LÖSUNGSHEFT ZUR BEHANDLUNG DER KURVEN ZWEITER ORDNUNG DURCH INVARIANTEN

ERNST FREUDENTHAL UND WERNER HEINRICH

In diesem Heft sind die Lösungen aller Aufgaben des Lehrgangs [1] sowie einige zusätzliche Diskussionen enthalten.

 Version 1.0, rev. 504, 4. März 2015

Literatur

[1] Ernst Freudenthal and Werner Heinrich, *Neue Behandlung der Kurven zweiter Ordnung durch Invarianten* (2010), available at http://berndt-schwerdtfeger.de/wp-content/uploads/pdf/k2.pdf.

1. Lösungen zum ersten Paragraphen

Aufgabe 1.1. $\gamma = -23$, $g = 21x - 26y + 119 = 0$

Aufgabe 1.2. $cg \equiv g_1 + \gamma g_2$, $c = 7/3$, $\gamma = 22/3$

Aufgabe 1.3. *a*) Aus $\begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} = 0$ folgt $\begin{vmatrix} u_1 + \gamma u_2 & v_1 + \gamma v_2 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} = 0$
b) $\gamma = -5/3$, $g = 4x - 3y - 11 = 0$
c) $g = 4x - 3y + k = 0$
d) $\gamma = -1$

Aufgabe 1.4. $y - y_1 - m(x - x_1) = 0$; $g_1 = y - y_1 = 0$, $g_2 = x - x_1 = 0$, $\gamma = -m$

Aufgabe 1.5. $a^2 - b^2 = \dfrac{p^2}{(1-\varepsilon^2)^2} - \dfrac{p^2}{1-\varepsilon^2} = \dfrac{p^2\varepsilon^2}{(1-\varepsilon^2)^2} = a^2\varepsilon^2 = e^2$; $\dfrac{b^2}{a} = p$, $a = -10/3$, $b = 10/\sqrt{-3}$, $e = -20/3$, $p = 10$, $-\dfrac{a}{\varepsilon} = 5/3$

Aufgabe 1.6. Siehe Abbildung 1: $\dfrac{r_1}{d_1} = \dfrac{\varepsilon}{1}$; analog S_2

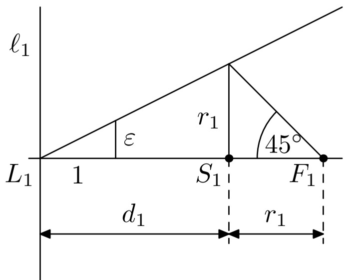


Abb. 1

Aufgabe 1.7. $x_{F_2} = x_M + a\varepsilon = \dfrac{a}{\varepsilon} + a\varepsilon = \dfrac{a}{\varepsilon}(1 + \varepsilon^2) = \dfrac{1+\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2}f$; $x_{L_2} = 2\dfrac{a}{\varepsilon} = \dfrac{2f}{1-\varepsilon^2}$; $\left(x - \dfrac{1+\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2}f\right)^2 + y^2 = \varepsilon^2\left(x - \dfrac{2f}{1-\varepsilon^3}\right)^2$ ergibt (1.4)

Aufgabe 1.8. $a = -8/\sqrt{15}$, $b = 8/\sqrt{-7}$, Hyperbel

Aufgabe 1.9. Siehe Abbildung 2; $\dfrac{r_S}{d_S} = \dfrac{x_F}{-x_L} = \varepsilon$ und $-x_L + x_F = f = \dfrac{p}{\varepsilon}$ liefern $x_F = \dfrac{p}{1+\varepsilon}$ und $x_L = -\dfrac{p}{\varepsilon(1+\varepsilon)}$. Aus $r^2 = \varepsilon^2 d^2$ folgt $\left(x - \dfrac{p}{1+\varepsilon}\right)^2 + y^2 = \varepsilon^2\left(x + \dfrac{p}{\varepsilon(1+\varepsilon)}\right)^2$ und hieraus (1.16).

Abb. 2

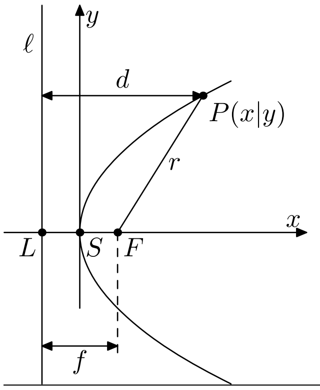


Abb. 3

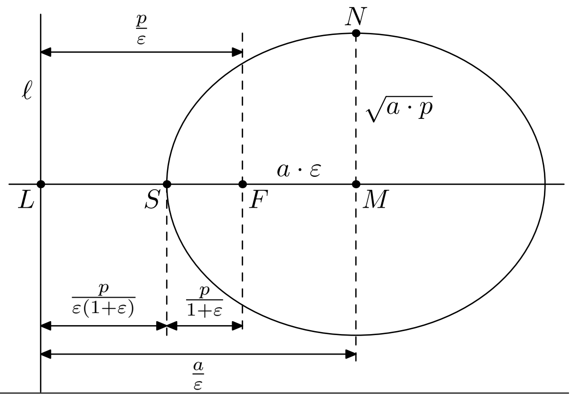


Abb. 4

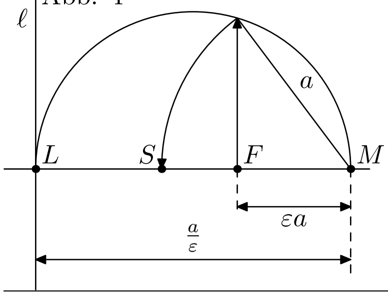
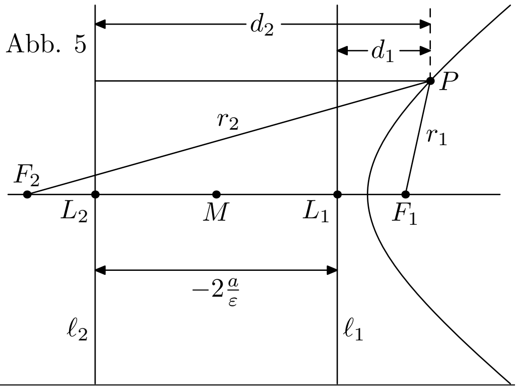


Abb. 5



Aufgabe 1.10. Z.B. Ellipse siehe Abbildungen 3 und 4.

Aufgabe 1.11. $p = \frac{1}{26}\sqrt{13}$, $K_2 = 4x^2 + 12xy + 9y^2 - 7x - 4y = 0$

Aufgabe 1.12. $K_2 = h^2 - 2pt_S + (1-\varepsilon^2)t_S^2 = 0$ mit HESSEformen für h und t_S

Aufgabe 1.13. Siehe Abbildung 5. Für Punkte des rechten Hyperbelastes gilt $\dfrac{r_1}{d_1} = \dfrac{r_2}{d_2} = \varepsilon$, also $\dfrac{r_2}{r_1} = \dfrac{d_2}{d_1}$, sodass $\dfrac{r_2 - r_1}{r_1} = \dfrac{d_2 - d_1}{d_1} = \dfrac{-2\frac{a}{\varepsilon}}{d_1}$, woraus $r_1 - r_2 = 2a$ folgt. Analog für Punkte des linken Astes.

Aufgabe 1.14. Z.B. $r(\frac{\pi}{2}) = p$, $r(\pi) = r_{S_1} = \frac{p}{1+\varepsilon}$, $r(0) = r_{S_2} = \frac{p}{1-\varepsilon}$, $r_{S_1} + r_{S_2} = \frac{2p}{1-\varepsilon^2} = 2a$, gültig bei einer Ellipse.

Aufgabe 1.15. Der Kreis mit $r = p$ um F.

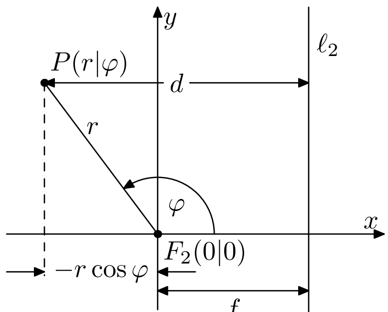


Abb. 6

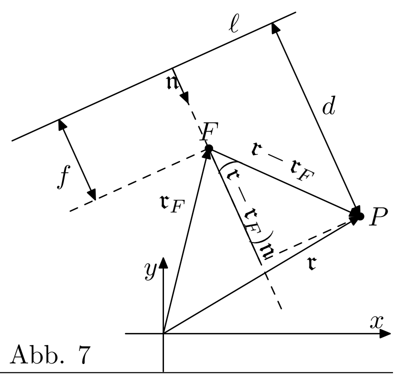


Abb. 7

Aufgabe 1.16. Siehe Abbildung 6; $r^2 - \varepsilon^2 d^2 = 0$ liefert mit $d = f - x$
$r^2 - \varepsilon^2(f-x)^2 = (r + \varepsilon(f-x)) \cdot (r - \varepsilon(f-x)) = 0$, woraus mit $x = r\cos\varphi$ die angegebenen Polargleichungen folgen.

Aufgabe 1.17. Siehe Abbildung 7; $(\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_F)^2 = \varepsilon^2 d^2$ liefert mit $d = f + (\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_F) \cdot \mathfrak{n}$ die angegebene Gleichung.

2. Lösungen zum zweiten Paragraphen

Aufgabe 2.1. $\begin{pmatrix} \frac{-9}{10} & \frac{-3}{10} & \frac{51}{10} \\ \frac{-3}{10} & \frac{-1}{10} & \frac{17}{10} \\ \frac{51}{10} & \frac{17}{10} & \frac{-289}{10} \end{pmatrix}$; $K_2 = 9x^2 + 6xy + y^2 - 102x - 34y + 289 = 0$,
$K_2 = (3x + y - 17)^2 = 0$

Aufgabe 2.2. $\begin{pmatrix} \frac{-12}{13} & \frac{-3}{26} & \frac{1}{26} \\ \frac{-3}{26} & \frac{-43}{52} & \frac{-3}{52} \\ \frac{1}{26} & \frac{-3}{52} & \frac{1}{52} \end{pmatrix}$; $K_2 = 48x^2 + 12xy + 43y^2 - 4x + 6y - 1 = 0$

Aufgabe 2.3. $\begin{pmatrix} \frac{7}{2} & \frac{9}{2} & \frac{-7}{2} \\ \frac{9}{2} & \frac{7}{2} & \frac{-7}{2} \\ \frac{-7}{2} & \frac{-7}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$; $K_2 = 7x^2 + 18xy + 7y^2 - 14x - 14y + 5 = 0$

Aufgabe 2.4. $\begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & 1 & \frac{9}{2} \\ 1 & \frac{-1}{2} & \frac{-7}{2} \\ \frac{9}{2} & \frac{-7}{2} & -19 \end{pmatrix}$; $K_2 = x^2 - 4xy + y^2 - 18x + 14y + 38 = 0$

Aufgabe 2.5. 1) $\bar{s}_{33} = -1$, $\bar{A}_{33} = \bar{A} = 0$ 2) $\bar{s}_{33} = \frac{-7}{4}$, $\bar{A}_{33} = \frac{3}{4}$, $\bar{A} = \frac{1}{52}$
3) $\bar{s}_{33} = 7$, $\bar{A}_{33} = -8$, $\bar{A} = \frac{9}{2}$ 4) $\bar{s}_{33} = 2$, $\bar{A}_{33} = -3$, $\bar{A} = 8$

Aufgabe 2.6. 1) $p = 0$ 2) $p = \frac{1}{26}\sqrt{13}$ 3) $p = \frac{3}{2}\sqrt{2}$ 4) $p = 2\sqrt{2}$

Aufgabe 2.7. $\dfrac{\mathfrak{J}_2}{\mathfrak{J}_1^2} = \dfrac{p^4}{(1-\varepsilon^2)^3}$, $\mathfrak{J}_1\mathfrak{J}_2 = \dfrac{(\varepsilon-2)^3}{p^2}$

Aufgabe 2.8. Ergebnisse schon bekannt.

Aufgabe 2.9. Die Formeln für ε und p gelten nur für fokalerzeugte Kurven

Aufgabe 2.10. Z.B. sind $\dfrac{A_{23}}{a_{11}^2}$ oder $\dfrac{Aa_{22}}{A_{13}^2}$ normierungsinvariant, aber nicht bewegungsinvariant. Dasselbe gilt für $\mathfrak{J}_1$, $\mathfrak{J}_2$, ε und p in den nicht erzeugbaren Fällen.

Aufgabe 2.11. $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$, $\varepsilon = 1/\sqrt{2}$, $p = i$

Aufgabe 2.12. $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -5$, $\varepsilon = 1$, $p = 0$

Aufgabe 2.13. $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -2$, $\varepsilon = 1$, $p = 5/2\sqrt{2}$

Aufgabe 2.14. $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -3$, $\varepsilon = 2/\sqrt{3}$, $p = \frac{2}{9}\sqrt{21}$

Aufgabe 2.15. folgt aus den Wurzelsätzen von Viète für die charakteristische Gleichung

Aufgabe 2.16. $(a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12}^2 = \lambda^2 - s_{33}\lambda + A_{33}$

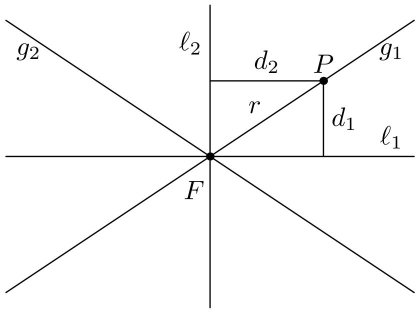
Aufgabe 2.17. *a*) Aus $(a_{11} - \lambda_2)(a_{22} - \lambda_2) = a_{12}^2 \geq 0$ und $\lambda_1 - \lambda_2 \geq 0$, d.h. $s_{33} - 2\lambda_2 \geq 0$ oder $(a_{11} - \lambda_2) + (a_{22} - \lambda_2) \geq 0$ folgt $(a_{11} - \lambda_2) \geq 0$ und $(a_{22} - \lambda_2) \geq 0$. *b*) Aus $(a_{11} - \lambda_1)(a_{22} - \lambda_1) = a_{12}^2 \geq 0$ und $\lambda_2 - \lambda_1 \leq 0$, d.h. $s_{33} - 2\lambda_1 \leq 0$ oder $(a_{11} - \lambda_1) + (a_{22} - \lambda_1) \leq 0$ folgt $(a_{11} - \lambda_1) \leq 0$ und $(a_{22} - \lambda_1) \leq 0$.

Aufgabe 2.18. Ist I eine Quasiinvariante, so ist $\bar{I} = q^n I = (-\lambda)^n I$ eine normierte Invariante, d.h. Invariante. Für $I = 0$ wird $I = \bar{I} = 0$; $s_{33} = 0$ bedeutet $\bar{s}_{33} = 0$, also nach (2.5) $\varepsilon = \sqrt{2}$.

Aufgabe 2.19. Aus $\varepsilon \lesseqqgtr 1$, d.h. $\sqrt{\dfrac{\lambda_1 - \lambda_2}{-\lambda_2}} \lesseqqgtr 1$ folgt, weil nach (2.22) stets $\lambda_2 < 0$ ist, $\lambda_1 \lesseqqgtr 0$

Aufgabe 2.20. Siehe Abbildung 8: wegen $\dfrac{r^2}{d_1^2} = \varepsilon_1^2$, $\dfrac{r^2}{d_2^2} = \varepsilon_2^2$ und $d_1^2 + d_2^2 = r^2$ ist $-1 + \varepsilon_1^2 = \dfrac{d_2^2}{d_1^2}$ und $-1 + \varepsilon_2^2 = \dfrac{d_1^2}{d_2^2}$, woraus die Behauptung folgt.

Abb. 8



Aufgabe 2.21. Für $\varepsilon = 1$ ist $A_{33} = 0$ und wegen Vorschrift V_1 ist $s_{33} < 0$, sodass nach (2.22) $\lambda_2 = s_{33}$, weil die Wurzel positiv zu nehmen ist. Im Falle $\varepsilon^2 = 2$ ist gemäß (2.5) $s_{33} = 0$ und gemäß (2.3) $A_{33} < 0$, sodass hier (2.22) $\lambda_2 = -\sqrt{-A_{33}}$ liefert.

Aufgabe 2.22. Aus $\lambda_2 = -1$ folgt $\bar{a}_{ik} = a_{ik}$. Die ε-Bestimmung nach (2.21) liefert $\varepsilon \geq 0$, während aus der biquadratischen Gleichung neben einem positiven ε auch noch ein negatives und zwei rein imaginäre ε-Werte zulässig wären. Im ganzen gibt es also jeweils vier Erzeugungen. Wir bevorzugen die eine, weil dann (2.27) reelle u und v ergibt.

Aufgabe 2.23. $A_{33} = -24$, $A = 225$, $s_{33} = 23$, Hyperbel, $\lambda_1 = 24$, $\lambda_2 = -1$, $\varepsilon = 5$, $p = 15$, $u = 3/5$, $v = -4/5$, $w_1 = 5/4$, $w_2 = 1$ $\ell_1 = 12x - 16y + 25 = 0$, $\ell_2 = 3x - 4y + 5 = 0$, $F_1(-\frac{7}{4}|4)$, $F_2(2|-1)$, $M(\frac{1}{8}|\frac{3}{2})$, $h = 4x + 3y - 5 = 0$, $n = 24x - 32y + 45 = 0$, $a = -\frac{5}{8}$, $b = \frac{5}{4}\sqrt{-6}$, $e = -\frac{25}{8}$, $S_1(-\frac{1}{4}|2)$, $S_2(\frac{1}{2}|1)$.

Aufgabe 2.24. $A_{33} = 0,5$, $s_{33} = -1,5$, $A = \frac{25}{8}$, Ellipse, $\lambda_1 = -0,5$ $\lambda_2 = -1$, $\varepsilon = 1/\sqrt{2}$, $p = \frac{5}{4}\sqrt{2}$, $u = 0,8$, $v = 0,6$, $w_1 = 6$, $w_2 = -4$, $\ell_1 = 4x - 3y + 30 = 0$, $\ell_2 = 4x - 3y - 20 = 0$, $F_1(-4|0,5)$, $F_2(0|-2,5)$, $M(-2|-1)$, $h = 3x + 4y + 10 = 0$, $n = 4x - 3y + 5 = 0$, $a = 5/\sqrt{2}$, $b = 5/2$, $e = 5/2$, $S_{1,2} = (-2 \pm 2\sqrt{2}|-1 \mp \frac{3}{2}\sqrt{2})$

Aufgabe 2.25. $A_{33} = -24$, $s_{33} = 23$, $A = 125$, Hyperbel, $\lambda_1 = 24$, $\lambda_2 = -1$, $\varepsilon = 5$, $p = 5\sqrt{5}$, $\ell_1 = 12x - 24y + 43 = 0$, $\ell_2 = x - 2y + 4 = 0$, $F_1(\frac{13}{12}|-\frac{1}{6})$, $F_2(-1|4)$, $M(\frac{1}{24}|\frac{23}{12})$, $h = 2x + y - 2 = 0$, $n = 24x - 48y + 91 = 0$, $a = -\frac{5}{24}\sqrt{5}$, $b = \frac{5}{12}\sqrt{-30}$, $e = -\frac{25}{24}\sqrt{5}$, $S_1(\frac{1}{4}|\frac{3}{2})$, $S_2(-\frac{1}{6}|\frac{7}{3})$.

Aufgabe 2.26. $A_{33} = -24$, $s_{33} = 23$, $A = 405$, Hyperbel, $\lambda_1 = 24$, $\lambda_2 = -1$, $\varepsilon = 5$, $p = 9\sqrt{5}$, $\ell_1 = x - 2y - 12 = 0$, $\ell_2 = 4x - 8y - 51 = 0$, $F_1(1|-1)$, $F_2(\frac{19}{4}|-\frac{17}{2})$, $M(\frac{23}{8}|-\frac{19}{4})$, $h = 2x + y - 1 = 0$, $n = 8x - 16y - 99 = 0$, $a = -\frac{3}{8}\sqrt{5}$, $b = \frac{3}{4}\sqrt{-30}$, $e = -\frac{15}{8}\sqrt{5}$, $S_1(\frac{5}{2}|-4)$, $S_2(-\frac{13}{4}|-\frac{11}{2})$.

Aufgabe 2.27. $A_{33} > 0$, wegen der Vorschrift V_1 am besten $K_2 = -2x^2 - 2xy - 2y^2 - 2x - 6y - 6 = 0$ nehmen: $A_{33} = 3$, $s_{33} = -4 = A$, $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -3$, $\varepsilon = \frac{1}{3}\sqrt{6}$. Aus der normierten Matrix folgt $u = 1/\sqrt{2}$, $v = -1/\sqrt{2}$, $\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -1 \\ -\frac{1}{3} & -1 & -2 \end{pmatrix}$, $w_{1,2} = -\sqrt{2} \pm \sqrt{-2}$, $\ell_{1,2} = x - y - 2 \pm \sqrt{-2} = 0$, $F_{1,2}(\frac{1 \mp 2i}{3}|\frac{-5 \pm 2i}{3})$

Aufgabe 2.28. a) Der Kreis gehört nicht zu den fokalerzeugbaren K_2.
b) Die allgemeine Kreismatrix ist nach Erfüllung der Vorschrift V_1 d.h. $a_{11} < 0$,

$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} \\ 0 & a_{11} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k & 0 & kx_M \\ 0 & -k & ky_M \\ kx_M & ky_M & k(R^2 - x_M^2 - y_M^2) \end{pmatrix}$ Letzteres folgt aus (2.33) nach Multiplikation mit $-k < 0$. Daher ist $s_{33} = 2a_{11} = -2k$, $A_{33} = a_{11}^2 = k^2$ und $A = -a_{11}(a_{13}^2 + a_{23}^2 - a_{33}a_{11}) = k^3R^2$. Speziell für (2.33) ist $s_{33} = -2$, $A_{33} = 1$ und $A = R^2$.

Aufgabe 2.29. Aus Aufgabe 2.28 folgt wegen $k = -a_{11}$ $\quad R = \sqrt{\dfrac{A}{(-a_{11})^3}}$

Aufgabe 2.30. Wegen $A_{31} = k^2x_M$ und $A_{32} = k^2y_M$ ist $x_M = \frac{A_{31}}{A_{33}}$ und $y_M = \frac{A_{32}}{A_{33}}$

Aufgabe 2.31. $R^2 \gtreqless 0$ für $A \gtreqless 0$, d.h. für $a_{13}^2 + a_{23}^2 \gtreqless a_{33}a_{11}$

Aufgabe 2.32. $\begin{pmatrix} -v^2 & uv & uw + x_F \\ uv & -u^2 & vw + y_F \\ uw + x_F & vw + y_F & w^2 - x_F^2 - y_F^2 \end{pmatrix}$ $\bar{a}_{ik} = a_{ik}$;
$a_{13}u + a_{23}v = ux_F + vy_F + w = 0$, $\bar{a}_{13}^2 + \bar{a}_{23}^2 + \bar{a}_{33} = 2w(ux_F + vy_F + w) = 0$

Aufgabe 2.33. $\bar{S}_{33} = \bar{A}_{11} + \bar{A}_{22} = -2w(ux_F + vy_F + w) = 0 = S_{33}$

Aufgabe 2.34. Aus $A_{33} = 0$ folgt $A = -a_{11}a_{23}^2 + 2a_{12}a_{13}a_{23} - a_{22}a_{13}^2$. Wegen $a_{11}a_{22} = a_{12}^2$ wird $A_{31}^2 = (a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22})^2 = -a_{22}A$; analog $A_{32}^2 = -a_{11}A$. Dies gilt nur bei symmetrischer Matrix.

Aufgabe 2.35. folgt direkt aus der Matrix $\begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix}$ der Doppelgeraden

Aufgabe 2.36. Für $a_{11} = 0$ ist schon b nicht bestimmbar. Aus $a_{11} = 0$ folgt wegen $A_{33} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$ auch $a_{12} = 0$. Wäre noch $a_{22} = 0$, so ergäbe sich keine K_2-Gleichung. $A_{31} = 0$ fordert noch $a_{31} = 0$. Setzt man $b^2 = a_{22}$ und $a_{23} = bc$, so hat für $a_{11} = 0$ die Matrix die Gestalt $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & bc \\ 0 & bc & a_{33} \end{pmatrix}$

Aufgabe 2.37. $A_{33} = S_{33} = 0$ ist noch auszunutzen. Ist $a_{11} \neq 0$, so folgt aus der angegebenen Matrix wegen $a^2 + b^2 \neq 0$ $\quad a_{33} = c^2$ aus $S_{33} = 0$ und für $a_{11} = 0$ nach Aufgabe 2.36 wegen $b^2 \neq 0$ auch $a_{33} = c^2$. In beiden Fällen ist $A_{32} = 0$ von selbst erfüllt. Im ersten Fall ist $K_2 = (ax + by + c)^2 = 0$ und im zweiten Fall $K_2 = (by + c)^2 = 0$ tatsächlich die Gleichung einer Doppelgeraden.

Aufgabe 2.38. $\varepsilon = 1$ und $a_{13}u + a_{23}v = 0$ sind von selbst erfüllt, da K darin nicht eingeht

Aufgabe 2.39. In A_{13}, A_{23} und A_{33} geht K ebenfalls nicht ein. Es wird aber $S_{33} = s_{33}K \neq 0$.

Aufgabe 2.40. $\begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 - C^2 \end{pmatrix}$ ist die Matrix des angegebenen Parallelenpaares. $S_{33} = -(a^2 + b^2)C^2 = -s_{33}C^2$

Aufgabe 2.41. *a)* $K_2 = 2a^2x^2 + 4abxy + 2b^2y^2 + 2a(c_1 + c_2)x + 2b(c_1 + c_2)y + 2c_1c_2 = 0$ hat die Matrix $\begin{pmatrix} 2a^2 & 2ab & a(c_1 + c_2) \\ 2ab & 2b^2 & b(c_1 + c_2) \\ a(c_1 + c_2) & b(c_1 + c_2) & 2c_1c_2 \end{pmatrix}$
$S_{33} = 4c_1c_2 - (c_1 + c_2)^2 = -(c_1 - c_2)^2$. Bei reellen parallelen oder zusammenfallenden Geraden mit $a^2 + b^2 = 1$ (HESSEform) ist also $S_{33} = -d^2$, wo $d \geq 0$ den Abstand der

Geraden bedeutet. Daher ist S_{33} quasiinvariant. Bei nullteiligen Parallelen ist daher $S_{33} > 0$ unabhängig von a und b, also sig S_{33} invariant, da $c_1 - c_2$ rein imaginär ist.
b) Für $a^2 + b^2 \neq 1$ ist $s_{33} = 2(a^2 + b^2)$ und wegen $d^2 = \left(\dfrac{c_1 - c_2}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)^2$
$S_{33} = -(a^2 + b^2)(c_1 - c_2)^2 = -\dfrac{s_{33}^2}{4} d^2$, sodass $d = \dfrac{2}{s_{33}} \sqrt{-S_{33}}$.

Aufgabe 2.42. Aus Aufgabe 2.40 und 2.41 *b*) folgt $S_{33} = -s_{33} k^2 = -\dfrac{s_{33}^2}{4} d^2$, sodass $k = \frac{d}{2} \sqrt{s_{33}}$.

Aufgabe 2.43. s_{33}, A_{33} und A sind bei der $K_2 = (ax + by + c)^2 - C^2 = 0$ dieselben wie bei der $K_2 = (ax + by + c)^2 = 0$

Aufgabe 2.44. Beide Kurven sind nullteilig. *a*) ist als Kreis nicht fokalerzeugbar, *b*) hat als nullteilige Ellipse ein komplexes Erzeugendensystem mit reellem ε.

Aufgabe 2.45. Auch bei einem Wendepunkt mit waagerechter Tangente ist $y' = 0$. Wegen des Vollständigkeitsnachweises kommen die Eigenschaften der Typen von (2.9) jetzt nur in <u>einer</u> Zeile der ergänzten Tabelle vor. Die Querstriche sind wegzulassen.

3. Lösungen zum dritten Paragraphen

Aufgabe 3.1. $A_{33} = -64$, $A = 0$, Geradenpaar mit Schnittpunkt,
$K_2 = (7x + 2y - 50)(x - 2y - 10) = 0$

Aufgabe 3.2. $A_{33} = 9$, $A = 81$, $s_{33} = 14$, nullteilige Ellipse

Aufgabe 3.3. $A_{33} = 0 = A$, $S_{33} = 8$, nullteiliges Parallelenpaar
$K_2 = (x + y + 2 + 2i)(x + y + 2 - 2i) = 0$

Aufgabe 3.4. $A_{33} = 8$, $A = -51$, $s_{33} = 6$, Ellipse

Aufgabe 3.5. $A_{33} = -5000$, $A = 5^4 \cdot 5521$, $s_{33} = 175$, stumpfe Hyperbel

Aufgabe 3.6. $A_{33} = 32$, $A = 0$, Punkt. Die Auflösung der K_2-Gleichung nach x oder y liefert den einzigen reellen Punkt $P(2|2)$.

Aufgabe 3.7. $A_{33} = -49$, $A = 1568$, $s_{33} = -2$, spitze Hyperbel

Aufgabe 3.8. $A_{33} = 0 = A$, $S_{33} = 0$, Doppelgerade, $K_2 = (3x + 4y - 2)^2 = 0$

Aufgabe 3.9. $A_{33} = -25$, $A = -25$, $s_{33} = 0$, rechtwinklige Hyperbel

Aufgabe 3.10. $A_{33} = 0 = A$, $S_{33} = -2$, Parallelenpaar
$K_2 = (x + y + 1)(x + y - 1) = 0$

Aufgabe 3.11. $A_{33} = t^2 - 1$, $A = 0$, lauter zerfallende K_2
a) $t^2 > 1$ Punkt,
b) $t^2 < 1$ Geraden mit Schnittpunkt,
c) $t = \pm 1$ Doppelgerade $K_2 = (x \pm y + 1)^2 = 0$

Aufgabe 3.12. $A_{33} = 3$, $A = -2t^2$, $s_{33} = 4$, $t \neq 0$ Ellipse, $t = 0$ Punkt $P(0|0)$

Aufgabe 3.13. $A_{33} = \cot^2 \alpha - 1$, $A = \cot \alpha (\cot \alpha + 1)(\cot \alpha - 1)$, $s_{33} = 2 \cot \alpha$, $S_{33} = 2 \cot^2 \alpha$, für $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$ nullteilige Ellipse, $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ spitze Hyperbel, $\alpha = \frac{\pi}{4}$ nullteiliges Parallelenpaar $K_2 = x^2 - 2xy + y^2 + 1 = (x - y)^2 + 1 = (x - y + i)(x - y - i)$

Aufgabe 3.14. $A_{33} = -\cos^2 t$, $A = \cos^2 t$, $s_{33} = 2 \sin t$, lauter stumpfe Hyperbeln

Aufgabe 3.15. $A_{33} = t^2 - 1$, $A = -(1+t)(2t^2 - t + 1)$, $s_{33} = 2t$,
a) $t = -1$ $K_2 = (x - y + 1 - \sqrt{2})(x - y + 1 + \sqrt{2}) = 0$
b) $t = 1$, Parabel
c) Ellipsen $t < -1$ oder $t > 1$; Hyperbeln $-1 < t < +1$

Aufgabe 3.16. $-2K_2 = 0$ liefert $A_{33} = 3s^2t^2$, $A = 2s^4t^4$, $s_{33} = -2(s^2 + t^2)$, lauter Ellipsen außer für $s = 0$, $t \neq 0$ oder $s \neq 0$, $t = 0$ Doppelgerade.

Aufgabe 3.17. $\varepsilon = \frac{1}{3}$, $p = \frac{4}{9}\sqrt{10}$, Ellipse, $f = \frac{4}{3}\sqrt{10}$, $a = \frac{1}{2}\sqrt{10}$, $b = \frac{2}{3}\sqrt{5}$, $e = \frac{1}{6}\sqrt{10}$, $\frac{a}{\varepsilon} = \frac{3}{2}\sqrt{10}$, $F = \frac{5\sqrt{2}}{3}\pi$

Aufgabe 3.18. $\varepsilon = \frac{1}{2}$, $p = \frac{1}{2}\sqrt{10}$, Ellipse, $f = \sqrt{10}$, $a = \frac{2}{3}\sqrt{10}$, $b = \frac{1}{3}\sqrt{10}$, $e = \frac{1}{3}\sqrt{10}$, $\frac{a}{\varepsilon} = \frac{4}{3}\sqrt{10}$, $F = \frac{20\sqrt{3}}{9}\pi$

Aufgabe 3.19. $\varepsilon = \frac{1}{5}\sqrt{26}$, $p = \frac{2}{25}\sqrt{2}$, Hyperbel, $f = \frac{2}{65}\sqrt{13}$, $a = -2\sqrt{2}$, $b = \frac{2}{5}\sqrt{-2}$, $e = -\frac{4}{5}\sqrt{13}$, $-\frac{a}{\varepsilon} = \frac{10}{13}\sqrt{13}$.

Aufgabe 3.20. $F = \pi$

Aufgabe 3.21. $a = \frac{c}{2}(\sqrt{4 + t^2} + t)$, $b = \frac{c}{2}(\sqrt{4 + t^2} - t)$

Aufgabe 3.22. $a = -c\sqrt{\sin\alpha}$

Aufgabe 3.23. Aus (3.10) folgt wegen $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = A_{33}$

$$\frac{x^2}{\left(-\frac{1}{\lambda_1}\sqrt{\frac{A}{-\lambda_2}}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(-\frac{1}{\lambda_2}\sqrt{\frac{A}{-\lambda_1}}\right)^2} - 1 = 0 \quad \text{d.h. } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Aufgabe 3.24. $\lambda_2 x^2 + \lambda_1 y^2 + \frac{A}{A_{33}} = 0$

Aufgabe 3.25. $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} = 1$

Aufgabe 3.26. $3x^2 + 7y^2 - 50 = 0$

Aufgabe 3.27. $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = 0$

Aufgabe 3.28. $8x^2 + 9y^2 = 0$

Aufgabe 3.29. Wegen $\bar{s}_{33} = 0$ folgt $\varepsilon = \sqrt{2}$ aus (2.5),
$K_2 = 12x^2 + 7xy - 12y^2 - 135x + 195y + 575 = 0$, $x^2 - y^2 = 100$

Aufgabe 3.30. $\lambda_1 n^2 + \lambda_2 h^2 + \frac{A}{A_{33}} = 0$ mit HESSEformen für $n = 0$ und $h = 0$.

Aufgabe 3.31. *a*) $K_2 = 13x^2 - 18xy + 37y^2 + 38x - 94y - 15 = 0$
b) $K_2 = 37x^2 - 18xy + 13y^2 + 32x - 16y - 60 = 0$

Aufgabe 3.32. $\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \dfrac{A}{A_{33}} = 0$

Aufgabe 3.33. $y^2 = 2px$ erfordert den angegebenen Ansatz. Die Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 0 & a'_{13} \\ 0 & a'_{22} & 0 \\ a'_{13} & 0 & 0 \end{pmatrix}$ liefert $s'_{33} = a'_{22} = s_{33} < 0$, $A'_{33} = 0 = A_{33}$ und $A' = -a'^2_{13}a'_{22} = -a'^2_{13}s_{33} = A > 0$, d.h. $a_{13} = \mp\sqrt{\frac{A}{-s_{33}}}$, sodass $y^2 = \pm 2\sqrt{\frac{A}{(-s_{33})^3}}x$. Die Symmetrieachse ist die x-Achse (Parabelachse).

Aufgabe 3.34. $x^2 = \pm 2\sqrt{\dfrac{A}{(-s_{33})^3}}y$; die Parabelachse ist jetzt die y-Achse

Aufgabe 3.35. $y^2 = \pm 2x$, $x^2 = \pm 2y$

Aufgabe 3.36. $K_2 = x^2+4xy+4y^2-28x-6y+21 = 0$, $y^2 = \pm 2\sqrt{5}x$, $x^2 = \pm 2\sqrt{5}y$

Aufgabe 3.37. Die Gleichung jeder parabolisch zerfallenden K_2 läßt sich in der Form $y^2 = c^2$ schreiben, woraus der angegebene Ansatz hervorgeht. Die Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a'_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a'_{33} \end{pmatrix}$ liefert $s'_{33} = a'_{22} = s_{33}$, $A'_{33} = 0 = A_{33}$, $A' = 0 = A$ und $S'_{33} = a'_{22}a'_{33} = s_{33}a'_{33} = S_{33}$, sodass $a'_{33} = \frac{S_{33}}{s_{33}}$ ist, woraus $y = \pm\frac{1}{s_{33}}\sqrt{-S_{33}}$ folgt. Die Quasiinvarianz von S_{33} haben wir allerdings nach Aufgabe 2.41 *a*) nur für die Fälle $S_{33} \leq 0$ nachgewiesen!

Aufgabe 3.38. $y = \pm\frac{1}{5}$

Aufgabe 3.39. (2.2) liefert wegen $ux_F + vy_F + w = 0$, $\bar{A}_{31} = (1-\varepsilon^2)x_F = \bar{A}_{33}x_F$ und $\bar{A}_{32} = (1-\varepsilon^2)y_F = \bar{A}_{33}y_F$, sodass $x_M = x_F$ und $y_M = y_F$;
a) $M(1|3)$ *b*) $M(\frac{3}{4}|-\frac{1}{2})$ *c*) $M(1|0)$

Aufgabe 3.40. $\bar{A}_{11} = f(ux_F - vy_F - w)$, $\bar{A}_{12} = f(vx_F + uy_F)$, $\bar{A}_{22} = f(vy_F - ux_F - w)$, $\bar{A}_{31} = uf$, $\bar{A}_{32} = vf$ zeigen, dass das Gleichungssystem für die $\bar{A}_{ik}$ gilt. Wegen $A_{ik} = \lambda_2^2\bar{A}_{ik}$ gilt es daher auch für die A_{ik}.

Aufgabe 3.41. *a*) $A_{31}^2 + A_{32}^2 = -s_{33}A \neq 0$ folgt aus Aufgabe 2.34. Nach der Cramerschen Regel hat das Gleichungssystem der Aufgabe 3.40 daher die angegebene Lösung.
b) Nach Erweiterung der rechten Seite der Lösung für x_F aus Teil *a*) mit A_{13} erhält man unter Beachtung der Mitteilung $A_{13}A_{23} = a_{12}A$ und der Bemerkung aus Aufgabe 2.34: $A_{13}^2 = -a_{22}A$, $A_{23}^2 = -a_{11}A$ bei anschließender Kürzung durch A

$$x_F = \frac{-a_{22}(A_{22}-A_{11}) - 2a_{12}A_{12}}{2s_{33}A_{13}} = \frac{a_{22}A_{11} - a_{12}A_{12} - A + a_{23}A_{23}}{2s_{33}A_{13}} = \\ = \frac{a_{22}A_{11} - a_{12}A_{12} - a_{13}A_{13}}{2s_{33}A_{13}} = \frac{s_{33}A_{11} - A}{2s_{33}A_{13}}$$

Das zweite Gleichheitszeichen erklärt sich aus der Entwicklung der Determinante der Matrix (a_{ik}) nach der zweiten Zeile; das dritte folgt aus der Entwicklung nach der dritten Zeile, das vierte durch Entwicklung nach der ersten Zeile. Analog zeigt man die Richtigkeit der in der Aufgabe mitgeteilten Ordinate y_F.

Aufgabe 3.42. $\ell = 2x - y + 2 = 0$, $F(2|1)$, $p = \sqrt{5}$

Aufgabe 3.43. $\ell = x - y + 8 = 0$, $F(-2|2)$, $S(-3|3)$

Aufgabe 3.44. $\ell = 4x + 3y - 13 = 0$, $F(5|6)$, $S(3|4,5)$

Aufgabe 3.45. $\ell = 12x - 16y + 27 = 0$, $F(-1,03|1,04)$, $S(-1|1)$

Aufgabe 3.46. $\ell_2 = 2x - y + 44 = 0$

Aufgabe 3.47. $(a_{11}x_F + a_{12}y_F + a_{13})x + (a_{12}x_F + a_{22}y_F + a_{23})y + (a_{13}x_F + a_{23}y_F + a_{33}) = (a_{11}x + a_{12}y + a_{13})x_F + (a_{12}x + a_{22}y + a_{23})y_F + (a_{13}x + a_{23}y + a_{33})$

Aufgabe 3.48. $K_2 \equiv (a_{11}x + a_{12}y + a_{13})x + (a_{12}x + a_{22}y + a_{23})y + (a_{13}x + a_{23}y + a_{33})$

Aufgabe 3.49. $F_1(-1|1)$, $F_2(3|3)$, $S_{1,2}(1 \mp \frac{6}{5}\sqrt{5}|2 \mp \frac{3}{5}\sqrt{5})$; $\ell_1 = 2x + y + 5 = 0$, $\ell 2 = 2x + y - 13 = 0$

Aufgabe 3.50. $\mathfrak{r}_{N_{1,2}} = \mathfrak{r}_M \pm b\mathfrak{k} \times \mathfrak{n}$, $N_{1,2}(1 \mp \frac{2}{5}\sqrt{5}|2 \pm \frac{4}{5}\sqrt{5})$

Aufgabe 3.51. folgt sofort nach Multiplikation von (3.25) mit A_{33} wegen (3.7), (3.13) und (3.23)

Aufgabe 3.52. (2.29) hat nach der Diskriminantenberechnung im Anschluß an (2.31) die Lösungen $w_{1,2} = \frac{\bar{a}_{13}u+\bar{a}_{23}v}{\varepsilon^2-1} \pm \frac{\sqrt{A}}{\varepsilon(1-\varepsilon^2)}$, woraus mit (2.31) und (2.21) wegen $a_{ik} = -\lambda_2\bar{a}_{ik}$ $w_{1,2} = \dfrac{a_{13}\sqrt{a_{11}-\lambda_2}+a_{23}\sqrt{a_{22}-\lambda_2} \mp \sqrt{A}}{\lambda_1\sqrt{\lambda_1-\lambda_2}}$ folgt. Mit (2.31) erhält man die angegebenen Leitgeradengleichungen bei Änderung ihrer Nummerierung.

Aufgabe 3.53. $\lambda_1(a_{11}-\lambda_2)x+a_{12}\lambda_1 y+a_{13}(a_{11}-\lambda_2)+a_{12}a_{23} \pm \sqrt{(a_{11}-\lambda_2)A} = 0$ resp. $a_{12}\lambda_1 x+\lambda_1(a_{22}-\lambda_2)y+a_{12}a_{13}+a_{23}(a_{22}-\lambda_2) \pm \sqrt{(a_{22}-\lambda_2)A} = 0$. Wegen $(a_{11}-\lambda_2)(a_{22}-\lambda_2) = a_{12}^2$ ist dabei (3.24) in $\sqrt{a_{11}-\lambda_2}\cdot\sqrt{a_{22}-\lambda_2} = a_{12}$ zu beachten.

Bemerkung zu (3.28):
Bei der Herleitung ist in δ_1 und δ_2 der Faktor $-\lambda_2\varepsilon^2 v$ aufgenommen worden, sodass nach (2.2) $\delta_1 = \lambda_2\varepsilon^2 v^2 = \lambda_2(\bar{a}_{22}+1) = \lambda_2 - a_{22} = a_{11}-\lambda_1$ –letzteres wegen (2.23)– und $\delta_2 = -\lambda_2\varepsilon^2 uv = -\lambda_2\bar{a}_{12} = a_{12}$.

Bemerkung zu (3.29):
n geht als Gerade des Durchmesserbüschels durch M.
Wegen $(a_{11}-\lambda_1)(a_{22}-\lambda_1) = a_{12}^2$ und (2.23) ist $m_h = \dfrac{\lambda_1 - a_{11}}{a_{12}}$ – woraus (3.30) folgt – und nach (3.29) $m_n = \dfrac{a_{12}}{\lambda_2 - a_{22}}$ – woraus (3.31) folgt – sodass in der Tat $m_h m_n = -1$.

Aufgabe 3.54. $h = x-y+2 = 0$, $n = x+y-6 = 0$

Aufgabe 3.55. $h = 2x-y = 0$, $n = 16x+32y+5 = 0$

Aufgabe 3.56. Da $f = 0$ in der Herleitung von (3.28) und (3.29) nicht benutzt wurde, gelten diese Gleichungen auch bei nicht parabolischem Zerfall. Wegen $M \equiv F$ folgt aus (3.31), dass die Nebenachse mit der Leitgeraden zusammenfällt. Nach Aufgabe 2.20 und Vorschrift V_3 kann bei hyperbolischem Zerfall aber auch die Hauptachse mit der Leitgeraden identisch sein.

Aufgabe 3.57. $h = 4x-3y-11 = 0$

Aufgabe 3.58. Die zweite Form der Gleichung der Parabelachse folgt im Falle $a_{12} \neq 0$ wegen $a_{11}a_{22} = a_{12}^2$ aus (3.32) durch Multiplikation mit $a_{22}a_{12}^{-1}$. Die anderen beiden Formen ergeben sich aus den ersten beiden, wenn man diese ausführlich hinschreibt und $a_{11}a_{22} = a_{12}^2$ beachtet. Im Falle $a_{12} = 0$ ist auch a_{11} oder a_{22} (ausschließendes „oder“) gleich Null und die Parabel ist in einer der vier Normalformen $(y-y_S)^2 = \pm 2p(x-x_S)$ bzw. $(x-x_S)^2 = \pm 2p(y-y_S)$ gegeben, bei denen man sich unmittelbar von der Richtigkeit der Gleichungen für die Achse überzeugt.

Aufgabe 3.59. Ja, da die Herleitung von (3.32) für alle w gilt; hier ist wegen $f = 0$ $w = -ux_F - vy_F$.

Ergänzende Frage:
Schreibt man in (2.33) $d = \frac{1}{m_S}g_1 + g_2 = 0$, so wird im Falle $\frac{1}{m_S} = 0$ $d = g_2 = 0$.

Aufgabe 3.60. *a)* $M(2|2)$ inzidiert mit d_1 und d_2; $m_1 = -3$ und $m_2 = -\frac{1}{7}$ erfüllen (3.36)
b) $d = 2x-y-2 = 0$
c) $t_{1,2} = 5x+5y-20 \pm 6\sqrt{10} = 0$

Aufgabe 3.61. *a)* Zu $m_{g_1} = -\frac{a_{11}}{a_{12}}$ ist nach (3.34) $m_{d_1} = 0$, d.h. der Durchmesser $d_1 = y - y_M = 0$ konjugiert; zu $m_{g_2} = -\frac{a_{12}}{a_{22}}$ ist der Durchmesser d_2 mit $1/m_{d_2} = 0$,

d.h. $d_2 = x - x_M = 0$ konjugiert. Aus (3.13) folgt daher die Behauptung.
b) Zu $m_{d_1} = -\frac{a_{11}+a_{12}\beta/\alpha}{a_{12}+a_{22}\beta/\alpha}$ ist nach (3.34) $m_{d_2} = \frac{\beta}{\alpha}$ konjugiert, woraus die Behauptung folgt.

Aufgabe 3.62. $K_2 = 9x^2 + 16xy - 54y - 64x - 143 = 0$

Aufgabe 3.63. $K_2 = 5x^2 - 2xy + 2y^2 - 16x - 4y - 16 = 0$

Aufgabe 3.64. Der Abstand der Leitgeraden ist $2\frac{a}{\varepsilon} = 6\sqrt{5}$. sodass $a = \sqrt{5}$, $b^2 = \frac{40}{9}$; $n = \frac{x+2y-5}{\sqrt{5}} = 0$ liefert $h = \frac{2x-y+c}{\sqrt{5}} = 0$, dann Ansatz (1.15)
a) $c = 0$, $K_2 = 44x^2 - 4xy + 41y^2 - 80x - 160y = 0$
b) $c = -5$, $K_2 = 44x^2 - 4xy + 41y^2 - 260x - 70y + 225 = 0$

Aufgabe 3.65. $c_1 = 30$, $K_2 = 9x^2 + 4xy + 6y^2 + 248x + 104y + 1528 = 0$
$c_2 = 6$, $K_2 = 9x^2 + 4xy + 6y^2 + 56x + 8y - 200 = 0$

Aufgabe 3.66. *a)* $K_2 = 9x^2 - 6xy + 17y^2 - 48x - 16y - 64 = 0$
b) $F_1(0|0)$, $F_2(6|2)$
c) $\ell_1 = 3x + y + 8 = 0$, $\ell_2 = 3x + y - 28 = 0$

Aufgabe 3.67. $K_2 = 13x^2 + 10xy + 13y^2 + 42x - 6y - 27 = 0$;
$\ell_{1,2} = 5x - 5y + 15 \pm 9\sqrt{10} = 0$. Letztere sind die Parallelen zur Nebenachse im Abstand $\frac{a}{\varepsilon}$.

Aufgabe 3.68. *a)* Der Abstand $\overline{\ell_1 t_{S_1}}$ ist $\frac{a}{\varepsilon} - a$, woraus $a = \sqrt{10}$ folgt; $b^2 = \frac{15}{2}$; Ansatz nach (1.15) wie bei Aufgabe 3.64 – oder über Aufgabe 1.12.
$K_2 = 39x^2 - 6xy + 31y^2 + 66x + 118y - 149 = 0$
b) $S_1(0|1) \equiv P$, $S_2(-2|-5)$, $F_1(-\frac{1}{2}|-\frac{1}{2})$, $F_2(-\frac{3}{2}|-\frac{7}{2})$, $M(-1|-2)$

Aufgabe 3.69. Ansatz nach (1.15) analog zu Aufgabe 3.64.
a) $c = 4$, $K_2 = xy - 2x + 2y - 36 = 0$; $c = -4$, $K_2 = xy + 2x - 2y - 36 = 0$
b) $M(-2|2)$, $S_{1,2}(-2 \mp 4\sqrt{2}|2 \mp 4\sqrt{2})$, $F_1(-10|-6)$ $F_2(6|10)$;
$M(2|-2)$, $S_{1,2}(2 \mp 4\sqrt{2}|-2 \mp 4\sqrt{2})$, $F_1(-6|-10)$ $F_2(10|6)$

Aufgabe 3.70. Da (1.20) nur für eine Hyperbel mit der x-Achse als Hauptachse bzw. mit zur x-Achse paralleler Hauptachse gilt, ist hier im Falle $a_{12} = 0$:
$K_2 = b^2(x - x_M)^2 + a^2(y - y_M)^2 - a^2b^2 = 0$ mit $a_{11} = b^2 < 0$ und $a_{22} = a^2$;
(3.40) liefert also: $m_{A_{1,2}} = \pm\sqrt{\dfrac{-a_{11}}{a_{22}}} = \pm\sqrt{\dfrac{-b^2}{a^2}} = \pm\sqrt{\dfrac{e^2 - a^2}{a^2}} = \pm\sqrt{\varepsilon^2 - 1}$.

Aufgabe 3.71. *a)* $a_1 = 8x - 44y - 5 = 0$, $a_2 = 8x + 4y + 1 = 0$
b) $a_1a_2 = 64x^2 - 320xy - 176y^2 - 32x - 64y - 5 = 0$

Untersuchung:
Nein, (3.44) ist keine Identität. Für $a_{22} = 0$ siehe Aufgabe 3.72. Wir verwenden $(-a_{12} + \sqrt{-A_{33}})(-a_{12} - \sqrt{-A_{33}}) = a_{12}^2 + A_{33} = a_{11}a_{22}$ und (3.42) liefert $a_1a_2 = a_{22}^2g_1^2 - 2a_{12}a_{22}g_1g_2 + a_{11}a_{22}g_2^2$, d.h. bei $a_{22} \neq 0$

$$\begin{aligned}\frac{a_1a_2}{a_{22}} &= g_1(a_{22}g_1 - a_{12}g_2) + g_2(-a_{12}g_1 + a_{11}g_2) = \\ &= g_1(A_{33}x - A_{13}) + g_2(A_{33}y - A_{23}) = \\ &= A_{33}(g_1x + g_2y + g_3) - (g_1A_{13} + g_2A_{23} + g_3A_{33}) = \\ &= A_{33}K_2 - A\end{aligned}$$

wegen (3.22) und $g_1A_{13} + g_2A_{23} + g_3A_{33} = a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33} = A$, d.h. $a_1a_2 \equiv a_{22}(A_{33}K_2 - A)$.

Aufgabe 3.72. Bei $a_{22} = 0$ ist $A = 2a_{12}a_{13}a_{23} - a_{11}a_{23}^2 - a_{12}^2 a_{33}$ und $A_{33} = -a_{12}^2$; (3.43) liefert $a_1 a_2 = a_{12}^2(a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y) + 2a_{12}a_{13}a_{23} - a_{11}a_{23}^2$, d.h. $a_1 a_2 = a_{12}^2(K_2 - a_{33}) + A + a_{12}^2 a_{33} = a_{12}^2 K_2 + A = -(A_{33}K_2 - A)$, woraus (3.44) folgt.

Aufgabe 3.73. *a)* $K_2 = 15x^2 + 16xy - 15y^2 - 110x - 2y + 162 = 0$
b) $h = 4x + y - 13 = 0$, $n = x - 4y + 3 = 0$
c) $\ell_2 = x - 4y + 4 = 0$, $F_2(\frac{47}{17}|\frac{33}{17})$
d) $a_1 a_2 = 15x^2 + 16xy - 15y^2 - 110x - 2y + 160 = (5x - 3y - 10)(3x + 5y - 16) = 0$

Aufgabe 3.74. *a)* $K_2 = 12x^2 + 7xy - 12y^2 - 135x + 195y + 575 = 0$
b) $h = 7x + y - 30 = 0$, $n = x - 7y + 60 = 0$
c) $\ell_2 = x - 7y + 110 = 0$, $F_2(1|23)$
d) $a_1 a_2 = 12x^2 + 7xy - 12y^2 - 135x + 195y - 675 = (4x - 3y + 15)(3x + 4y - 45) = 0$

Aufgabe 3.75. $a_1 a_2 = -9x^2 + 14xy - 9y^2 + 8x + 8y - 16 = 0$
$a_{1,2} = 9x + (-7 \pm 4\sqrt{-2})y - 4 \mp 8\sqrt{-2} = 0$

Aufgabe 3.76. $k = 75$; $K_2 = 2x^2 + 3xy - 2y^2 - x + 18y + 47 = 0$

Aufgabe 3.77. $y = \dfrac{p}{m_t}$

Aufgabe 3.78. Die Parallele zur Hauptachse durch B ist der Durchmesser $d = x + 2y - 11 = 0$; $t = K_2 - d^2$ liefert $t = 5x - 11y + 29 = 0$.

Aufgabe 3.79. Aus (3.47) folgt

$$\begin{aligned} t &= (a_{11}x_B + a_{12}y_B + a_{13})x + (a_{12}x_B + a_{22}y_B + a_{23})y + (a_{13}x_B + a_{23}y_B + a_{33}) \\ &= g_1(B)x + g_2(B)y + g_3(B) = 0 \end{aligned}$$

Aus (3.47) folgt ferner

$$\begin{aligned} t &= (a_{11}x + a_{12}y + a_{13})x_B + (a_{12}x + a_{22}y + a_{23})y_B + (a_{13}x + a_{23}y + a_{33}) \\ &= g_1 x_B + g_2 y_B + g_3 = 0 \end{aligned}$$

Aufgabe 3.80. $t = 2x - y - 5 = 0$

Aufgabe 3.81. *a)* $yy_B = p(x + x_B)$, *b)* $xx_B = p(y + y_B)$

Aufgabe 3.82. *a)* $(y - y_S)(y_B - y_S) = p\big((x - x_S) + (x_B - x_S)\big)$,
b) $(x - x_S)(x_B - x_S) = p\big((y - y_S) + (y_B - y_S)\big)$

Aufgabe 3.83. *a)* $K_2 = x^2 + 4xy + 4y^2 - 28x - 6y + 21 = 0$
b) $h = x + 2y - 4 = 0$ *c)* $S(1|\frac{3}{2})$

Aufgabe 3.84. *a)* und *b)* $K_2 = 4x^2 + 4xy + y^2 - 32x + 34y - 11 = 0$, $F(2|-1)$, $S(1|1)$, $\ell = x - 2y + 6 = 0$

Aufgabe 3.85. *a)* $K_2 = 4x^2 + 4xy + y^2 + 9x - 2y - 5 = 0$
b) $F(\frac{19}{20}|\frac{39}{10})$, $S(1|4)$ *c)* $\ell = 4x + 8y - 37 = 0$

Aufgabe 3.86. *a)* $K_2 = 8x^2 + 16xy + 8y^2 - 161x + 84y = 0$
b) $K_2 = 7x^2 - 56xy + 11y^2 + 176x - 384y = 0$

Aufgabe 3.87. $K_2 = 4x^2 - 4xy + y^2 + 2x - 26y + 119 = 0$

Aufgabe 3.88. $K_2 = 27x^2 - 72xy + 48y^2 + 176x - 168y - 11 = 0$, $S(\frac{31}{10}|\frac{173}{40})$

Aufgabe 3.89. Mit (3.22) ist

$$\begin{aligned} a_{11}K_2 - g_1^2 &= a_{11}(g_1 x + g_2 y + g_3) - (a_{11}x + a_{12}y + a_{13})g_1 = \\ &= (-a_{12}g_1 + a_{11}g_2)y + (-a_{13}g_1 + a_{11}g_3) = \\ &= (A_{33}y - A_{23})y + (-A_{23}y + A_{22}) = A_{33}y^2 - 2A_{23}y + A_{22} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{22}K_2 - g_2^2 &= a_{22}(g_1x + g_2y + g_3) - (a_{12}x + a_{22}y + a_{23})g_2 = \\ &= (a_{22}g_1 - a_{12}g_2)x + (-a_{23}g_2 + a_{22}g_3) = \\ &= (A_{33}x - A_{13})x + (-A_{13}x + A_{11}) = A_{33}x^2 - 2A_{13}x + A_{11} \end{aligned}$$

Aufgabe 3.90. $H(1|1)$, $T(-1|-1)$, $L(-\sqrt{2}|-\frac{1}{2}\sqrt{2})$, $R(\sqrt{2}|\frac{1}{2}\sqrt{2})$

Aufgabe 3.91. $H(-4|3)$, $T(0|9)$, $L(-2+\sqrt{3}|6+2\sqrt{3})$, $R(-2-\sqrt{3}|6-2\sqrt{3})$

Aufgabe 3.92. $H(1|5)$, $T(-3|-3)$, $L(-1-2\sqrt{2}|1-2\sqrt{2})$, $R(-1+2\sqrt{2}|1+2\sqrt{2})$

Aufgabe 3.93. *a*) Die Koeffizienten in g_1 und g_2 – wobei $a_{11} < 0$ zu beachten ist – liefern die Koeffizienten der Ellipsengleichung außer a_{33}; aus (3.8) folgt $a_{33} = 16$, $K_2 = -5x^2 + 6xy - 5y^2 - 8x + 24y + 16 = 0$
b) $a = 2\sqrt{6}$, $b = \sqrt{6}$ *c*) $\varepsilon = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, $e = 3\sqrt{2}$
d) $h = x - y + 2 = 0$, $n = x + y - 4 = 0$
e) $H(1+\frac{3}{5}\sqrt{15}|3+\sqrt{15})$, $T(1-\frac{3}{5}\sqrt{15}|3-\sqrt{15})$, $L(1-\sqrt{15}|3-\frac{3}{5}\sqrt{15})$, $R(1+\sqrt{15}|3+\frac{3}{5}\sqrt{15})$

Aufgabe 3.94. *a*) Die Koeffizienten in g_1 und g_2 – jeweils mit beiden Vorzeichen – liefern die Koeffizienten der K_2-Gleichung außer a_{33} mit $A_{33} = -7$, sodass zwei Hyperbeln mit $a = -2$ möglich sind; (3.4) ergibt für $a_{11} = \pm 3$, $a_{33} = -16$; $K_2 = 3x^2 - 8xy + 3y^2 + 16x - 12y \mp 16 = 0$.
b) Die erste Hyperbel hat keine H, T, L, R.
Die zweite Hyperbel besitzt $H(\frac{8}{21}\sqrt{21}|2+\frac{2}{7}\sqrt{21})$, $T(-\frac{8}{21}\sqrt{21}|2-\frac{2}{7}\sqrt{21})$, $L(-\frac{2}{7}\sqrt{21}|2-\frac{8}{21}\sqrt{21})$, $R(\frac{2}{7}\sqrt{21}|2+\frac{8}{21}\sqrt{21})$.

Aufgabe 3.95. $p = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, $\ell = x - y = 0$, $F(-\frac{1}{2}|\frac{1}{2})$, $S(-\frac{1}{4}|\frac{1}{4})$, $h = x + y = 0$, $T(-1|0)$, $R(0|1)$

Aufgabe 3.96. $p = \frac{32}{25}\sqrt{5}$, $\ell = x - 2y = 0$, $F(-\frac{16}{5}|\frac{8}{5})$, $S(-\frac{64}{25}|\frac{8}{25})$, $h = 10x + 5y + 24 = 0$, $T(-4|0)$, $R(0|8)$

Aufgabe 3.97. $y_{H,T} = \dfrac{A_{22}}{2A_{32}} = y_{B_1}$, d.h. $t_1 = 2A_{32}y - A_{22} = 0$; $x_{L,R} = \dfrac{A_{11}}{2A_{31}} = x_{B_2}$, d.h. $t_2 = 2A_{31}y - A_{11} = 0$. Der Schnittpunkt von t_1 und t_2 ist $(\dfrac{A_{11}}{2A_{31}}|\dfrac{A_{22}}{2A_{32}})$; er liegt nach (3.15) auf der Leitgeraden.

Aufgabe 3.98. Nimmt man gemäß Aufgabe 3.58 $h = a_{11}x + a_{12}y + c_h = 0$, so erhält man für den Abstand e_1 von g_1 und h: $e_1 = \left|\dfrac{A_{31}}{\sqrt{-a_{11}}\sqrt{(-s_{33})^3}}\right|$, sodass wegen $A_{31}^2 = -a_{22}A$ (vergleiche Aufgabe 2.34)
$e_1 = \sqrt{\dfrac{-a_{22}}{-a_{11}}} \cdot \sqrt{\dfrac{A}{(-s_{33})^3}} = p\sqrt{\dfrac{a_{22}}{a_{11}}}$, letzteres nach (3.3). Entsprechend folgt über $h = a_{12}x + a_{22}y + C_h = 0$: $e_2 = p\sqrt{\dfrac{a_{11}}{a_{22}}}$, sodass $e_1e_2 = p^2$.

Aufgabe 3.99. Aus der Matrix in der Lösung zu Aufgabe 2.41 *a*) folgt
$g_1 = ax + by + \frac{c_1+c_2}{2} = g_2 = 0$, $g_3 = ax + by + \frac{c_1c_2}{c_1+c_2} = 0$; nach Aufgabe 3.59 ist $h = ax + by + \frac{c_1+c_2}{2} = 0$. Hieraus geht alles hervor, weil bei einer Doppelgeraden $c_1 = c_2 = c$ ist.

Aufgabe 3.100. Wenn g_1 und g_2 zusammenfallen muss $g_1 = kg_2$ für ein $k \neq 0$ sein; $A_{33} = 0 = A$ folgt aus Determinantensätzen.

Aufgabe 3.101. *a*) Nach der Lösung von Aufgabe 2.40 ist $a_{11} = a^2$,
$g_1 = a(ax+by+c)$ und $K_2 = (ax+by+c)^2 + \frac{S_{33}}{s_{33}}$; daher ist $a_{11}s_{33}K_2 = s_{33}g_1^2 + a_{11}S_{33}$
b) analog zu *a*)

Aufgabe 3.102. Ist $g_2(B) = 0$, so ist $B \equiv L$ bzw. $B \equiv R$, d.h. $t = x - x_B = 0$. Da B auf der K_2 liegt, ist nach (3.22) $g_1(B)x_B + g_3(B) = 0$, also $t = g_1(B)x + g_3(B) = 0$, was auch aus (3.52) folgt.

Aufgabe 3.103. $t = 4x + 3y - 35 = 0$

Aufgabe 3.104. $B_1(0|4)$, $B_2(\frac{4}{3}|\frac{2}{3})$, $t_1 = 3x + 2y - 8 = 0$ $t_2 = 9x + 6y - 16 = 0$

Aufgabe 3.105. $p_0 = y = 0$, $B_1(12|0)$, $B_2(4|0)$, $t_1 = x + 3y - 12 = 0$, $t_2 = x - y - 4 = 0$

Aufgabe 3.106. (3.53) liefert $p_0 = gx_F + g_2y_F + g_3 = 0$, sodass nach (3.20) $p_0 \equiv \ell$ ist.

Aufgabe 3.107. Aus $P_0(0|0)$ folgt mit (3.53) $p_0 \equiv g_3$.

Aufgabe 3.108. *a*) Wann existiert im Falle $A \neq 0$ zu einer gegebenen Geraden $p = 0$ kein Pol?
Das Gleichungssystem (3.56) für die Unbekannten qx_0, qy_0 und q ist wegen $(u, v) \neq (0, 0)$ inhomogen und hat wegen $A \neq 0$ eine eindeutige Lösung $(qx_0, qy_0, q) \neq (0, 0, 0)$. Man beachte, dass aus $q = 0$ nicht auf $qx_0 = qy_0 = 0$ geschlossen werden kann. Der Fall $q = 0$ bedeutet $A_{13}u + A_{23}v + A_{33}w = 0$, und nach (3.58) ist diese Bedingung mit der Nichtexistenz eines Poles gleichbedeutend.

(1) Für $A_{33} \neq 0$ folgt daraus $\frac{A_{31}}{A_{33}}u + \frac{A_{32}}{A_{33}}v + w = p(M) = 0$; p ist also ein Durchmesser.
(2) Für $A_{33} = 0$ ist $A_{13}u + A_{23}v = 0$ die Bedingung für die Nichtexistenz eines Poles.
Ist $u \neq 0 \neq a_{11}$, so folgt daraus $\frac{u}{a_{11}}(a_{11}A_{13} + \frac{v}{u}a_{11}A_{23}) = 0$, also wegen $a_{11}A_{13} + a_{12}A_{23} = 0$ (Determinantensatz) $\frac{v}{u} = \frac{a_{12}}{a_{11}}$. Nach Aufgabe 3.58 bedeutet dies $m_p = m_h$, d.h. p ist ein Durchmesser.
Ist $u = 0$, d.h. $m_p = 0$, so ist $A_{23} = 0$ die Bedingung für die Nichtexistenz eines Poles, sodass wegen $A_{23}^2 = -a_{11}A$ (vergleiche Aufgabe 2.34) $a_{11} = 0$ folgt. Nach Aufgabe 3.58 bedeutet dies $m_h = 0$, sodass wieder $m_p = m_h$ ist.

Zusammenfassend gilt:
Genau die Durchmesser regulärer K_2 besitzen keine Pole.

b) Wann existiert im Falle $A = 0$ zu einer gegebenen Geraden $p = 0$ ein Pol?

(1) P sei ein beliebiger Punkt, seine Polare ist $p = g_1x_P + g_2y_P + g_3 = 0$. Wegen $A = 0$ ist die Darstellung $g_3 = \alpha_1g_1 + \alpha_2g_2$ möglich, sodass $p = g_1(x_P + \alpha_1) + g_2(y_P + \alpha_2) = 0$ gilt. Für $A_{33} \neq 0$ inzidiert dann M mit p, weil $g_1(M) = 0 = g_2(M)$ ist. Sämtliche Polaren bilden also das Geradenbüschel mit dem Mittelpunkt als Grundpunkt.
Umgekehrt gehört zur Geraden $g = \beta_1g_1 + \beta_2g_2 = 0$ dieses Büschels der Pol $P(\beta_1 - \alpha_1|\beta_2 - \alpha_2)$.
(2) Ist $A_{33} = 0$, so hat jede parabolisch zerfallende K_2 gemäß (2.36) eine Gleichung der Form

$$K_2 = (ax + by + c)^2 - C^2 = g^2 - C^2 = 0$$

wobei die Doppelgeraden durch $C = 0$ erfaßt werden.
Ist P ein beliebiger Punkt, so hat seine Polare (Separation) die Gleichung $p = g(P)g - C^2 = 0$. Ist speziell $g(P) \neq 0$, so folgt $p = g - k = 0$. Dann ist die Polare nach Aufgabe 3.99 der Achse h parallel oder fällt mit ihr

zusammen (wenn $C = 0$, d.h. $k = 0$).
Umgekehrt existiert daher bei $C \neq 0$ zu jeder achsenparallelen Geraden, bei $C = 0$ zur Gerade $g = 0$ sicher ein Pol (es gibt sogar unendlich viele).

Aufgabe 3.109. *a*) $(-\frac{a^2A}{C}| - \frac{b^2A}{C})$, $C = 0$ kann nicht vorkommen.
b) $(\frac{C}{A}| - \frac{pB}{A})$, $A = 0$ ist unmöglich.

Aufgabe 3.110. Nach Multiplikation der drei Zeilen von (3.56) mit x_0 bzw. y_0 und 1 entsteht durch die anschließende Addition der drei Zeilen auf der linken Seite $qK_2(P_0)$, während die rechte Seite $p(P_0)$ ergibt. Daraus folgt die Behauptung.

Aufgabe 3.111. *a*) $145u^2 + 148uv + 36v^2 + 48u + 32vw = 0$
b) Ja, $P_0(3|1)$

Aufgabe 3.112. *a*) $a^2A^2 + b^2B^2 - C^2 = 0$
b) $2AC - pB^2 = 0$

Aufgabe 3.113. In Punktkoordinaten ist $M = (0|0)$ an $a_{13} = a_{23} = 0$, in Linienkoordinatenu an $A_{13} = A_{23} = 0$ erkennbar. In Linienkoordinaten haben die Gleichungen der parabolischen Typen kein Absolutglied $A_{33} = 0$. In Punktkoordinaten haben die K_2 kein Absolutglied $a_{33} = 0$, wenn der Ursprung auf der Kurve liegt.

Aufgabe 3.114. $w = 0$ ist notwendig und hinreichend, d.h. aus (2.2) oder wegen (2.29): $\bar{a}_{13}^2 + \bar{a}_{23}^2 + \bar{a}_{33} = 0$. Diese Relation ist aber nicht normierungsfrei, also ungeeignet.
a) Man entnimmt der Matrix (2.2) für den Fall $w = 0$ außerdem
$\bar{S}_{33} = (x_F^2 + y_F^2)(1 - \varepsilon^2)$ und $\bar{a}_{33}\bar{A}_{33} = -(x_F^2 + y_F^2)(1 - \varepsilon^2)$ und damit die zweite notwendige Relation: $\bar{S}_{33} + \bar{a}_{33}\bar{A}_{33} = 0$, die wieder nicht normierungsfrei ist. Jedoch gilt sie noch in der Gestalt $S_{33} + \bar{a}_{33}A_{33} = 0$. Nach der Ersetzung von $\bar{a}_{33}$ durch die Größen der ersten Relation folgt hieraus die normierungsfreie notwendige Bedingung für $w = 0$, nämlich

$$(*) \qquad (a_{13}^2 + a_{23}^2)S_{33} - a_{33}^2A_{33} = 0$$

b) (*) ist auch hinreichend für $w = 0$. Ist nämlich $w \neq 0$, so ist schon speziell $(\bar{a}_{13}^2 + \bar{a}_{23}^2)\bar{S}_{33} - \bar{a}_{33}^2\bar{A}_{33} \neq 0$; denn $-\varepsilon^4(\varepsilon^4 - \varepsilon^2 + 1) \neq 0$ ist nach (2.2) wegen $\bar{S}_{33} = \bar{s}_{33}\bar{a}_{33} - \bar{a}_{13}^2 - \bar{a}_{23}^2$ der Koeffizient von w^4.

Aufgabe 3.115. $(\bar{a}_{ik}) = \begin{pmatrix} \varepsilon^2u^2 - 1 & \varepsilon^2uv & \varepsilon^2uw \\ \varepsilon^2uv & \varepsilon^2v^2 - 1 & \varepsilon^2vw \\ \varepsilon^2uw & \varepsilon^2vw & \varepsilon^2w^2 \end{pmatrix}$

$(\bar{A}_{ik}) = \begin{pmatrix} -\varepsilon^2w^2 & 0 & \varepsilon^2uw \\ 0 & -\varepsilon^2w^2 & \varepsilon^2vw \\ \varepsilon^2uw & \varepsilon^2vw & 1 - \varepsilon^2 \end{pmatrix}$

Aufgabe 3.116. *a*) Ja, aber diese Einsicht kann erst durch § 4, Aufgabe 4.66 erlangt werden; K_2-Gleichungen $K_2 = -b^2(u^2 + v^2) + w(x_{F_2}u + y_{F_2}v + w) = 0$ und $-p(u^2 + v^2) + 2w(u_Lu + v_Lv) = 0$ beachten [1, Seiten 50–51]. Folgt für Parabeln schon aus § 3, Aufgabe 3.41 *a*).

b) Ja, weil $A_{11} = -1152 = A_{22}$ und $A_{12} = 0$

4. Lösungen zum vierten Paragraphen

Aufgabe 4.1. In einer K_1-(K_2-)Gleichung ist nach Definition einer der ersten zwei (drei) Koeffizienten von Null verschieden; dividiert man die Gleichung durch diesen, so bleiben zwei (fünf) unbekannte Koeffizienten, zu deren Bestimmung die Koordinaten von zwei (fünf) Punkten notwendig sind.

Aufgabe 4.2. Es gibt vier oder zwei reelle Schnittpunkte, die auch zusammenfallen können

(1) Ein vierfacher Berührpunkt, z.B. eine reguläre K_2 und einer ihrer Scheitelkrümmungskreise (siehe Abschnitt § 4.8.1) oder eine reguläre K_2 und die Schmiegeparabel eines ihrer Punkte (siehe Beispiel 4.2).
(2) Ein dreifacher Berührpunkt und ein einfacher Schnittpunkt, z.B. eine reguläre K_2 und ihr Krümmungskreis in einem Nichtscheitel (siehe Abschnitt § 4.8.2).
(3) Zwei verschiedene zweifache Berührungspunkte, z.B. eine stumpfe und eine zweite Hyperbel mit gemeinsamen Asymptoten. Die „unendlich fernen“ Berührungspunkte dieser Asymptoten sind je doppelzählig.
(4) Ein zweifacher Berührpunkt und zwei einfache verschiedene Schnittpunkte, z.B. zwei sich schneidende Ellipsen mit gemeinsamem Nebenscheitel und gemeinsamer Nebenscheiteltangente.
(5) Ein zweifacher Berührpunkt, z.B. zwei sich von außen berührende Kreise.

Aufgabe 4.3. Ist $a'_{11} = a''_{11}$, $a'_{12} = a''_{12}$ und $a'_{22} = a''_{22}$, so liefert $\kappa = -1$ in (4.1) wegen (4.2) keine K_2.

Aufgabe 4.4. Liegen drei der Grundpunkte auf einer Geraden h_1, so zerfällt die K_2 (4.1) in zwei Geraden $K_2 = h_1 h_2 = 0$, wobei h_2 die Verbindungsgerade der beiden anderen Grundpunkte ist. Das gilt auch, wenn noch der vierte Grundpunkt mit h_1 inzidiert. Liegen alle fünf Punkte auf einer Geraden h_1, so ist $K_2 = h_1^2 = 0$.

Aufgabe 4.5. $K_2 = 4x^2 - xy + ty^2 + 23x - 16y + 9 = 0$

Aufgabe 4.6. $K_2 = 9x^2 + 63xy + 18y^2 - 45x + 117y - 126 = 0$

Aufgabe 4.7. $K_2 = 8x^2 - 2xy + 32y^2 - 16x + 2y - 300 = 0$

Aufgabe 4.8. $K_2 = 3x^2 - 4xy + 6y^2 - x - 4y - 28 = 0$, Ellipse, $M(\frac{1}{2}|\frac{1}{2})$, $h = 2x - 4y + 1 = 0$, $n = 4x + 2y - 3 = 0$

Aufgabe 4.9. $K_2 = 3x^2 - 2xy + 3y^2 - 30x - 30y + 63 = 0$, Ellipse, $M(\frac{15}{2}|\frac{51}{2})$, $h = x - y = 0$, $n = x + y - 15 = 0$, $F_1(3|3)$, $F_2(12|12)$, $\ell_1 = x + y + 3 = 0$, $\ell_2 = x + y - 34 = 0$

Aufgabe 4.10. $s_{33} = 0$ liefert $\kappa = -3$, $K_2 = 8x^2 + 9xy - 8y^2 + 13x + 56y - 48 = 0$

Aufgabe 4.11. $s_{33} = 0$ liefert $\kappa = -\frac{7}{37}$, $K_2 = x^2 + 7xy - y^2 - 5x + 19y - 14 = 0$

Aufgabe 4.12. $A_{33} = 0$ liefert $\kappa = -10 \pm 4\sqrt{6}$, $K_2 = 16x^2 \pm 8\sqrt{6}xy + 6y^2 - 32x - 12y - 48 = 0$, Parabeln

Aufgabe 4.13. (1) $\kappa_1 = -4$, $K_2 = x^2 + 2xy + y^2 - 4x + 4y - 12 = 0$, Parabel, $p = \sqrt{2}$, $F(-1|^)$, $S(-\frac{3}{2}|\frac{3}{2})$, $\ell = x - y + 4 = 0$
(2) $\kappa_2 = -16$, $K_2 = x^2 - 2xy + y^2 - 4x + 4y - 12 = 0 = (x - y - 6)(x - y + 2) = 0$

Bemerkung zum Beispiel 4.2

Die Gleichung der Schmiegeparabel K_2^P folgt mit dem Ansatz $K_2^P = K_2 + \kappa t^2 = 0$ aus $A_{33} = 0$; $\kappa = -2$. Umgekehrt ist die gegebene K_2 im selben Büschel $K_2 = K_2^P + \kappa t^2 = 0$ (Wechsel der Erzeugenden) enthalten und jetzt durch $a_{12} = 0$ bestimmt, da die Hyperbel durch die Eigenschaft der Parallelität ihrer Hauptachse mit der x-Achse gekennzeichnet ist (vier Punkte mit Zusatzbedingung); $\kappa = -2$.

Aufgabe 4.14. $g_{12} = y = 0$, $g_{13} = 7x + 3y - 7 = 0$, $g_{34} = x = 0$, $g_{24} = 3x + 7y - 7 = 0$. Damit $s_{33} < 0$ gewählt werden kann, Ansatz jetzt: $K_2 = \kappa g_{12} g_{34} + g_{13} g_{24} = 0$; $s_{33} = -84$, $A_{33} = -\kappa^2 - 116\kappa - 1600 = -(\kappa + 16)(\kappa + 100) \neq 0$

(1) $\lambda_1 = 16 + \kappa$, $\lambda_2 = -100 - \kappa$, (2.21) liefert $\kappa = -44$, $K_2 = -3x^2 - 2xy - 3y^2 + 10x + 10y - 7 = 0$, $M(\frac{5}{4}|\frac{5}{4})$, $a = \frac{1}{2}\sqrt{11}$, $b = \frac{1}{4}\sqrt{22}$, $h = 2x + 2y - 5 = 0$, $n = x - y = 0$

(2) $\lambda_1 = -100 - \kappa$, $\lambda_2 = 16 + \kappa$, (2.21) liefert $\kappa = -72$, $K_2 = -3x^2 + 2xy - 3y^2 + 10x + 10y - 7 = 0$, $M(\frac{5}{2}|\frac{5}{2})$, $a = 3$, $b = \frac{3}{2}\sqrt{2}$, $h = x - y = 0$, $n = x + y - 5 = 0$

Aufgabe 4.15. *a*) Ansatz (4.3), sonst tritt κ in s_{33} nicht auf; $s_{33} = 0$ liefert $\kappa = 0$. Es ist also bereits $K_2 = xy = 0$ die gleichseitige Hyperbel (zerfallende K_2), und die Aufgabe belehrt, dass grundsätzlich – analog bei anderen Forderungen – nur rechtwinklige hyperbolischer *Typ* erreicht werden kann.
b) Ansatz wie bei Aufgabe 4.14; $A_{33} = 0$ liefert $\kappa_1 = -16$ und $\kappa_2 = -100$, $K_2 = -3x^2 \mp 6xy - 3y^2 + 10x + 10y - 7 = 0$
c) In der Büschelgleichung, z.B. (4.3), ist κ bereits durch die Erfüllung einer der beiden Kreisbedingungen – z.B. $a_{12} = 0$ – festgelegt. Nur in Sonderfällen ist dann die andere – also $a_{11} = a_{22}$ – von selbst erfüllt.
Ansatz wie bei Aufgabe 4.14. Hier liegt, da $a_{11} = a_{22}$ von selbst erfüllt ist, ein Sonderfall vor. Mit $\kappa = -58$ ist die zweite Kreisbedingung $a_{12} = 0$ erfüllt. $K_2 = 3x^2 + 3y^2 - 10x - 10y + 7 = 0$.

Aufgabe 4.16. Nur P_3 liegt nicht auf der Erzeugenden.

Aufgabe 4.17. $K_2 = 70x^2 + 51xy + 29y^2 - 543x - 221y + 902 = 0$

Aufgabe 4.18. $K_2 = x^2 - 2xy - y = 0$ und $K_2 = 3x^2 - 12xy + 12y^2 - 6x - 3y = 0$

Aufgabe 4.19. $K_2 = x^2 - 60xy - y^2 - 242x + 108y + 565 = 0$

Aufgabe 4.20. (4.5) hat als Grundpunkte die doppelt gezählten beiden Berührpunkte. $K_2 = 6x^2 - 25xy + 36y^2 + 50x - 163y + 176 = 0$

Aufgabe 4.21. *a*) $K_2 = 4x^2 - 12xy - 3y^2 - 14x + 16y + 6 = 0$
b) $M(1|3)$ *c*) $a_1a_2 = 4x^2 + 2xy - 3y^2 - 14x + 16y - 17 = 0$;
$4a_1a_2 = (4x + (1 + \sqrt{13})y - 7 - 3\sqrt{13})(4x + (1 - \sqrt{13}y) - 7 + 3\sqrt{13}) = 0$

Aufgabe 4.22. *a*) $K_2 = 4x^2 - 12xy + 9y^2 + 48x + 72y - 432 = 0$
b) $F(\frac{54}{13}|\frac{16}{13})$ *c*) $h = 26x - 39y - 60 = 0$

Aufgabe 4.23. *a*) $t_1 = t_L = x + 6 = 0$, $t_2 = 3x - 2y - 30 = 0$, $p_0 = y = 0$, $A_{31} = 6(1 + \kappa)$, $A_{32} = 24$, $A_{33} = 3\kappa - 1$ (3.13) liefert $\kappa = 3$,
$K_2 = -3x^2 + 2xy - 3y^2 + 12x + 12y + 180 = 0$
b) $h = x - y = 0$, $n = x + y - 6 = 0$, $a = 6\sqrt{3}$, $b = 3\sqrt{3}$

Aufgabe 4.24. *a*) $K_2 = x^2 + 2xy - y^2 - 14x + 10y - 15 = 0$,
b) $a_1a_2 = x^2 + 2xy - y^2 - 14x + 10y - 23 =$
$= (x + (1 - \sqrt{2})y - 7 + 6\sqrt{2})(x + (1 + \sqrt{2})y - 7 - 6\sqrt{2}) = 0$,
c) $h = (1 + \sqrt{2})x + y - 7 - \sqrt{2} = 0$, $n = x - (1 + \sqrt{2})y + 5 + 6\sqrt{2} = 0$,

Aufgabe 4.25. *a*) (3.9) mit $A > 0$ beachten, $K_2 = 3x^2 - 2\sqrt{3}xy + 5y^2 - 32y = 0$
b) $2a = 8\sqrt{2}$, $2b = \frac{8}{3}\sqrt{6}$, $h = 3x - 3\sqrt{3}y + 8\sqrt{3} = 0$, $n = \sqrt{3}x + y - 8 = 0$
c) $\ell_{1,2} = \sqrt{3}x + y - 8 \pm 8\sqrt{3} = 0$

Aufgabe 4.26. *a*) (3.1) und $A > 0$ beachten, $K_2 = -3x^2 - 10xy - 3y^2 + 24x = 0$
b) $M(-\frac{9}{4}|\frac{15}{4})$
c) $h = 2x + 2y - 3 = 0$, $n = x - y + 6 = 0$
d) $a_1a_2 = -3x^2 - 10xy - 3y^2 + 24x + 27 = 0$, $a_1 = 3x + y + 3 = 0$, $a_2 = x + 3y - 9 = 0$

Aufgabe 4.27. *a*) $t_1t_2 = xy + x - 6y - 6 = (x - 6)(y + 1) = 0$
b) $t_1t_2 = x^2 + 8xy - y^2 + 6x - 44y - 59 = (x + (4 - \sqrt{17})y + (3 - 2\sqrt{17})(x + (4 + \sqrt{17})y + (3 + 2\sqrt{17})) = 0$

Aufgabe 4.28. $t_1t_2 = 2x^2+5xy+2y^2-6x+6y-36 = (x+2y-6)(2x+y+6) = 0$, $B_1(6|0)$, $B_2(0|-6)$

Aufgabe 4.29. *a*) $p_0 \equiv g_3$, $K_2(0|0) = a_{33}$
b) $t_1t_2 = 2x^2+7xy+y^2 = 0$, $t_{1,2} = (7 \pm \sqrt{41})x + 2y = 0$

Aufgabe 4.30. *a*) $t_1t_2 \equiv a_1a_2 = -11x^2+26xy-11y^2 = 0$, $K_2 = a_1a_2 + k$ liefert mit $M(2|2)$: $k = -16$, $K_2 = -11x^2+26xy-11y^2-16 = 0$ *b*) $h = x - y = 0$, $n = x + y = 0$
c) $S_1(2|2)$, $S_2(-2|-2)$

Aufgabe 4.31. (4.5) gilt auch für parallele Tangenten; die Grundpunkte sind die doppelt gezählten Berührpunkte. Daher muss $t_1t_2 = K_2 - \kappa p_0^2 = 0$ sein oder mit $\kappa = 1/\mu$, $t_1t_2 = p_0^2 - \mu K_2 = 0$, sodass „$K_2(P_0)$"$= \mu$ ist.

Aufgabe 4.32. Bei der Hyperbel ist wegen $a < 0$: $a^2+b^2 = a^2+ap = a(a+p) = R^2 \gtreqless 0$ für $p \lesseqgtr -a$, woraus nach der vor der Tabelle 1 stehenden Bemerkung die Behauptung folgt.

Aufgabe 4.33. *a*) Aus (3.5) und (3.6) folgt wegen(2.23) und (2.24) $a^2+b^2 = \dfrac{s_{33}A}{A_{33}^2}$, sodass sich mit (3.13) die angegebene Gleichung für den orthoptischen Kreis ergibt.
b) $K_2 = 36x^2+36y^2-54x+36y-65 = 0$

Aufgabe 4.34. *a*) Der angegebene Kreis hat $M(3|-2)$ und $R^2 = a^2+b^2 = 34$, woraus mit $ab = 15$ folgt: $a^2 = 25$, $b^2 = 9$. $\overline{S_1M}$ liefert die Hauptachse $h = 4x+3y-6 = 0$, woraus sich $n = 3x-4y-17 = 0$ ergibt. Mit (1.15) wird $K_2 = 481x^2+384xy+369y^2-2118x+324y-2124 = 0$
b) $S_2(6|-6)$,
c) $F_1(\frac{3}{5}|\frac{6}{5})$, $F_2(\frac{27}{5}|-\frac{26}{5})$
d) $\ell_1 = 12x-16y+57 = 0$, $\ell_2 = 12x-16y+193 = 0$

Aufgabe 4.35. Für die Parabel $y^2-2px = 0$ ist $p_0 = yy_0 - p(x+x_0) = 0$. Aus (4.6) folgt $2px_0y^2 + p^2x^2 + \cdots = 0$, sodass $s_{33} = 0$: $x_0 = -\frac{p}{2}$ liefert und P_0 in der tat stets auf der Leitgeraden liegt.

Aufgabe 4.36. $\dfrac{1}{m_h} - m_h = \dfrac{u}{v} - \dfrac{v}{u} = \dfrac{\varepsilon^2u^2 - \varepsilon^2v^2}{\varepsilon^2uv} = \dfrac{(\bar{a}_{11}+1)-(\bar{a}_{22}+1)}{\bar{a}_{12}} = \dfrac{\bar{a}_{11}-\bar{a}_{22}}{\bar{a}_{12}} = \dfrac{a_{11}-a_{22}}{a_{12}}$

Aufgabe 4.37. (4.3) liefert mit der Lösung von Aufgabe 4.36 $\kappa = -\frac{1}{9}$, $K_2 = 4x^2-4xy+y^2-29x+22y+42 = 0$

Aufgabe 4.38. *a*) Aus $m_h = 1$ folgt $a_{22} = a_{11}$,
$K_2 = -5x^2+6xy-5y^2-8x+24y+48 = 0$
b) $e = \sqrt{30}$, $\varepsilon = \frac{1}{2}\sqrt{3}$
c) $a = 2\sqrt{10}$, $b = \sqrt{10}$
d) $h = x-y+2 = 0$, $n = x+y-4 = 0$

Aufgabe 4.39. Satz von Pascal:
Bei jedem einer K_2 einbeschriebenem Sechseck $(P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6)$ schneiden sich die drei Gegenseitenpaare g_{12} und g_{45} bzw. g_{23} und g_{56} bzw. g_{34} und g_{61} in drei Punkten S_1 bzw. S_2 bzw. S_3 einer Geraden, die die Pascalsche Gerade des Sechsecks heißt.

Aufgabe 4.40. Zum Beweis:
a) Die K_2' zerfällt in die Gerade $g_{25} = 0$ und $g = \kappa_1 g_{34} - \kappa_3 g_{16} = 0$
b) S_1 anuliert g_{12} und g_{45}, also auch K_2'; S_2 anuliert g_{23} und g_{56}, also auch K_2'.

c) S_3 anulliert g_{34} und g_{16}, d.h. S_3 liegt auf g.
d) Es ist noch nicht gezeigt, dass S_1 und S_2 mit g – und nicht mit g_{25} – inzidieren.
e) S_1 und S_2 können nicht auf g_{25} liegen, denn z.B. schneiden sich g_{56} und g_{25} in P_5 bzw. g_{12} und g_{25} in P_2. Die verschiedenen Geraden g_{56} und g_{16} können sich aber nur in einem Punkt schneiden und nicht in den verschiedenen Punkten P_2 und P_5.

Aufgabe 4.41. Rein geometrisch sind die drei Gegenseitenschnittpunkte S_1, S_2, S_3 offensichtlich durch das gegebene Sechseck eindeutig festgelegt. Es ist anschaulich das Inzidieren mit einer Geraden nicht erkennbar, gegebenenfalls aber die Eindeutigkeit einer solchen Geraden. Rein algebraisch – ohne die Einzelschritte noch einmal zu wiederholen – kann der K_2 mit ihrem festen Sechseck auf drei Weisen eine zerfallende K_2 zugeordnet werden, weil genau eine Gerade der letzteren durch ein Gegenpunktpaar des Sechsecks gebildet wird. Die andere Gerade der zerfallenden K_2 gehört dem Büschel mit einem Grundpunkt an, der ein S_i ist. Hier entsteht die Einsicht, dass, wenn man beweisen kann, ein zweites S_j liegt auf der Büschelgeraden, diese Aussage deshalb für das dritte S_k richtig ist, weil es vor S_j nicht ausgezeichnet ist. Die Probleme sind verschieden!

Zu [1, Abbildung 21]:
Der Kreis um P_1 mit r_1 schneidet GF in F'. Die Parallele zu P_1F' durch F schneidet s in P_2, denn es ist $\dfrac{r_2}{d_2} = \dfrac{r_1}{d_1} = \varepsilon$. Bewegt sich F' auf dem Kreisbogen bis F, so wandert P_2 bis P_1, d.h. s dreht sich um P_1 bis in die Stellung der Tangente in P_1. $P'F$ ist dann Tangente des Kreises, d.h.

$$\angle P'FP_1 = \frac{\pi}{2};\ \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{r_1}{P_1P'}\Big/\frac{d_1}{P_1P'} = \frac{r_1}{d_1} = \varepsilon$$

Aufgabe 4.42. $K_S = (1-\varepsilon^2)x^2 + y^2 - 2px + \varepsilon^2x^2 = (x-p)^2 + y^2 - p^2 = 0$, d.h. $M(p|0)$, $\rho_S = p$.

Aufgabe 4.43. $K_2 = b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$, $t_N = y - b = 0$, $K_N = K_2 + \kappa t_N^2 = 0$; $a_{12} = 0$ ist von selbst erfüllt, $a_{11} = a_{22}$ liefert $\kappa = b^2 - a^2$. Damit wird $K_N = x^2 + (y - \frac{b^2-a^2}{b})^2 - (\frac{a^2}{b})^2 = 0$, d.h. $\rho_N = \frac{a^2}{b}$; aus (3.5) und (3.6) folgt $\rho_N = \sqrt{\dfrac{A}{(-\lambda_1)^3}}$.

Aufgabe 4.44. $M(1|1)$, $a = 6\sqrt{2}$, $b = 2\sqrt{2}$, $\mathfrak{n} = \frac{\mathfrak{i}+\mathfrak{j}}{\sqrt{2}}$, $\mathfrak{r}_{S_1} = \mathfrak{r}_M - a\mathfrak{n}$ gibt $S_1(-5|-5)$; $\mathfrak{r}_{N_1} = \mathfrak{r}_M + b\mathfrak{k} \times \mathfrak{n}$ liefert $N_1(-1|3)$;

Aufgabe 4.45. *a*) Wenn κ vor K_2 steht, ergeben die Kreisbedingungen zwei *lineare* Gleichungen für κ und m_s.
b) Aus (4.11) folgt mit der ersten Formel (3.48):
$K = (a_{11}\kappa - g_1(B)m_s)x^2 + (2a_{12}\kappa - g_2(B)m_s + g_1(B))xy + (a_{22}\kappa + g_2(B))y^2 + \cdots = 0$.
Die Kreisbedingungen liefern das Gleichungssystem

$$(**)\qquad \begin{aligned} (a_{11} - a_{22})\kappa - g_1(B)m_s &= g_2(B) \\ 2a_{12}\kappa - g_2(B)m_s &= -g_1(B) \end{aligned}$$

bzw., falls die K_2 ein Kreis ist,

$$\begin{aligned} g_1(B)m_s &= -g_2(B) \\ g_2(B)m_s &= g_1(B) \end{aligned}$$

Das letzte spezielle System enthält einen Widerspruch, da wegen $g_1^2(B) + g_2^2(B) \neq 0$ unlösbar. Dies ist deshalb interessant, weil es andererseits den Krümmungskreis gibt, nämlich den gegebenen Kreis selbst. Der Widerspruch zwischen Unlösbarkeit einerseits und Existenz andererseits liegt schon im Ansatz: ein K_2-Büschel enthält nur in Sonderfällen einen Kreis; enthält es sogar zwei Kreise K_2' und K_2'', so besteht das ganze Büschel aus Kreisen. Nimmt man K_2' und K_2'' als Erzeugende in (4.1), so folgt aus (4.2) nämlich wegen $a'_{11} = a'_{22}$, $a_{12'} = 0$ und $a''_{11} = a''_{22}$, $a''_{12} = 0$ sofort $a_{11} = a_{22}$ und $a_{12} = 0$. Würde man also den gesuchten Krümmungskreis noch einmal als mit dem gegebenen identisch im Büschel kombinieren können, so bestünde das Büschel aus lauter Kreisen und könnte *nicht* die als Erzeugende verwendete zerfallende K_2 enthalten. Der *Ansatz* kann daher den existierenden Krümmungskreis *nicht* liefern.

Im allgemeinen Fall liefert der Ansatz (4.11) über (∗∗) den Krümmungskreis, wenn bei der Anwendung der CRAMERschen Regel auf (∗∗) die Nennerdeterminante $D = \begin{vmatrix} a_{11} - a_{22} & -g_1(B) \\ 2a_{12} & -g_2(B) \end{vmatrix} \neq 0$ ist.

Wann tritt der Fall $D = 0$ ein?

(1) Ist $a_{22} - a_{11} = 0$, so darf $a_{12} \neq 0$ angenommen werden, weil der Kreis bereits erledigt ist. Dann verschwindet D für $g_1(B) = 0$, d.h. es gilt $B \equiv H$ oder $B \equiv T$ und (∗∗) ist unlösbar. Die erste Gleichung $0 = g_2(B)$ ist nämlich im Widerspruch zu $g_2(B) \neq 0$.

(2) Ist $a_{12} = 0$, so ist $a_{22} - a_{11} \neq 0$ anzunehmen. Dann wird D durch $g_2(B) = 0$ annulliert, d.h. es ist $B \equiv L$ oder $B \equiv R$; (∗∗) ist wieder unlösbar, weil nun die zweite Gleichung $0 = g_1(B)$ im Widerspruch zu $g_1(B) \neq 0$ steht.

(3) Ist schließlich $a_{22} - a_{11} \neq 0 \neq a_{12}$, so verschwindet D für $g_1(B) \neq 0 \neq g_2(B)$, weil $g_1(B) = 0$ auch $g_2(B) = 0$ nach sich zieht und umgekehrt, was nicht möglich ist. (Die Fälle $g_1 \equiv 0, g_2(B) = 0$ bzw. $g_1(B) = 0, g_2 \equiv 0$ bedeuten $A = 0$, und hier wird eine reguläre K_2 betrachtet). Wieder ist (∗∗) für $D = 0$ unlösbar. Multipliziert man nämlich die erste Gleichung mit $-g_2(B)$ und die zweite mit $g_1(B)$, so folgt nach Addition der Widerspruch $0 = g_1(B)^2 + g_2^2(B)$. Hier wird nach Aufgabe 4.36 und (3.52) $D = 0$ für

$$m_t = \frac{1}{2}(m_h - \frac{1}{m_h}) \qquad (\dagger)$$

Die Fälle (1) und (2) sind in dieser Bedingung enthalten.

Zusammenfassung: Erfüllt B die Bedingung (†), so versagt die Büschelmethode gemäß (4.11) bei der Bestimmung des Krümmungskreises in B; das gilt auch speziell, wenn B einer der Punkte H, T, L oder R gemäß Fall (1) oder (2) ist.

Bei vierpunktiger Berührung des Krümmungskreises, also in K_2-Scheiteln, verliert der Ansatz (4.11) seinen Sinn, da er dreipunktige Berührung voraussetzt. Diese Fälle sind nach (4.10) bzw. mittels des Ansatzes

$$K_N = K_2 + \kappa t_N^2 = 0$$

(siehe Aufgabe 4.43) zu behandeln.

Will man auch die obigen Fälle $B = H, T, L, R$ der Büschelmethode erschließen, so kann man zunächst den Krümmungskreis K' im Spiegelpunkt B' von B bezüglich der Hauptachse mittels (4.11) bestimmen und danach K' an der Hauptachse in den gesuchten Kreis K spiegeln. Dasselbe gilt, wenn B (†) erfüllt.

Aufgabe 4.46. $t = 4x+y-6 = 0$, $s = y-2-m_s(x-1) = 0$; die Kreisbedingungen bei (4.11) liefern $\kappa = -\frac{17}{4}$ und $m_s = -\frac{9}{2}$, $K = 21x^2+21y^2-178x-118y+309 = 0$.

Aufgabe 4.47. $K = (x-2)^2 + (y-1)^2 - 25 = 0$

Aufgabe 4.48. (4.11) liefert mit $K_2 = (1-\varepsilon^2)x^2 + y^2 - 2px = 0$ aus $a_{12} = 0$ $m_s = -m_t$, woraus die Behauptung folgt.

Aufgabe 4.49. $t = y-2 = 0$, $s = m_sx-y-2m_s+2 = 0$, Ansatz: $K_2 = \kappa K_2+ts = 0$; P_2 liefert $\kappa = m_s - 1$, P_3: $m_2 = -\frac{1}{5}$, $K_2 = 6x^2 + xy + 11y^2 - 26x - 10y = 0$

Aufgabe 4.50. Ansatz $K_2 = \kappa K_2 + t_1 s = 0$ mit $t_1 = x + 2y - 5 = 0$ und $s = m_s x - y + 2 = 0$; B_2 liefert $m_s = \frac{\kappa+3}{3}$. Die Tangente in B_2 hat jetzt die Gleichung $t_2 = (7\kappa+9)x + (2\kappa-9)y + 7\kappa + 9 = 0$. Der Vergleich ihrer Steigung mit m_{t_2} gibt $\frac{7\kappa+9}{2\kappa-9} = 1$, also $\kappa = -\frac{18}{5}$, $K_2 = 19x^2 + 7xy + 28y^2 - 16x - 47y - 35 = 0$

Aufgabe 4.51. Nach (4.10) ist $K_2 = K_S - \varepsilon^2 t_S^2 = 0$ mit t_S in HESSEform, $K_S = x^2 + y^2 + \cdots = 0$.
a) $\varepsilon = 1$, $K_2 = x^2 + 4xy + 4y^2 + 18x - 14y + 81 = 0$, $p = \sqrt{5}$, $h = x + 2y - 1 = 0$, $\ell = 4x - 2y + 11 = 0$, $F(-4|\frac{5}{2})$, $S(-3|2)$;
b) $\varepsilon = \sqrt{2}$, $K_2 = 3x^2 - 8xy - 3y^2 + 14x - 2y - 17 = 0$, $p = \sqrt{5}$, $M(-1|1)$, $a = -\sqrt{5}$, $b = \sqrt{-5}$, $e = -\sqrt{10}$, $F_{1,2}(-1 \pm 2\sqrt{2}|1 \mp \sqrt{2})$, $S_1(-3|2)$, $S_2(1|0)$, $h = x + 2y - 1 = 0$, $n = 2x - y + 3 = 0$, $\ell_{1,2} = 4x - 2y + 6 \mp 5\sqrt{2} = 0$, $a_1 a_2 = 3x^2 - 8xy - 3y^2 + 14x - 2y + 8 = (x - 3y + 4)(3x + y + 2) = 0$, $f = \frac{1}{2}\sqrt{10}$

Aufgabe 4.52. $w_L = p/\varepsilon = f > 0$ ist der Abstand der Leitgeraden von $F(0|0)$. Daher ist $(\bar{A}_{ik}) = \begin{pmatrix} -p^2 & 0 & \varepsilon u_L p \\ 0 & -p^2 & \varepsilon v_L p \\ \varepsilon u_L p & \varepsilon v_L p & 1-\varepsilon^2 \end{pmatrix}$. Wegen (1.10) ist $b^2 = \frac{p^2}{1-\varepsilon^2}$, und aus (1.6) und (1.11) folgt $e = \dfrac{\varepsilon p}{1-\varepsilon^2}$. Daher gilt

$$\frac{1}{1-\varepsilon^2}(\bar{A}_{ik}) = \left(\frac{1}{1-\varepsilon^2}\bar{A}_{ik}\right) = \begin{pmatrix} -b^2 & 0 & eu_L \\ 0 & -b^2 & ev_L \\ eu_L & ev_L & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4.53. Aus (3.13) folgt daher $M(eu_L|ev_L) \equiv M(\frac{x_{F_1}+x_{F_2}}{2}|\frac{y_{F_1}+y_{F_2}}{2}) \equiv M(\frac{x_{F_2}}{2}|\frac{y_{F_2}}{2})$, woraus die Behauptung abzulesen ist. Dann ist $\frac{1}{1-\varepsilon^2}(\bar{A}_{ik}) =$
$= \begin{pmatrix} -b^2 & 0 & \frac{x_{F_2}}{2} \\ 0 & -b^2 & \frac{y_{F_2}}{2} \\ \frac{x_{F_2}}{2} & \frac{y_{F_2}}{2} & 1 \end{pmatrix}$, womit die angegebene K_2-Gleichung in Linienkoordinaten folgt.

Aufgabe 4.54. $K_2 = 47u^2 + 220uv + 113v^2 + 72uw + 96vw + 16w^2 = 0$

Aufgabe 4.55. $K_2 = 10u^2 + 16uv + 21v^2 + 8uw + 10vw + w^2 = 0$

Aufgabe 4.56. $K_2 = 222u^2 + 675uv + 422v^2 + 175uw + 225vw + 25w^2 = 0$

Aufgabe 4.57. Die im Anschluß an den Text der Aufgabe 4.56 angegebene Gleichung

$$-\frac{p}{2}(u^2+v^2) + w(u_L u + v_L v) = 0$$

gestattet nach Division durch $u^2 + v^2 = \sqrt{u^2+v^2}\sqrt{u^2+v^2}$ wegen $u_L^2 + v_L^2 = 1$ die folgende koordinatenfreie, also bewegungsinvariante Interpretation:
Für *jede* Parabeltangente $t = ux + vy + w = 0$ gilt:

$$\begin{pmatrix}\text{Abstand Parabelfokus} \\ \text{von der Tangente}\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}\text{Skalarprodukt aus orientiertem Achseneinheits-} \\ \text{und Normaleneinheitsvektor der Tangente}\end{pmatrix} = \frac{p}{2}$$

Für beliebige Lage von F zum Koordinatensystem ist nun

(1) der Abstand des Parabelfokus von der Tangente gleich

$$\frac{x_F u + y_F v + w}{\sqrt{u^2+v^2}}$$

(2) das Skalarprodukt aus dem Normaleneinheitsvektor der Tangente und dem orientierten Achseneinheitsvektor gleich

$$\frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}} \cdot \cos\varphi + \frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}} \cdot \sin\varphi$$

Mit diesen Ausdrücken für (1) und (2) entsteht aus der obigen Parabelgleichung die zu beweisende Gleichung (4.14).

Aufgabe 4.58. Aus der in Aufgabe 4.57 bewiesenen Parabelgleichung (4.14)

$$-\frac{p}{2}(u^2+v^2)+(x_F u+y_F v+w)(u\cos\varphi+v\sin\varphi)=0$$

erhält man mit dem zum zweiten Quadranten zeigenden Achseneinheitsvektor $\cos\varphi$ß+ $\sin\varphi$æ $= -\frac{1}{2}\sqrt{2}$ß $+ \frac{1}{2}\sqrt{2}$æ die Gleichung

$$K_2 = 5u^2+uv+2v^2+uw-vw=0$$

während man mit dem zum vierten Quadranten weisenden Achseneinheitsvektor $\cos\varphi$ß $+ \sin\varphi$æ $= \frac{1}{2}\sqrt{2}$ß $- \frac{1}{2}\sqrt{2}$æ die Gleichung

$$K_2 = 3u^2-uv+6v^2-uw+vw=0$$

erhält. Mit (1.18) erhält man übrigens auch die zugehörigen Gleichungen in Punktkoordinaten

$$K_2 = x^2+2xy+y^2+10x-22y-39=0$$
$$K_2 = x^2+2xy+y^2-22x+10y-71=0$$

Aufgabe 4.59. K geht offenbar durch die Ecken (Schnittpunkte von s_i und s_j). Die Kreisbedingungen $a_{11}=a_{22}$ und $a_{12}=0$ liefern zwei lineare Gleichungen für κ_1 und κ_2.

Aufgabe 4.60. $K=(x-2)^2+(y-1)^2-25=0$

Aufgabe 4.61. Nein. Zwar gilt, wie in Aufgabe 4.59, dass alle K_2 des Netzes durch die (reellen) Ecken (Schnittpunkte von s_i und s_j) gehen. Da aber die s_is_j jeweils als elliptisch zerfallende K_2 aus zwei konjugiert komplexen Geraden bestehen und, weil z.B. s_i zwei Mal auftritt, folgt $s_i=s_j$ (Widerspruch).

Aufgabe 4.62. Der Punkt P_0 besitzt bezüglich der $K_2=s_1^2+\kappa_1 s_2^2+\kappa_2 s_3^2=0$ die Polare (Separation) $p_0=s_1(P_0)s_1+\kappa_1 s_2(P_0)s_2+\kappa_2 s_3(P_0)s_3=0$. Ist z.B. $P_{12}\equiv P_3$ der Schnittpunkt von s_1 und s_2, so ist seine Polare wegen $s_1(P_3)=s_2(P_3)=0$: $p_3=\kappa_2 s_3(P_3)s_3=0$, d.h. p_3 fällt mit s_3 zusammen. Analog sind auch die anderen Ecken die Pole ihrer Gegenseiten.

Aufgabe 4.63. Mit $P_1\equiv A$, $P_2\equiv B$ und $P_3\equiv C$ wird $s_1=2x-y+2=0$, $s_2=14x-y-13=0$ und $s_3=x-2y+1=0$; (4.15) ergibt mit P $\kappa_2=-1-16\kappa_1$, sodass aus t (Separation) $m_t=\frac{1+24\kappa_1}{1+12\kappa_1}=\frac{1}{2}$, d.h. $\kappa_1=-\frac{1}{36}$ folgt; $\kappa_2=-\frac{5}{9}$; (4.15) liefert nun die angegebene Gleichung.

Hinweis:
Zur leicht einzusehenden Bemerkung vor (4.19): Die Koordinaten von $P(x_P|y_P)$ bzw. die Koeffizienten von $t=x_Px+y_Py+1=0$ befriedigen gleichzeitig die K_2- bzw. die K_2'-Gleichung (1.2) und (4.17) – oder sie tun es beide nicht.

Aufgabe 4.64. Beschreibt man die K_2 gemäß (3.59) in Linienkoordinaten und eine weitere K_2'' gemäß (4.20) in Punktkoordinaten, so befriedigen die Koeffizienten der Tangente $t=x_Px+y_Py+1=0$ und die Koordinaten des Punktes $P(x_P|y_P)$ gleichzeitig die K_2- bzw. die K_2''-Gleichung oder sie tun es beide nicht. Die geforderte Interpretation ist: Die K_2'' besteht aus allen Polen, deren Polaren bezüglich des nullteiligen Einheitskreises (4.18) die Tangenten der K_2 sind.

Aufgabe 4.65. Sei t eine Tangente und B der Berührpunkt der festen K_2. Sowohl t als auch B werden durch die Polarität am Einheitskreis $x^2+y^2+1=0$ abgebildet und zwar t auf P_t (einen Kurvenpunkt der K_2') und B auf t_B (eine Tangente der

K_2''). Da nach Abschnitt § 3.16.4 eine Inzidenzrelation bei Polaritäten erhalten bleibt, liegt wegen der Inzidenz von t und B der Kurvenpunkt P_t der K_2' auf der Tangente t_B der K_2''. Es fehlt die Einsicht, dass der Punkt P_t der K_2' auch der Berührpunkt der Tangente t_B der K_2'' ist. Wäre dies nicht der Fall, so gäbe es eine zweite Tangente der K_2'' durch P_t. Damit gäbe es zwei Punkte der gegebenen K_2, die wegen der sich fortsetzenden Inzidenzrelation beide auf t lägen (Widerspruch).

Aufgabe 4.66. Soll die Gleichung (4.20) der K_2'' in Punktkoordinaten jetzt in Linienkoordinaten beschrieben werden, so kann das einerseits durch Auswechselung der A_{ik} durch ihre algebraischen Komplemente in der Matrix (A_{ik}) geschehen. Weil aber andrerseits $K_2'' = K_2'$ ist, und die K_2' in Linienkoordinaten beschrieben ist, müssen diese algebraischen Komplemente (bis auf einen Proportionalitätsfaktor) die a_{ik} sein.

Nunmehr kann man die beiden in Aufgabe 4.58 anzugebenden Parabeln direkt – also ohne eine neue Lösung mittels (1.18) – in Punktkoordinaten überführen. Man überzeuge sich vom Überseinstimmen der Ergebnisse.

Aufgabe 4.67. Das Ergebnis über die Auswechselung von Punkt- und Linienkoordinaten unter Festlassen der Koeffizienten beweist schon die Behauptung. Es handelt sich lediglich um eine andere Formulierung.

Aufgabe 4.68. Die Gleichung $a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$ belehrt darüber, dass die Inzidenz der Geraden $g_1 = a_1x + b_1y + c_1 = 0$ mit dem Punkt $P_2(\frac{a_2}{c_2}|\frac{b_2}{c_2})$ und die Inzidenz der Geraden $g_2 = a_2x + b_2y + c_2 = 0$ mit dem Punkt $P_1(\frac{a_1}{c_1}|\frac{b_1}{c_1})$ gleichbedeutend sind.

Aufgabe 4.69. Bei jedem einer K_2 umbeschriebenen Sechseck (Tangentensechseck) gehen die Verbindungsgeraden der drei Gegenpunktepaare durch einen Punkt, den sogenannten Brianchon-Punkt.

Beispiel zu den Ortskurven:
Ein rechter Winkel rotiert um seinen Scheitel. Seine Schenkel schneiden zwei parallele Geraden. Welche Kurve wird von den Verbindungsgeraden der Schnittpunkte eingehüllt? Der Scheitel liege zwischen den Parallelen (Abbildung 9).

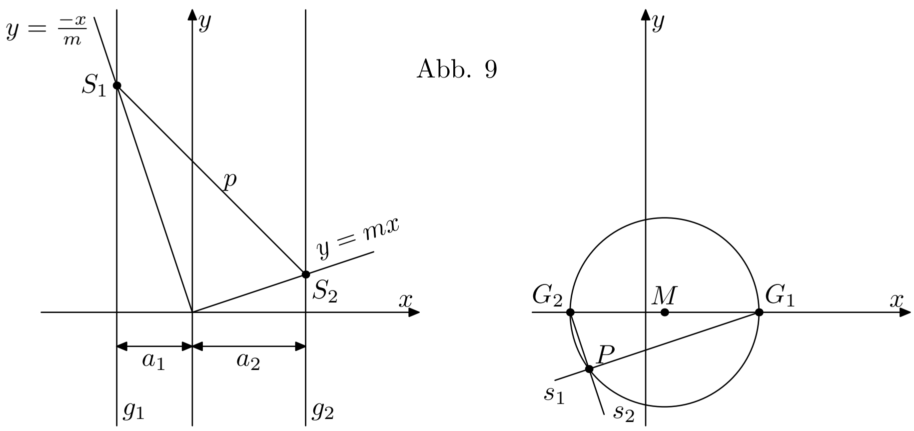


Abb. 9

Durch Dualisieren erhält man aus $S_1(-a_1|\frac{a_1}{m})$, $S_2(a_2|a_2m)$, $g_1 = \frac{1}{a_1}x + 1 = 0$, $g_2 = -\frac{1}{a_2}x + 1 = 0$ und p gemäß (4.19) die Daten für die rechte Figur:
$s_1 = -a_1x + \frac{a_1}{m}y + 1 = 0$, $s_2 = a_2x + a_2my + 1 = 0$, $G_1(\frac{1}{a_1}|0)$, $G_2(-\frac{1}{a_2}|0)$ und P.

Die Lösung des dualisierten Problems ist der Thaleskreis

$$K = 2a_1a_2(x^2 + y^2) - 2(a_2 - a_1)x - 2 = 0,$$

woraus bereits die Gleichung der gesuchten, durch p eingehüllten Kurve der linken Figur in Linienkoordinaten folgt:

$$K_2 = 2a_1a_2(u^2+v^2) - 2(a_2-a_1)uw - 2w^2 = 0.$$

Will man die K_2-Gleichung auch in Punktkoordinaten angeben, so hat man in der Gleichung des Thaleskreises die a_{ik} durch ihre algebraischen Komplemente A_{ik} zu ersetzen. Wegen $(a_{ik}) = \begin{pmatrix} 2a_1a_2 & 0 & a_1-a_2 \\ 0 & 2a_1a_2 & 0 \\ a_1-a_2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ wird

$(A_{ik}) = \begin{pmatrix} -4a_1a_2 & 0 & 2a_1a_2(a_2-a_1) \\ 0 & -(a_1+a_2)^2 & 0 \\ 2a_1a_2(a_2-a_1) & 0 & 4a_1^2a_2^2 \end{pmatrix}$, sodass

$$K_2 = \frac{(x+\frac{a_1-a_2}{2})^2}{(\frac{a_1+a_2}{2})^2} + \frac{y^2}{a_1a_2} - 1 = 0$$

Analog kann man alle auf Kreise führenden Ortsaufgaben durch Dualisieren in K_2-Aufgaben mit schwererer Problemstellung überführen.

Bemerkung zu den Ortskurven über K_2:

Das Dualisieren führt nur dann auf eine Kreisaufgabe, wenn man den Ursprung des Koordinatensystems in einen Brennpunkt der gegebenen K_2 legt.

Aufgabe 4.70. *a*) $p = ax+by+1 = 0$ und $P(a|b)$ sind ein Paar Pol und Polare bezüglich des nullteiligen Kreises $x^2+y^2+1=0$.

Die Polare zum Pol P bezüglich des Kreises $x^2+y^2-1=0$ ist $\bar{p} = ax+by-1=0$. Die Spiegelung von $\bar{p}$ am Ursprung liefert p. Der Pol zur Polaren p bezüglich des Kreises $x^2+y^2-1=0$ ist $\bar{P}(-a|-b)$. Der Spiegelpunkt zu $\bar{P}$ ist P.

b) Ja, denn offenbar kann die Spiegelung zuerst ausgeführt werden.