=z0--z[i];
  z[4+i]=p[i] intersectionpoint p[4+i];
endfor
dotlabel.bot(mercury,z5);
dotlabel.bot(venus,z6);
dotlabel.rt(earth,z7);
dotlabel.top(mars,z8);
draw sun;
z9=(15u,0);
drawarrow .8z9--z9 dashed evenly; % direction to vernal point

```

```
draw vernal scaled u shifted 1.05z9;
endfig;
% -----
```



2013-10-13

ANHANG A. DAS PROGRAMM SOLAR.C

Das Programm `solar.c` berechnet die wahre Anomalie der inneren Planeten aus dem Datum. Die *julianische* Tageszahl wurde dem Artikel *On calendar formulas* [3] entnommen. Die Routine `theta` löst die KEPLER Gleichung (8).

```
//
```

```
/* -----*

```

```
Module:      solar.c
```

```
Description:
```

```
Calculating the true anomaly of inner planets
For details: http://berndt-schwerdtfeger.de/sol/solar.pdf
```

```
Input:  yyyy-mm-dd (-3000 <= yyyy <= +3000)
```

```
Output: direction of planets Mercury, Venus, Earth, Mars
```

```
Subroutines: theta, leap, qu
```

Copyright (C) 2010 Berndt E. Schwerdtfeger

Licensed under the Apache License, Version 2.0 (the "License");
you may not use this file except in compliance with the License.
You may obtain a copy of the License at

<http://www.apache.org/licenses/LICENSE-2.0>

Unless required by applicable law or agreed to in writing, software
distributed under the License is distributed on an "AS IS" BASIS,
WITHOUT WARRANTIES OR CONDITIONS OF ANY KIND, either express or implied.
See the License for the specific language governing permissions and
limitations under the License.

-----*/

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <math.h>

// set constants - Keplerian elements from Standish

char *planet[] = {"Mercury", "Venus ", "Earth ", "Mars  "};
int em[13] = {0,0,31,59,90,120,151,181,212,243,273,304,334};
double e[4] = {0.20563661, 0.00676399, 0.01673163, 0.09336511};
double de[4]= {0.00002123,-0.00005107,-0.00003661, 0.00009149};
double L[4] = {252.25166724, 181.97970850, 100.46691572, -4.56813164};
double dL[4]= {149472.67486623, 58517.81560260, 35999.37306329, 19140.29934243};
double w[4] = {77.45771895, 131.76755713, 102.93005885, -23.91744784};
double dw[4]= { 0.15940013, 0.05679648, 0.31795260, 0.45223625};
#define PI 3.14159265358979324
#define DEG (180.0/PI)
#define RAD (PI/180.0)

// prototype statements for functions

double theta(double,double); // theta - eps*sin theta = m
int leap(long); // = 1 if year is a leap year
long qu(int,int); // = [a/b] Gaussklammer

// -----
// main program
// -----

int main(int argc, char *argv[]){

    if (argc == 1 || *argv[1] == '?'){

        printf("\nsolar v1.0, 2010-05-03 \n");
        printf("-- Copyright (C) 2010 Berndt E. Schwerdtfeger -- \n");
        printf("\nTrue anomaly of Mercury, Venus, Earth and Mars \n");
        printf(" Input:      yyyy-mm-dd (yyyy in range -3000 - 3000) \n");
        return EXIT_SUCCESS; // end the program
    } // argc > 1 here
}
```

```

int i,d,m,y;
long j,x;
double T, c[4], f[4], l[4], t[4], v[4];

sscanf(argv[1], "%d-%d-%d", &y, &m, &d);

if (argc > 2) {
    printf("Too many parameters !\n");
    return EXIT_FAILURE;          // end the program
}
if (y < -3000 || y > 3000) {
    printf("Error: outside allowed range -3000 <= year <= +3000 !\n\n");
    return EXIT_FAILURE;          // end the program
}
if (y == 1582 && m == 10 && d > 4 && d < 15) {
    printf("This date is invalid, it did never exist !\n");
    return EXIT_FAILURE;          // end the program
}

if (y < 1582 || y == 1582 && m * 100 + d < 1005) // Julian era
    j = 1721423 + d + em[m] + (y - 1) * 365 + qu(y - 1, 4);
else {
    // Gregorian era
    x = y - 2001;
    j = 2451910 + d + em[m] + x * 365 + qu(x, 4) - qu(x, 100) + qu(x, 400);
}
if (m > 2) j += leap(y);          // correction for leap year

x = j - 2451545;                  // days since 2000-01-01
T = (double)x / (double)36525;    // julian centuries

for (i = 0; i < 4; i++) {
    c[i] = e[i] + de[i] * T;        // eccentricity
    l[i] = L[i] + dL[i] * T;        // mean longitude
    v[i] = w[i] + dw[i] * T;        // longitude of perihelion
    f[i] = (l[i] - v[i]) * RAD;     // mean anomaly
    t[i] = theta(f[i], c[i]);       // eccentric anomaly
    f[i] = 2 * atan(sqrt((1 + c[i]) / (1 - c[i]))) * tan(t[i] / 2)) * DEG + v[i]; // true a.
}

printf("julian : %ld\n", j);
for (i = 0; i < 4; i++) printf("%s: %.2f, Perihel: %.2f\n", planet[i], f[i], v[i]);

return EXIT_SUCCESS;              // exit the program
}

// -----
// subroutine: theta, leap, qu
// -----

double theta(double m, double e){ // solve Kepler equation
    double t, d, dt;

    while (m > PI) m -= 2 * PI;     // normalize m ..
    while (m < -PI) m += 2 * PI;    // .. to range -PI <= m <= PI

    t = m + e * sin(m);

```



```

do
{ d = m - (t - e*sin(t));
  dt= d/(1-e*cos(t));
  t += dt;
} while (fabs(dt) > 0.0001);

return t;
}

// -----
int leap(long y){

int i = 0;
if (y%4 == 0)
  i = 1;
if (y > 1582 && y%100 == 0 && y%400 != 0)
  i = 0;
return i;
}

// -----
long qu(int a, int b){

long x = a/b;
if (a < 0) // for negative numerator ..
  x -= (a%b != 0); // .. if remainder, subtract 1
return x;
}
//

```

LITERATUR

- [1] Harold Scott MacDonald Coxeter, *Unvergängliche Geometrie*, 2nd ed., Birkhäuser, 1981.
- [2] Ernst Freudenthal and Werner Heinrich, *Neue Behandlung der Kurven zweiter Ordnung durch Invarianten* (2010), available at <http://berndt-schwerdtfeger.de/wp-content/uploads/pdf/k2.pdf>.
- [3] Berndt E. Schwerdtfeger, *On calendar formulas* (2010), available at <http://berndt-schwerdtfeger.de/wp-content/uploads/pdf/calj.pdf>.
- [4] Erland Myles Standish, *Keplerian Elements for Approximate Positions of the Major Planets*, available at http://ssd.jpl.nasa.gov/txt/aprx_pos_planets.pdf.