GUIDE SUR LA COHOMOLOGIE DES FAISCEAUX

BERNDT E. SCHWERDTFEGER

Résumé. "Yoga" de la cohomologie des faisceaux sur les espaces topologiques.

Préface

Lors du cours « Surfaces de Riemann compactes » de Giraud [3] un petit groupe d'étude a rédigé un guide sur la cohomologie des faisceaux qui contient en 20 pages plus qu'il ne faut pour la cohomologie des faisceaux sur des espaces topologiques généraux. Pendant la retranscription du cours de Giraud en TEX j'ai également préparé ce guide en TEX.

Berlin, 28 juin 2005 v1.1, 4 septembre 2024

1. Faisceaux sur des espaces topologiques

1.1. **Préfaisceaux et faisceaux.** Soit X un espace topologique quelconque.

Définition 1.1. *Un* préfaisceau $\mathcal{F}$ *d'ensembles sur* X *est la donnée pour tout ouvert* $U \subset X$ *d'un ensemble* $\mathcal{F}(U)$ *et pour tout couple d'ouverts* $V \subset U$ *d'une application* de restriction $\rho_V^U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$, *telles que (Godement* [4, I.1.9, p. 16]*):*

— *pour chaque ouvert* U : $\rho_U^U = id$

— *pour des ouverts* $W \subset V \subset U$: $\rho_W^V \circ \rho_V^U = \rho_W^U$ *(condition de transition)*

Un morphisme de préfaisceaux $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ *est la donnée pour tout ouvert* $U \subset X$ *d'applications* $\varphi(U) : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ *compatibles aux restrictions. On note* $\mathrm{Hom}_X(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ *cet ensemble.*

On a ainsi défini une catégorie de préfaisceaux.

Si on note X_{top} la catégorie des ensembles ouverts de X, avec pour morphismes les inclusions $V \subset U$, la catégorie des préfaisceaux peut s'interpréter comme la catégorie des *foncteurs contravariants* $\mathcal{F} : X_{top} \to \mathcal{S}ets$.

Par abus de langage les éléments $s \in \mathcal{F}(U)$ seront aussi appelé des *sections* et la restriction à un ouvert plus petit $V \subset U$ sera noté $s|V = \rho_V^U(s)$.

Définition 1.2. *Un* faisceau $\mathcal{F}$ *d'ensembles sur* X *est un préfaisceau qui satisfait de plus aux conditions suivantes (Godement* [4, II.1.1, p. 109]*):*

(1) Pour tout ouvert U *et tout recouvrement* $(U_i)_i$ *de* U *et deux éléments* $s', s'' \in \mathcal{F}(U)$ *tel que pour tout* i *on ait* $s'|U_i = s''|U_i$*, alors* $s' = s''$.

(2) Pour tout ouvert U *et tout recouvrement* $(U_i)_i$ *de* U *et une famille* $(s_i)_i$ *de sections* $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ *satisfaisant à la* condition de recollement

$$\forall\, (i, j) \quad s_i|U_i \cap U_j = s_j|U_i \cap U_j$$

il existe $s \in \mathcal{F}(U)$ *avec* $s|U_i = s_i$ *pour tout* i.

2010 *Mathematics Subject Classification.* Primary 55N30; Secondary 18F20, 14F40.

Key words and phrases. Faisceaux, morphisme étale et espaces étalés, image directe et réciproque, foncteur cohomologique, effaçable, universel, résolution, cohomologie, foncteur dérivé, faisceaux injectifs et flasques, complexe de de Rham.

La section s dont (2) *affirme l'existence est* unique *par la propriété* (1).

Les *morphismes de faisceaux* sont ceux en tant que préfaisceaux, la *catégorie des faisceaux* est une sous–catégorie *pleine* des préfaisceaux ; on les note respectivement $\widetilde{X}_{top} \subset \widehat{X}_{top}$.

1.2. **Morphismes étales, espaces étalés et faisceaux.**

1.2.1. *Espaces étalés et morphismes.* Soit $E \xrightarrow{p} X$ une application continue d'espaces topologiques. On dit que p est *étale* quand pour tout $x \in E$, il existe un voisinage ouvert U de x tel que p soit un homéomorphisme de U sur son image. On dit aussi que (E, p) est un espace *étalé* sur X (Godement [4, II.1.2]).

Il est clair que id est étale, et que le composé de deux morphismes étales est encore étale.

Soient (E, p) et (F, q) deux espaces étalés sur X. Un *morphisme d'espaces étalés* $(E, p) \longrightarrow (F, q)$ est une application continue $f : E \longrightarrow F$ telle que $q \circ f = p$:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p"'] & & F \arrow[dl, "q"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

Il est alors évident que f lui-même est étale.

On a ainsi défini une *catégorie Et/X d'espaces étalés sur X.*

Si $E \xrightarrow{p} X$ est un espace étalé et si $x \in X$, on appelle *fibre en x* de l'espace étalé l'ensemble $p^{-1}(x)$. La topologie induite sur la fibre est discrète.

1.2.2. *Faisceau associé à un espace étalé.* Soit $E \xrightarrow{p} X$ un espace étalé. Pour tout ouvert $U \subset X$ notons $\Gamma(U, E) = \{s : U \to E \mid p \circ s = id\}$ l'ensemble des sections *continues.*

Si on défini $\mathcal{F}(U) = \Gamma(U, E)$ avec les morphismes de restriction $\mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$ évident pour $V \subset U$, on obtient bien un faisceau $\mathcal{F}$ sur X. L'application qui à (E, p) fait correspondre $\mathcal{F}$ est un foncteur covariant $T : Et/X \to \widetilde{X}_{top}$ de la catégorie des espaces étalés sur X dans celle des faisceaux sur X.

Réciproquement, considérons un faisceau $\mathcal{F}$ sur X, et un point $x \in X$. On appelle *fibre de $\mathcal{F}$ en x* l'ensemble $\mathcal{F}_x = \varinjlim_{x \in U} \mathcal{F}(U)$ et on pose

$$E = \coprod_{x \in X} \mathcal{F}_x$$

On munit E de la projection p qui à $a \in \mathcal{F}_x$ fait correspondre x. Maintenant, l'application canonique de $\mathcal{F}(U)$ dans la limite inductive $\mathcal{F}_x$ notée $s \mapsto s_x$, induit une application $\widetilde{s} : U \to E$ définie par $\widetilde{s}(x) = s_x$. On munit E de la topologie la plus fine qui rende les applications $\widetilde{s}$ continues. $E \xrightarrow{p} X$ est alors un espace étalé sur X. On obtient ainsi un foncteur $T' : \widetilde{X}_{top} \to Et/X$ covariant de la catégorie des faisceaux sur X dans celle des espaces étalés sur X.

Théorème 1.3. *Les foncteurs T et T' vérifient $T \circ T' \approx id_{\widetilde{X}_{top}}$ et $T' \circ T \approx id_{Et/X}$ et sont donc des équivalences de catégories.*

Démonstration. Pour les démonstrations cf. Godement [4, loc.cit.]. ☐

Remarque. La fibre $\mathcal{F}_x$ du faisceau est égale à la fibre $p^{-1}(x)$ de l'espace étalé associé, évidemment.

On peut donc occuper ou bien le point de vue *faisceau*, ou bien le point de vue *espace étalé*, et on se permet de les confondre.

1.3. **Images directes et réciproques de faisceaux.**

1.3.1. *Image directe.* Soient $X \xrightarrow{f} Y$ une application continue, et $\mathcal{F}$ un faisceau sur X. Considérons le préfaisceau $f_*\mathcal{F}$ sur Y défini par
— $\forall V$ ouvert $\subset Y$: $f_*\mathcal{F}(V) = \mathcal{F}(f^{-1}V)$
— morphismes de restrictions évidents.
Alors $f_*\mathcal{F}$ est un faisceau et f_* est un foncteur covariant de la catégorie des faisceaux sur X dans celle des faisceaux sur Y, appelé *image directe par f*.

1.3.2. *Image réciproque.* Soit $X \xrightarrow{f} Y$ une application continue, et soit (G, p) un espace étalé sur Y. On considère le produit fibré $X \underset{Y}{\times} G$ dans la catégorie des espaces topologiques.

$$\begin{tikzcd} X \times_Y G \arrow[r, "g"] \arrow[d, "q"'] & G \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

On constate que q est encore étale. Le produit fibré définit un foncteur de la catégorie des espaces étalés sur Y dans celle des espaces étalés sur X, et par suite un foncteur f^* de la catégorie des faisceaux sur Y dans celle des faisceaux sur X, appelé *image réciproque par f*.

Exemple 1.4. *Si U est un ouvert d'un espace topologique X, l'injection canonique j est continue et même étale.*

Si $\mathcal{F}$ est un faisceau sur X, son image réciproque est le faisceau restreint à U. L'espace étalé correspondant est l'image réciproque de U par la projection au sens des espaces topologiques, avec la projection restreinte. Si (E, p) est un espace étalé sur U, l'image directe $j_*\mathcal{E}$ du faisceau associé est le faisceau défini par $j_*\mathcal{E}(V) = \mathcal{E}(U \cap V)$, dont l'espace étalé associé est $(E, j \circ p)$.

Si x est un point d'un espace topologique X, l'image réciproque d'un faisceau $\mathcal{F}$ sur X par l'application canonique $\{x\} \to X$ est la fibre $\mathcal{F}_x$ munie de la topologie discrète.

1.3.3. *Propriétés d'adjonction.* Le foncteur f^* est un *adjoint à gauche* du foncteur f_*.

Pour montrer ceci, on va définir un morphisme de faisceaux sur Y :

$$a_{\mathcal{G}} : \mathcal{G} \longrightarrow f_*f^*\mathcal{G}$$

Si V est un ouvert de Y on a $\mathcal{G}(V) = \Gamma(V, G)$ et

$$f_*f^*\mathcal{G}(V) = f^*\mathcal{G}(f^{-1}V) = \Gamma(f^{-1}V, X \underset{Y}{\times} G) = \mathrm{Hom}_X(X \underset{Y}{\times} V, X \underset{Y}{\times} G)$$

On va prendre comme image de $s \in \mathcal{G}(V)$ la section $a_{\mathcal{G}}(V)(s) = id \times s$ qui est évidemment continue. La compatibilité aux restrictions est évidente. On obtient bien un morphisme de faisceaux.

Il faut pour que ces morphismes définissent une *adjonction* qu'ils satisfassent deux conditions.

La première est la fonctorialité en $\mathcal{G}$, c'est-à-dire la commutativité du diagramme suivant pour tout morphisme $h : \mathcal{G} \to \mathcal{G}'$ de faisceaux sur Y.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{G} \arrow[r, "a_{\mathcal{G}}"] \arrow[d, "h"'] & f_*f^*\mathcal{G} \arrow[d, "f_*f^*h"] \\ \mathcal{G}' \arrow[r, "a_{\mathcal{G}'}"'] & f_*f^*\mathcal{G}' \end{tikzcd}$$

Si s est une section continue de G sur l'ouvert V de Y, on a :

$$a_{\mathcal{G}'}(V)h(V)(s) = a_{\mathcal{G}'}(V)(h \circ s) = id \times h \circ s$$

$(f_*f^*h)(V)a_{\mathcal{G}}(V)(s) = (f_*f^*h)(id \times s) = (f^*h)(f^{-1}V)(id \times s) = (id \times h) \circ (id \times s)$. Ce qui assure la fonctorialité en $\mathcal{G}$.

La seconde est que, pour tout faisceau $\mathcal{F}$ sur X et tout faisceau $\mathcal{G}$ sur Y, l'application de $\mathrm{Hom}_X(f^*\mathcal{G}, \mathcal{F})$ dans $\mathrm{Hom}_Y(\mathcal{G}, f_*\mathcal{F})$ définie par $m \mapsto (f_*m)a_{\mathcal{G}}$ soit bijective.

On peut encore décrire l'application comme suit :

A une section t de $\mathcal{G}$ sur un ouvert V de Y, correspond la section $(id \times t) \in \Gamma(f^{-1}V, X \underset{Y}{\times} G)$ qui a pour image par $m(f^{-1}V)$ la section $m \circ (id \times t) \in \mathcal{F}(f^{-1}V)$ qui est aussi une section de $f_*\mathcal{F}$ sur V ; c'est cette section qui est

$$(f_*m)(V)a_{\mathcal{G}}(V)(t)$$

Injectivité

Si $m \neq m'$, il y a au moins un point de l'espace étalé f^*G sur X où les applications m et m' diffèrent. Soit (x, a) un tel point. Son image a par g est dans une certaine section t de G au-dessus d'un certain ouvert V de Y contenant $p(a) = f(x)$. On voit alors que pour le choix de V et t qu'on vient de faire, on a $(f_*m)(V)a_{\mathcal{G}}(V)(t) \neq (f_*m')(V)a_{\mathcal{G}}(V)(t)$, donc $(f_*m)a_{\mathcal{G}} \neq f_*m')a_{\mathcal{G}'}$.

Surjectivité

Soit n un morphisme de $\mathcal{G}$ dans $f_*\mathcal{F}$. On se propose de construire un morphisme $n' : f^*\mathcal{G} \to \mathcal{F}$ tel que $n = (f_*n') \circ a_{\mathcal{G}}$.

Soit $(x, a) \in f^*G$, et soit $y = p(a) = f(x)$. Il existe un ouvert V de Y contenant y et une section s au-dessus de V telle que $a = t(y)$. Alors $n(V)(t)$ est une section de $f_*\mathcal{F}$ sur V, ou encore une section de $\mathcal{F}$ sur $f^{-1}V$, ce qui donne un point $n(V)(t)(x)$ de $\mathcal{F}$ se projetant sur x. Ce point ne dépend que de (x, a) et non de V et t et sera noté $n'(x, a) = n(V)(t)(x)$. On a ainsi défini une application $n' : f^*G \to \mathcal{F}$, dont on pourra vérifier qu'elle est continue et qu'elle redonne bien n.

1.3.4. *Propriétés d'exactitude.* Grâce à l'adjonction, on sait que

— f_* est compatible aux limites projectives (donc *exact à gauche*),

— f^* est compatible aux limites inductives (donc *exact à droite*).

Mais nous avons par surcroît

— f^* est compatible aux limites projectives finies, donc est un *foncteur exact*.

Pour le prouver, on peut voir qu'une limite projective finie d'espaces étalés sur un espace topologique X dans la catégorie des espaces topologiques au-dessus de X est déjà étalé sur X et s'identifie donc à la limite dans la catégorie des espaces étalés sur X. La construction de f^*, qui ne fait intervenir que le produit fibré d'espaces topologiques va donc commuter à la formation des limites projectives finies d'espaces étalés.

1.3.5. *Propriétés de conservation.* Pour qu'un morphisme de faisceaux $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ soit un *mono-, épi- ou isomorphisme* il faut et il suffit que les morphismes sur les fibres $\varphi_x : \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x$ $(x \in X)$ le soient.

Pour qu'un morphisme de faisceaux soit un *noyau* (resp. *conoyau*) d'une paire de morphismes, il faut et il suffit que ce soit le cas pour les morphismes correspondants sur les fibres.

Pour qu'un diagramme de faisceaux soit un *produit fini* avec ses projections (une *somme* avec ses injections), il faut et il suffit que les diagrammes sur les fibres le soient aussi.

Attention. Sauf si X est discret, une famille de morphismes sur les fibres ne provient pas en général d'un morphisme de faisceaux.

1.4. **Faisceaux de groupes sur un espace topologique.** Un faisceau de groupes abéliens sur un espace topologique X est un faisceau $\mathcal{G}$ sur X, muni d'un morphisme de faisceaux de $\mathcal{G} \times \mathcal{G}$ dans $\mathcal{G}$ qui induit sur chaque ouvert U de X une opération faisant de $\mathcal{G}(U)$ un groupe abélien.

Dans les espaces étalés, la notion correspondante est un espace étalé G sur X, muni d'une application continue de $G \underset{X}{\times} G$ dans G, qui induit sur chaque fibre une opération de groupe, telle que la section nulle soit continue et que la section opposée d'une section continue sur un ouvert U de X soit encore une section continue.

Les morphismes de faisceaux de groupes sur X sont bien entendu les morphismes de faisceaux compatibles aux opérations, qui se décrivent dans les espaces étalés comme les applications au-dessus de X continue et compatibles aux opérations sur les fibres.

On obtient ainsi une catégorie abélienne $\mathcal{A}b_X$. L'exactitude peut s'observer "fibre par fibre".

L'image directe, l'image réciproque d'un faisceau de groupes par une application continue sont de manière évidente des faisceaux de groupes. Ces structures naturelles font des foncteurs f_* et f^* des foncteurs additifs pour toute application continue f. On a encore les propriétés d'exactitude :

— f_* est compatible aux limites projectives, en particulier exact à gauche.
— f^* est compatible aux limites inductives et exact.

De même, on parlera de faisceaux d'anneaux, de modules sur un faisceau d'anneaux etc. cf. Godement [4, p. 123 ff.].

2. Foncteurs cohomologiques

2.1. **La catégorie des ∂–foncteurs.** On note $\mathcal{A}b$ la catégorie des groupes abéliens et $\mathcal{A}b_X$ la catégorie des faisceaux de groupes abéliens sur un espace topologique X. Tous les foncteurs considérés seront additifs.

Définition 2.1. *Un ∂–*foncteur[1] (H, d) *est une suite de foncteurs $H^n : \mathcal{A}b_X \to \mathcal{A}b$ et la donnée pour toute petite suite exacte dans $\mathcal{A}b_X$*

$$S : 0 \to \mathcal{E} \xrightarrow{\mu} \mathcal{F} \xrightarrow{\chi} \mathcal{G} \to 0$$

de morphismes $d^n S$ (appelé cobords*) tels que*

$$\ldots \longrightarrow H^n(\mathcal{E}) \xrightarrow{H^n(\mu)} H^n(\mathcal{F}) \xrightarrow{H^n(\chi)} H^n(\mathcal{G}) \xrightarrow{d^n S} H^{n+1}(\mathcal{E}) \xrightarrow{H^{n+1}(\mu)} H^{n+1}(\mathcal{F}) \longrightarrow \ldots$$

1. prononcé *del–foncteur*

soit un complexe*, i.e. la composée de deux flèches successives est nulle :*

$$d^n S \circ H^n(\chi) = 0 = H^{n+1}(\mu) \circ d^n S$$

et de plus tels que $d^n S$ dépende fonctoriellement de la suite S , i.e. un morphisme de petites suites exactes :

$$\begin{tikzcd}
S : 0 \arrow[r] & \mathcal{E} \arrow[r, "\mu"] \arrow[d] & \mathcal{F} \arrow[r, "\chi"] \arrow[d] & \mathcal{G} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
S' : 0 \arrow[r] & \mathcal{E}' \arrow[r, "\mu'"] & \mathcal{F}' \arrow[r, "\chi'"] & \mathcal{G}' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

donne un morphisme de complexes :

$$\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r] & H^n(\mathcal{F}) \arrow[r, "H^n(\chi)"] \arrow[d] & H^n(\mathcal{G}) \arrow[r, "d^n S"] \arrow[d] & H^{n+1}(\mathcal{E}) \arrow[r, "H^{n+1}(\mu)"] \arrow[d] & H^{n+1}(\mathcal{F}) \arrow[r] \arrow[d] & \dots \\
\dots \arrow[r] & H^n(\mathcal{F}') \arrow[r, "H^n(\chi')"] & H^n(\mathcal{G}') \arrow[r, "d^n S'"] & H^{n+1}(\mathcal{E}') \arrow[r, "H^{n+1}(\mu')"] & H^{n+1}(\mathcal{F}') \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}$$

Définition 2.2. *Un* morphisme de ∂–foncteurs $\varphi : (H, d) \to (K, \delta)$ *est une suite de morphismes de foncteurs $\varphi^n : H^n \to K^n$ qui commutent aux cobords, i.e. telle que pour toute petite suite exacte S on ait $\varphi^{n+1}(\mathcal{E}) \circ d^n S = \delta^n S \circ \varphi^n(\mathcal{G})$:*

$$\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r] & H^n(\mathcal{F}) \arrow[r, "H^n(\chi)"] \arrow[d, "\varphi^n(\mathcal{F})"'] & H^n(\mathcal{G}) \arrow[r, "d^n S"] \arrow[d, "\varphi^n(\mathcal{G})"'] & H^{n+1}(\mathcal{E}) \arrow[r, "H^{n+1}(\mu)"] \arrow[d, "\varphi^{n+1}(\mathcal{E})"] & H^{n+1}(\mathcal{F}) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi^{n+1}(\mathcal{F})"] & \dots \\
\dots \arrow[r] & K^n(\mathcal{F}) \arrow[r, "K^n(\chi)"] & K^n(\mathcal{G}) \arrow[r, "\delta^n S"] & K^{n+1}(\mathcal{E}) \arrow[r, "K^{n+1}(\mu)"] & K^{n+1}(\mathcal{F}) \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}$$

2.2. ∂–**foncteurs universels.**

Lemme technique. *Soit un carré cocartésien de $\mathcal{A}b_X$ ($\mathcal{F} = \mathcal{E}_1 \sqcup_{\mathcal{E}} \mathcal{E}_2$). Si α_1 est un monomorphisme, β_2 l'est aussi.*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{E} \arrow[r, "\alpha_2"'] \arrow[d, "\alpha_1"] & \mathcal{E}_2 \arrow[d, "\beta_2"] \\
\mathcal{E}_1 \arrow[r, "\beta_1"'] & \mathcal{F}
\end{tikzcd}$$

Démonstration. Les caractères d'exactitude (monomorphismes, sommes, conoyaux ...) se voient fibre par fibre (Godement [4, II.1.6]). On est donc ramené au cas d'un carré de groupes commutatifs.

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[rr, "\alpha_2"] \arrow[dd, "\alpha_1"'] & & E_2 \arrow[dd, "\beta_2"] \arrow[dl, shift left, "\sigma_2"] \\
& E_1 \oplus E_2 \arrow[ur, shift left, "\pi_2"] \arrow[dl, shift left, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\chi"] & \\
E_1 \arrow[rr, "\beta_1"'] \arrow[ur, shift left, "\sigma_1"'] & & F
\end{tikzcd}$$

On a une construction de la somme amalgamée F. Soit $E_1 \oplus E_2$ une somme directe de E_1 et E_2 qui s'y injectent par σ_1 et σ_2. Alors $\chi : E_1 \oplus E_2 \to F$ est la flèche conoyau de $\sigma_1\alpha_1 - \sigma_2\alpha_2$.

Soit $x \in E_2$ dans le noyau de β_2: $\beta_2(x) = 0$, soit $\chi\sigma_2(x) = 0$. C'est donc que

$$\sigma_2(x) = (\sigma_2\alpha_2 - \sigma_1\alpha_1)(y) \text{ pour un } y \in E$$

Composons à gauche par la projection $\pi_1 : E_1 \oplus E_2 \to E_1$

$$\pi_1\sigma_2(x) = 0 = -\pi_1\sigma_1\alpha_1(y) = -\alpha_1(y)$$

α_1 étant un monomorphisme, $y = 0$, donc $\sigma_2(x) = 0$ et ensuite , en composant par $\pi_2 : E_1 \oplus E_2 \to E_2$

$$\pi_2\sigma_2(x) = x = 0$$

□

Corollaire 2.3. *Si μ_1 et μ_2 sont deux monomorphismes de même source, il existe un monomorphisme μ de même source tel que $\mu = \alpha_1\mu_1 = \alpha_2\mu_2$.*

Démonstration. On construit la somme amalgamée de (μ_1, μ_2) et la diagonale du carré convient:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{E} \arrow[r, "\mu_2"] \arrow[d, "\mu_1"'] \arrow[dr, "\mu"] & \mathcal{E}_2 \arrow[d, "\alpha_2"] \\ \mathcal{E}_1 \arrow[r, "\alpha_1"'] & \mathcal{F} \end{tikzcd}$$

α_2 étant un monomorphisme par le lemme technique, $\mu = \alpha_2\mu_2$ aussi. □

Définition 2.4. *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. Un foncteur $H : \mathcal{C} \to \mathcal{A}b$ est* effaçable *si pour tout objet E de $\mathcal{C}$ et tout $x \in H(E)$ il existe un monomorphisme $u : E \to F$ de $\mathcal{C}$ tel que $H(u)x = 0$. Le morphisme u est alors appelé morphisme* effaçant *x.*

Définition 2.5. *Un ∂–foncteur (H, d) est appelé* exact *(ou* cohomologique*) si le complexe obtenu pour toute petite suite exacte S est acyclique.*

Définition 2.6. *Un ∂–foncteur (H, d) est appelé* universel *si pour tout ∂–foncteur (K, δ) un morphisme $\varphi^0 : H^0 \to K^0$ se prolonge de façon unique en un morphisme de ∂–foncteurs.*

Théorème 2.7. *Un ∂–foncteur (H, d) cohomologique, dont les H^n sont effaçables pour $n \geq 1$, est universel.*

Démonstration. On se donne un deuxième ∂–foncteur (K, δ) et $\varphi^0 : H^0 \to K^0$ un morphisme de degré 0. On construit $\varphi^{n+1} : H^{n+1} \to K^{n+1}$ par récurrence sur n et on montre :

— l'unicité

— que φ^n commute aux flèches d^nS et δ^nS

— que φ^n est un morphisme de ∂–foncteurs

a) L'unicité. Donnons nous $x \in H^{n+1}(\mathcal{E})$. Il existe un monomorphisme μ effaçant x et avec $\mathcal{G} = \operatorname{Coker}\mu$ on construit la suite exacte

$$S : 0 \to \mathcal{E} \xrightarrow{\mu} \mathcal{F} \xrightarrow{\chi} \mathcal{G} \to 0$$

il s'ensuit

$$\begin{tikzcd} \dots \arrow[r] & H^n(\mathcal{F}) \arrow[r, "H^n(\chi)"] \arrow[d, "\varphi^n(\mathcal{F})"'] & H^n(\mathcal{G}) \arrow[r, "d^nS"] \arrow[d, "\varphi^n(\mathcal{G})"'] & H^{n+1}(\mathcal{E}) \arrow[r, "H^{n+1}(\mu)"] \arrow[d, dotted, "\varphi^{n+1}(\mathcal{E})"] & H^{n+1}(\mathcal{F}) \arrow[r] & \dots \\ \dots \arrow[r] & K^n(\mathcal{F}) \arrow[r, "K^n(\chi)"] & K^n(\mathcal{G}) \arrow[r, "\delta^nS"] & K^{n+1}(\mathcal{E}) \arrow[r, "K^{n+1}(\mu)"] & K^{n+1}(\mathcal{F}) \arrow[r] & \dots \end{tikzcd}$$

A partir de $x \in H^{n+1}(\mathcal{E})$ cherchons l'image x' dans $K^{n+1}(\mathcal{E})$

$$\begin{array}{ll} H^{n+1}(\mu)x = 0 & \text{puisque } \mu \text{ efface } x, \text{ donc} \\ \exists\, y \in H^n(\mathcal{G}) \quad x = d^n S(y) & \text{par l'acyclicité du complexe des } H^n \end{array}$$

On doit poser $x' = \delta^n S \circ \varphi^n(\mathcal{G})y$ pour rendre le carré commutatif, au moins sur y.

— x' ne dépend pas de y. En effet, si $x = d^n S(y')$, alors $d^n S(y' - y) = 0$ et donc $y' - y \in H^n(\chi)z$ pour un $z \in H^n(\mathcal{F})$. Alors $\delta^n S \circ \varphi^n(\mathcal{G})(y' - y) = \delta^n S \circ \varphi^n(\mathcal{G}) \circ H^n(\chi)z = \delta^n S \circ K^n(\chi)(\varphi^n(\mathcal{F})z) = 0$.

— x' ne dépend pas de μ : Si μ et μ_1 sont deux monomorphismes effaçant x, on sait qu'il existe un monomorphisme $\mu' = \alpha\mu = \beta\mu_1$ qui efface aussi x. Il suffit de montrer que μ' et μ mènent à la même image x' de x.

$$\begin{tikzcd} S : 0 \arrow[r] & \mathcal{E} \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "id"] & \mathcal{F} \arrow[r, "\chi"] \arrow[d, "\alpha"] & \mathcal{G} \arrow[r] \arrow[d, "\beta"] & 0 \\ S' : 0 \arrow[r] & \mathcal{E} \arrow[r, "\mu'"] & \mathcal{F}' \arrow[r, "\chi'"] & \mathcal{G}' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \qquad \chi' = \operatorname{Coker} \mu'$$

Il existe β rendant commutatif le diagramme. Par fonctorialité de d et δ , on a

$$\begin{tikzcd} {} & H^n(\mathcal{G}) \arrow[rr, "d^n S"] \arrow[dl, "H^n(\beta)"'] \arrow[dd, "\varphi^n(\mathcal{G})"] & & H^{n+1}(\mathcal{E}) \arrow[r, "H^{n+1}(\mu)"] \arrow[dl, "id"'] \arrow[dd, dotted, "\varphi^{n+1}(\mathcal{E})"] & {} \\ H^n(\mathcal{G}') \arrow[rr, "d^n S'"] \arrow[dd, "\varphi^n(\mathcal{G}')"'] & & H^{n+1}(\mathcal{E}) \arrow[rr, "H^{n+1}(\mu')"] \arrow[dd, dotted, "\varphi^{n+1}(\mathcal{E})"] & & {} \\ & K^n(\mathcal{G}) \arrow[rr, "\delta^n S"'] \arrow[dl, "K^n(\beta)"'] & & K^{n+1}(\mathcal{E}) \arrow[dl, "id"] & \\ K^n(\mathcal{G}') \arrow[rr, "\delta^n S'"'] & & K^{n+1}(\mathcal{E}) & & \end{tikzcd}$$

On peut prendre $y' = H^n(\beta)y$ comme image réciproque de $x \in H^{n+1}(\mathcal{E})$, car $d^n S' y' = d^n S' \circ H^n(\beta)y = d^n S y = x$. On est alors amené à calculer

$$\delta^n S' \circ \varphi^n(\mathcal{G}')y' = \delta^n S' \circ \varphi^n(\mathcal{G}')H^n(\beta)y = \delta^n S' \circ K^n(\beta) \circ \varphi^n(\mathcal{G})y = \delta^n S \circ \varphi^n(\mathcal{G})y = x'$$

En même temps que l'existence, on obtient ainsi l'unicité de x'.

Remarquons que $\varphi^{n+1}(\mathcal{E})$ ainsi construit est additif sur les x effacés par μ. Mais si μ efface x, et si μ' efface x', il existe $\mu'' = \alpha\mu = \alpha'\mu'$ effaçant x et x', donc aussi $x + x'$ par additivité de $H^{n+1}(\mu)$. $\varphi^{n+1}(\mathcal{E})(x + x') = \varphi^{n+1}(\mathcal{E})(x) + \varphi^{n+1}(\mathcal{E})(x')$ est alors vérifié.

b) Commutativité du carré.

$$\begin{tikzcd} H^n(\mathcal{G}) \arrow[r, "d^n S"] \arrow[d, "\varphi^n(\mathcal{G})"'] & H^{n+1}(\mathcal{E}) \arrow[r, "H^{n+1}(\mu)"] \arrow[d, "\varphi^{n+1}(\mathcal{E})"] & H^{n+1}(\mathcal{F}) \\ K^n(\mathcal{G}) \arrow[r, "\delta^n S"] & K^{n+1}(\mathcal{E}) & \end{tikzcd}$$

Elle est évidente par construction car si $y \in H^n(\mathcal{G})$ alors $d^n S(y)$ est effacé par μ.

c) Fonctorialité de φ^n. Soient $\alpha : \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$, $x \in H^{n+1}(\mathcal{E})$, μ effaçant x, $\mathcal{F}'$ somme amalgamée de (μ, α),

$$\begin{tikzcd}
S : 0 \arrow[r] & \mathcal{E} \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\alpha"] & \mathcal{F} \arrow[r, "\chi"] \arrow[d, "\beta"] & \mathcal{G} \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\
S' : 0 \arrow[r] & \mathcal{E}' \arrow[r, "\mu'"] & \mathcal{F}' \arrow[r, "\chi'"] & \mathcal{G}' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

d'où μ', qui est un monomorphisme grâce au lemme technique, et χ et χ' des conoyaux de μ et μ'. Il existe alors un unique γ rendant ce diagramme commutatif. Il s'ensuit un cube dont toutes les faces (sauf peut-être celle de droite) sont commutatives:

$$\begin{tikzcd}
& H^n(\mathcal{G}) \arrow[rr, "d^nS"] \arrow[dl, "H^n(\gamma)"'] \arrow[dd, "\varphi^n(\mathcal{G})"' near start] & & H^{n+1}(\mathcal{E}) \arrow[r, "H^{n+1}(\mu)"] \arrow[dl, "H^{n+1}(\alpha)"'] \arrow[dd, "\varphi^{n+1}(\mathcal{E})"] & {} \\
H^n(\mathcal{G}') \arrow[rr, "d^nS'"] \arrow[dd, "\varphi^n(\mathcal{G}')"'] & & H^{n+1}(\mathcal{E}') \arrow[r, "H^{n+1}(\mu')"] \arrow[dd, "\varphi^{n+1}(\mathcal{E}')"] & {} & \\
& K^n(\mathcal{G}) \arrow[rr, "\delta^nS"'] \arrow[dl, "K^n(\gamma)"'] & & K^{n+1}(\mathcal{E}) \arrow[dl, "K^{n+1}(\alpha)"] & \\
K^n(\mathcal{G}') \arrow[rr, "\delta^nS'"'] & & K^{n+1}(\mathcal{E}') & &
\end{tikzcd}$$

Soit $y \in H^n(\mathcal{G})$ tel que $x = d^nS(y)$, $y' = H^n(\gamma)y$, $x' = H^{n+1}(\alpha)x$. Il est clair que μ' efface x', et qu'on peut prendre y' pour construire $\varphi^{n+1}(\mathcal{E}')x'$ par fonctorialité de d^n. Maintenant

$$\begin{aligned}
\varphi^{n+1}(\mathcal{E}')H^{n+1}(\alpha)x &= \delta^nS'\varphi^n(\mathcal{G}')y' && \text{par construction} \\
&= \delta^nS'K^n(\gamma)\varphi^n(\mathcal{G})y && \text{fonctorialité de } \varphi^n \\
&= K^{n+1}(\alpha)\delta^nS\varphi^n(\mathcal{G})y && \text{fonctorialité de } \delta^n \\
&= K^{n+1}(\alpha)\varphi^{n+1}(\mathcal{E})x && \text{par construction}
\end{aligned}$$

□

3. Faisceaux injectifs

Définition 3.1. *Un objet* injectif *dans une catégorie $\mathcal{C}$ est un objet I tel que pour tout monomorphisme $m : A \to B$ de la catégorie et tout morphisme $a : A \to I$, il existe un morphisme $b : B \to I$ tel que $b \circ m = a$.*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, hook, "m"] \arrow[d, "a"'] & B \arrow[dl, dashed, "b"] \\
I &
\end{tikzcd}$$

On dit que $\mathcal{C}$ a suffisamment d'injectifs *si pour tout objet de $\mathcal{C}$ il existe un monomorphisme de source l'objet et de but un objet injectif.*

Proposition 3.2. *Si $K : \mathcal{C} \to \mathcal{A}b$ est un foncteur effaçable, et si I est un objet injectif de $\mathcal{C}$, alors $K(I) = 0$. Si $\mathcal{C}$ a suffisamment d'injectifs, cette propriété caractérise les foncteurs effaçables.*

Démonstration. Soit $x \in K(I)$. Il existe un monomorphisme $u : I \to J$ tel que $K(u)(x) = 0$. Comme I est injectif, le monomorphisme u admet une rétraction w

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, hook, "u"] \arrow[d, "id"'] & J \arrow[dl, dashed, "w"] \\ I & \end{tikzcd}$$

tel que $w \circ u = id$. On aura donc $x = K(w \circ u)(x) = K(w)(K(u)(x)) = 0$.

Si $\mathcal{C}$ a suffisamment d'injectifs, le monomorphisme $\mu : E \to F$, où F est injectif, efface évidemment tout élément de $K(E)$. □

Lemme 3.3. *Le groupe* $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ *est injectif dans* $\mathcal{A}b$.

Démonstration. Soit G un groupe abélien, soit H un sous–groupe de G et soit h un morphisme de H vers $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$. On considère l'ensemble des couples (K, k) où K est un sous–groupe de G et k un morphisme de K vers $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$. On le munit de la relation $(K, k) \leq (K', k')$ définie par $K \subset K'$ et $k = k'|K$ est la restriction de k' à K. C'est visiblement une relation d'ordre inductif. Le lemme de Zorn montre qu'il y a un élément maximal de l'ensemble au–dessus de (H, h).

Si K est différent de G, soit $x \in G - K$ et soit K' le sous–groupe de G engendré par K et x. Si $K = 0$, on pourra prolonger k par $k'(x)$ arbitraire dans $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$. Sinon, n étant le plus petit entier positif non nul tel que $nx \in K$, on peut prolonger k par $k'(x) = p/n \pmod 1$, p étant pris de telle sorte que $p = k(nx) \pmod 1$.

Un élément maximal (K, k) est donc tel que $K = G$, donc h se prolonge sur tout G. □

Lemme 3.4. $\mathcal{A}b$ *a suffisamment d'injectifs.*

Démonstration. En fait, le résultat est même vrai pour la catégorie des modules sur un anneau, voir Godement [4, I.1.4]. □

Lemme 3.5. *L'image directe d'un faisceau injectif par une application continue est encore un injectif.*

Démonstration. Soit $f : X \to Y$ une application continue, soit $\mathcal{J}$ un faisceau injectif sur X et $m : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ un monomorphisme de faisceaux sur Y. Comme le foncteur f^* est exact, f^*m est encore un monomorphisme. Dans le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_X(f^*\mathcal{G}, \mathcal{J}) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\circ f^*m"'] & \mathrm{Hom}_Y(\mathcal{G}, f_*\mathcal{J}) \arrow[d, "\circ m"] \\ \mathrm{Hom}_X(f^*\mathcal{F}, \mathcal{J}) \arrow[r, "\sim"] & \mathrm{Hom}_Y(\mathcal{F}, f_*\mathcal{J}) \end{tikzcd}$$

les isomorphismes horizontales résultes de l'adjonction de (f^*, f_*). Puisque $\mathcal{J}$ est injectif par hypothèse, la flèche verticale à gauche est surjectif, donc la flèche à droite est surjectif, et alors $f_*\mathcal{J}$ est injectif. □

Théorème 3.6. $\mathcal{A}b_X$ *a suffisamment d'injectifs.*

Démonstration. Soit Y un espace topologique *discret*.

Pour un tel espace, le foncteur qui, à un faisceau $\mathcal{K}$ sur Y, associe la famille de groupes $(\mathcal{K}_y)_{y \in Y}$ est une équivalence de catégories entre $\mathcal{A}b_Y$ et la catégorie des familles de groupes indexées par Y.

Soit $\mathcal{K}$ un faisceau sur Y. Il est possible d'envoyer par une injection chaque groupe $\mathcal{K}_y$ dans un groupe abélien injectif J_y. Ceci fournit un monomorphisme du faisceau $\mathcal{K}$ dans le faisceau sur Y défini par la famille $(J_y)_y$. On appelle $\mathcal{J}$ ce faisceau ; montrons qu'il est injectif.

Soit $\mathcal{L} \xrightarrow{m} \mathcal{M}$ un monomorphisme de faisceaux sur Y et $\mathcal{L} \xrightarrow{a} \mathcal{J}$ un morphisme. Pour chaque $y \in Y$, le morphisme $a_y : \mathcal{L}_y \to J_y$ se factorise par le monomorphisme sous la forme $a_y = b_y \circ m_y$, car m_y est un monomorphisme et J_y est injectif. La famille des $(b_y)_{y \in Y}$ détermine un morphisme $b : \mathcal{M} \to \mathcal{J}$, tel que $a = b \circ m$.

Soient X un espace topologique, Y l'ensemble X muni de la topologie discrète et $f : Y \to X$ l'application identique, qui est continu.

Soit $\mathcal{F}$ un faisceau sur X et $u : f^*\mathcal{F} \to \mathcal{J}$ un monomorpisme de faisceaux sur Y, de but injectif.

Alors on considère $f_*u \circ a_{\mathcal{F}} : \mathcal{F} \to f_*f^*\mathcal{F} \to f_*\mathcal{J}$, c'est un monomorphisme par l'exactitude à gauche de f_* et l'injectivité de $a_{\mathcal{F}}$. Comme $f_*\mathcal{J}$ est injectif par le lemme 3.5, on y est. $\square$

4. Résolutions et cohomologie des complexes

4.1. **Résolutions.**

Définition 4.1. *Une* résolution (E^*, e) *de l'objet* E *est un complexe* E^* *:*

$$0 \to E^0 \xrightarrow{d^0} E^1 \xrightarrow{d^1} E^2 \to \dots$$

muni d'une augmentation $e : E \to E^0$ *de telle sorte que la suite*

$$0 \to E \xrightarrow{e} E^0 \xrightarrow{d^0} E^1 \xrightarrow{d^1} E^2 \to \dots$$

soit exacte.

Une résolution (E^*, e) *est dite* injective *si l'objet* E^n *est injectif pour tout* $n \geq 0$.

Proposition 4.2. *Si on se donne une résolution* (E^*, e) *de l'objet* E*, un complexe:*

$$F \xrightarrow{f} F^0 \xrightarrow{b^0} F^1 \xrightarrow{b^1} F^2 \to \dots$$

d'objets F^i *injectifs et un morphisme* $m : E \to F$*, il existe un morphisme de complexe* $m^* : E^* \to F^*$ *compatible avec* m*, c'est-à-dire tel que:* $m^0 \circ e = f \circ m$ *et* $m^{i+1} \circ d^i = b^i \circ m^i$ *pour tout* $i \geq 0$.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & E \arrow[r, "e"] \arrow[d, "m"'] & E^0 \arrow[r, "d^0"] \arrow[d, "m^0"] & E^1 \arrow[r, "d^1"] \arrow[d, "m^1"] & {} \\
 & F \arrow[r, "f"] & F^0 \arrow[r, "b^0"] & F^1 \arrow[r, "b^1"] & {}
\end{tikzcd}$$

Démonstration. Puisque e est un monomorphisme, le morphisme $f \circ m$ de but injectif se prolonge en un morphisme $m^0 : E^0 \to F^0$ tel que $m^0 \circ e = f \circ e$. Comme $b^0 \circ f$ est nul, on a $0 = b^0 \circ f \circ m = b^0 \circ m^0 \circ e$. Le morphisme $b^0 \circ m^0$ se factorise donc à travers le conoyau de e, dont le but est un sous-objet de E^1 à cause de l'exactitude en E^1. Comme F^1 est injectif, cette factorisation se prolonge donc en un morphisme $m^1 : E^1 \to F^1$ tel que $m^1 \circ d^0 = b^0 \circ m^0$.

En recommançant aux degrés suivants, on obtient de proche en proche le morphisme voulu. $\square$

Proposition 4.3. *Dans les conditions du Prop. 4.2, si m est nul, tout morphisme $m^* : E^* \to F^*$ compatible avec m est* homotope à zéro*, c'est-à-dire qu'il existe des flèches $h^i : E^{i+1} \to F^i$, $i \geq 0$, telles que*

$$m^0 = h^0 \circ d^0 \text{ et } m^{i+1} = h^{i+1} \circ d^{i+1} + b^i \circ h^i \quad i \geq 0$$

Démonstration. En effet $m^0 \circ e = f \circ m = 0$, donc m^0 se factorise par le conoyau de e, qui est un sous-objet de E^1 à cause de l'exactitude en E^0. Puisque F^0 est injectif, la factorisation se prolonge à E^1. On obtient ainsi une flèche h^0 telle que $m^0 = h^0 \circ d^0$.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & E \arrow[r, "e"] \arrow[d, "m=0"'] & E^0 \arrow[r, "d^0"] \arrow[d, "m^0"'] & E^1 \arrow[r, "d^1"] \arrow[d, "m^1"] \arrow[dl, "h^0"'] & {} \\ & F \arrow[r, "f"] & F^0 \arrow[r, "b^0"] & F^1 \arrow[r, "b^1"] & {} \end{tikzcd}$$

La flèche $m^1 - b^0 \circ h^0$ composée avec d^0 donne $(m^1 - b^0 \circ h^0) \circ d^0 = 0$. Donc elle se factorise par le conoyau de d^0, dont le but est un sous-objet de E^2 à cause de l'exactitude en E^1. Comme F^1 est injectif, cette factorisation se prolonge en une flèche h^1, telle que $m^1 - b^0 \circ h^0 = h^1 \circ d^1$.

On voit comment continuer de proche en proche. □

Remarque. Dans une catégorie abélienne qui a suffisamment d'injectifs, tout objet a une résolution injective, que l'on peut construire comme suit. On part de l'objet E. Il existe un monomorphisme $e : E \to E^0$ où E^0 est injectif. On prend alors un conoyau de e, dont le but s'envoie par un monomorphisme dans un injectif E^1. Le composé de ce monomorphisme et du conoyau utilisé est appelé d^0. L'exactitude en E^0 est assurée. On voit comment poursuivre la construction de proche en proche.

4.2. **Cohomologie des complexes.**

Définition 4.4. *Si $0 \to E^0 \xrightarrow{d^0} E^1 \xrightarrow{d^1} E^2 \dots$ est un complexe de groupes abéliens, noté E^*, on apelle n–ième* groupe de cohomologie *$H^n(E^*)$ le groupe quotient du noyau de $d^n : E^n \to E^{n+1}$ par l'image de d^{n-1} pour tout $n \geq 0$*

$$H^n(E^*) = \operatorname{Ker} d^n / \operatorname{Im} d^{n-1}$$

où l'on pose $E^{-1} = 0$ et $d^{-1} = 0$.

Montrons comment un morphisme de complexes $m^* : E^* \to F^*$ induit une famille de morphismes $H^i(m^*) : H^i(E^*) \to H^i(F^*)$.

Si x est un élément de $H^i(E^*)$, c'est la classe d'un $y \in E^i$ tel que $d^i y = 0$. Alors $m^i(y)$ est un élément de F^i vérifiant $b^i m^i y = m^{i+1} d^i y = 0$. Si y' est un autre élément représentant de x, on aura $y' - y = d^{i-1} z$ avec $z \in E^{i-1}$. Donc $m^i y' = m^i y + m^i d^{i-1} z = m^i y + b^{i-1} m^{i-1} z$. La classe de $m^i y'$ est donc la même que celle de $m^i y$. C'est cette classe qu'on prend comme $H^i(m^*)(x)$.

Il est clair que les applications $H^i(m^*)$ ainsi définies sont additives et que H^i est un foncteur additif de la catégorie des complexes de groupes abéliens dans celle des groupes abéliens pour tout $i \geq 0$.

Lemme 4.5. *Si m^* est homotope à zéro, $H^i(m^*)$ est nul pour tout $i \geq 0$.*

Démonstration. On reprend les notations ci-dessus et de la proposition 4.3.

Pour le degré 0, on a $m^0 y = h^0 d^0 y = 0$.

Pour le degré $i+1$, on a $m^{i+1} y = h^{i+1} d^{i+1} y + b^i h^i y = b^i h^i y = 0$ par récurrence. □

Théorème 4.6. *Si on a une suite exacte S de complexes de groupes abéliens:*

$$0 \to E^* \xrightarrow{u^*} F^* \xrightarrow{v^*} G^* \to 0$$

on a des morphismes $d^iS : H^i(G^*) \to H^{i+1}(E^*)$ vérifiant les propriétés:
— *fonctorialité en S*
— *exactitude de la suite*

$$0 \to H^0(E^*) \xrightarrow{H^0(u^*)} H^0(F^*) \xrightarrow{H^0(v^*)} H^0(G^*) \to \dots$$
$$\dots \to H^i(E^*) \xrightarrow{H^i(u^*)} H^i(F^*) \xrightarrow{H^i(v^*)} H^i(G^*) \xrightarrow{d^iS} H^{i+1}(E^*) \xrightarrow{H^{i+1}(u^*)} \dots$$

Démonstration. Pour simplifier, les différentielles des complexes seront notées d.

Voici la construction des *cobords* d^iS.

Soit t un élément de $H^i(G^*)$. Il est représenté par un élément $z \in G^i$ tel que $dz = 0$. Il existe un $y \in F^i$ tel que $v^iy = z$. On a $v^{i+1}dy = dv^iy = dz = 0$, donc il existe un unique élément $x \in E^{i+1}$ tel que $u^{i+1}x = dy$. On voit que $u^{i+2}dx = du^{i+1}x = ddy = 0$, donc $dx = 0$. On montre que la classe ξ de x ne dépend que de t et non des y et z intervenant dans la construction et on pose $d^iS(t) = \xi$.

Le raisonnement que nous venons de faire est le même qu'au *lemme du serpent*, voir Cartan–Eilenberg [2, III, Lemma 3.3]. Les détails des autres assertions seront laissé au lecteur (voir [2, IV, §3] ou [4, I.2 th. 2.1.1] ou [5, XX, §2]). □

5. Cohomologie des faisceaux

5.1. Construction des foncteurs dérivés R^iT.

Théorème 5.1. *Il existe un ∂–foncteur exact et effaçable, noté $(H^*(X,\cdot), d)$ défini sur $\mathcal{A}b_X$ à valeurs dans la catégorie $\mathcal{A}b$, qui en degré 0 est le foncteur $\Gamma : \mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}(X)$.*

Plus généralement, si

$$T : \mathcal{A} \to \mathcal{A}b$$

est un foncteur additif exact a gauche défini sur une catégorie abélienne $\mathcal{A}$ qui a suffisamment d'injectifs on va construire un ∂–foncteur (R^iT, d) exact et effaçable, dont le degré 0 est $R^0T \simeq T$.

En vertu de la propriété universelle, un tel ∂–foncteur est unique à isomorphisme unique près.

Lemme 5.2. *Soient $(E^*, e), (F^*, f)$ et (G^*, g) des résolutions des objets E, F et G, telles que (G^*, g) soit injective. Soient*

$$E \xrightarrow{a} F \xrightarrow{b} G$$

des morphismes. Si p^*, q^* et r^* sont des morphismes de complexes qui prolongent a, b et $b \circ a$, alors $H^i(Tr^*) = H^i(Tq^*) \circ H^i(Tp^*)$.

Démonstration. En effet r^* et $q^* \circ p^*$ prolongent $b \circ a$. Leur différence prolonge 0, le morphisme nul de E dans G. C'est donc un morphisme homotope à zéro par la proposition 4.3. Son transformé par T l'est aussi. On aura donc $H^i(T(r^* - q^* \circ p^*)) = 0$, d'après (4.5). Par additivité des foncteurs H^i et T, on a le lemme. □

Soient (E^*, e) et (E_1^*, e_1) deux résolutions injectives de E. D'après (4.2) il existe des morphismes de complexes $u^* : E^* \to E_1^*$ et $u_1^* : E_1^* \to E^*$ prolongeant l'identité de E.

En appliquant le lemme (5.2) avec $p^* = u_1^*, q^* = u^*$ et $r^* = id$, puis $p^* = u^*, q^* = u_1^*$ et $r^* = id$, on voit que u^* et u_1^* définissent deux isomorphismes réciproques pour tout $i \geq 0$:

$$H^i(T(E_1^*)) \underset{H^i(T(u^*))}{\overset{H^i(T(u_1^*))}{\rightleftarrows}} H^i(T(E^*))$$

On voit que les groupes ne dépendent pas de la résolution choisie.

Choisissons donc pour chaque objet une résolution injective. Si la résolution de E choisie est (E^*, e), posons $R^iT(E) = H^i(T(E^*))$.

Pour chaque morphisme $a : E \to F$, il existe un morphisme unique à homotopie près $a^* : E^* \to F^*$ qui prolonge a, cf. (4.2) et (4.3). Ceci procure un morphisme $R^iT(a) : R^iT(E) \to R^iT(F)$.

En utilisant le lemme 5.2 on voit que R^iT est un foncteur, évidemment additif.

Le foncteur *exact à gauche* T transforme la suite exacte

$$0 \to E \xrightarrow{e} E^0 \xrightarrow{d} E^1$$

en la suite exacte

$$0 \to T(E) \xrightarrow{T(e)} T(E^0) \xrightarrow{T(d)} T(E^1)$$

Ceci détermine l'isomorphisme entre les foncteurs T et R^0T.

5.2. **Effaçabilité en degré** ≥ 1. Il suffit de vérifier que si I est un objet injectif, alors $R^iT(I) = 0$ pour $i \geq 1$, d'après la proposition 3.2.

En effet, on obtient une résolution injective en augmentant le complexe I^*, défini par $I^0 = I$ et $I^n = 0$ pour $n > 0$, par l'identité de I. Il est alors évident que $H^i(T(I^*)) = 0$ pour $i \geq 1$.

Lemme 5.3. *Soient* $0 \to E \xrightarrow{u} F \xrightarrow{v} G \to 0$ *une petite suite exacte,* (E^*, e) *une résolution injective de* E *et* (G^*, g) *une résolution de* G*. Alors il existe une résolution* (F^*, f) *de* F*, telle que* $F^i = E^i \oplus G^i$*, et des morphismes de résolution prolongeant* u *et* v*:*

$$E^* \xrightarrow{u^*} F^* \xrightarrow{v^*} G^*$$

où u^i *est l'injection canonique et* v^i *la projection canonique.*

Démonstration. On remarque que la suite

$$0 \to E \xrightarrow{u} F \xrightarrow{g \circ v} G^0 \xrightarrow{d} G^1 \xrightarrow{d} \ldots$$

constitue une résolution de E. Il existe un morphisme de résolutions qui prolonge l'identité de E par (4.2):

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & E \arrow[r, "u"] \arrow[d, "id"'] & F \arrow[r, "g \circ v"] \arrow[d, "k^0"] & G^0 \arrow[r, "d"] \arrow[d, "k^1"] & G^1 \arrow[r] \arrow[d, "k^2"] & \ldots \\
0 \arrow[r] & E \arrow[r, "e"] & E^0 \arrow[r, "d"] & E^1 \arrow[r, "d"] & E^2 \arrow[r] & \ldots
\end{tikzcd}$$

En appelant w^i la projection canonique $F^i \to E^i$, on définit la flèche f et la différentielle d de F^* comme suit:

$$f = (k^0, g \circ v) : F \to F^0 = E^0 \oplus G^0$$
$$d = (d \circ w^i + (-1)^{i+1} k^{i+1} \circ v^i, d \circ v^i) : F^i \to F^{i+1}$$

Reste à vérifier les relations de commutation et d'exactitude. On pourra se reporter à Cartan–Eilenberg [2, V,§2], qui traite la situation duale dans les modules, de façon suffisamment générale. □

5.3. **Construction du cobord.** Si $0 \to E \xrightarrow{u} F \xrightarrow{v} G \to 0$ une petite suite exacte, soient (E^*, e) et (G^*, g) les résolutions injectives choisis de E et G (5.1). Les objets $E^i \oplus G^i$ sont injectifs comme sommes directes d'injectifs. La construction du lemme 5.3 nous donne donc une résolution injective (F_1^*, f_1) de l'objet F et une suite exacte de résolutions :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & E \arrow[r, "u"] \arrow[d, "e"] & F \arrow[r, "v"] \arrow[d, "f_1"] & G \arrow[r] \arrow[d, "g"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & E^* \arrow[r, "u^*"] & F_1^* \arrow[r, "v^*"] & G^* \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Les suites $0 \longrightarrow E^i \xrightarrow{u^i} F_1^i \xrightarrow{v^i} G^i \longrightarrow 0$ étant scindées restent exactes après transformation par le foncteur T. On obtient une suite exacte de complexes de groupes abéliens:

$$0 \longrightarrow TE^i \xrightarrow{Tu^i} TF_1^i \xrightarrow{Tv^i} TG^i \longrightarrow 0$$

La construction donnée au paragraphe 4.6 fournit alors des cobords.

Il faut s'assurer de la fonctorialité par rapport aux suites exactes et vérifier l'exactitude.

La construction est indiqué dans Cartan–Eilenberg [2, V,§2].

La fonctorialité du cobord décrit en 4.6 et celle de T donnent le résultat voulu.

Pour l'exactitude, on prend un morphisme de résolutions $(F^*, f) \xrightarrow{j^*} (F_1^*, f_1)$ qui prolonge l'identité de F.

On a un diagramme

$$\begin{tikzcd} & & H^i(TF_1^*) \arrow[dr, "H^i(Tv^*)"] & & \\ R^{i-1}T(G) \arrow[r, "d^{i-1}"] & R^iT(E) \arrow[ur, "H^i(Tu^*)"] \arrow[dr, "R^iT(u)"'] & & R^iT(G) \arrow[r, "d^i"] & R^{i+1}T(E) \\ & & R^iT(F) \arrow[uu, "H^i(Tj^*)"'] \arrow[ur, "R^iT(v)"'] & & \end{tikzcd}$$

La suite du haut est exacte, grâce au théorème de la suite exacte d'homologie (section 4.6).

Celle du bas, qui nous intéresse, l'est aussi parce que $H^i(Tj^*)$ est un isomorphisme (section 5.1) et que les triangles commutent (lemme 5.2).

On est bien arrivé à un ∂–foncteur exact et effaçable prolongeant T.

5.4. **Fonctorialité par rapport à l'espace de base.** On se propose de comparer les cohomologies des faisceaux de groupes abéliens sur Y et celles de leurs images réciproques par une application continue $f : X \to Y$.

Le morphisme d'adjonction de foncteurs de $\mathcal{A}b_Y$ dans elle–même $id \to f_*f^*$ fournit un morphisme de foncteurs de $\mathcal{A}b_Y$ dans la catégorie des groupes abéliens:

$$\Gamma(Y, \cdot) \to \Gamma(Y, f_*f^* \cdot) = \Gamma(X, f^* \cdot)$$

Comme le foncteur f^* est exact, on obtient en le composant avec le ∂–foncteur $(H^*(X,\cdot),d)$ un nouveau ∂–foncteur cohomologique défini sur $\mathcal{A}b_Y$:

$$(H^*(X,f^*\cdot),d\circ f^*)$$

Comme le ∂–foncteur $(H^*(Y,\cdot),d)$ est *universel*, le morphisme en degré $0:\Gamma(Y,\cdot)\to\Gamma(X,f^*\cdot)$ se prolonge de manière unique en un morphisme de ∂–foncteurs:

$$(H^*(Y,\cdot),d)\to(H^*(X,f^*\cdot),d\circ f^*)$$

6. Résolutions cohomologiquement triviales

Soit $\mathcal{E}$ un faisceau sur X. Une résolution de $\mathcal{E}$ par des faisceaux injectifs $\mathcal{I}^n$ permet de calculer les groupes $H^p(X,\mathcal{E})=H^p(\Gamma\mathcal{I}^*)$ par définition. En fait, il suffit, pour connaître $H^p(X,\mathcal{E})$ d'avoir une résolution de $\mathcal{E}$ par des faisceaux $\mathcal{F}^n$ vérifiant seulement $H^i(X,\mathcal{F}^n)=0$ pour tout $i\geq 1$.

6.1. **Le morphisme du cobord itéré.** Soit $0\to\mathcal{E}\longrightarrow\mathcal{F}^0\xrightarrow{d^0}\mathcal{F}^1\xrightarrow{d^1}\mathcal{F}^2\xrightarrow{d^2}\dots$ une résolution quelconque de $\mathcal{E}$. Découpons cette résolution en petites suites exactes, en posant $\mathcal{K}^n=\operatorname{Ker}(\mathcal{F}^n\to\mathcal{F}^{n+1})$. On obtient, au rang n:

$$S_n:0\to\mathcal{K}^n\to\mathcal{F}^n\to\mathcal{K}^{n+1}\to 0$$

Si (H,δ) est un ∂–foncteur quelconque, il résulte de S_n un complexe:

$$\dots\to H^p(X,\mathcal{F}^n)\to H^p(X,\mathcal{K}^{n+1})\xrightarrow{\delta^p S_n}H^{p+1}(X,\mathcal{K}^n)\to H^{p+1}(X,\mathcal{F}^n)\to\dots$$

En itérant le cobord δ, on obtient un morphisme:

$$H^1(X,\mathcal{K}^{n-1})\xrightarrow{\delta^1}H^2(X,\mathcal{K}^{n-2})\xrightarrow{\delta^2}\dots\to H^{n-1}(X,\mathcal{K}^1)\xrightarrow{\delta^{n-1}}H^n(X,\mathcal{E})$$

Supposons de plus que $H^0=\Gamma$ et regardons un morceau du complexe attaché à S_{n-1}:

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r] & \Gamma(X,\mathcal{F}^{n-1}) \arrow[r, "d^{n-1}"] & \Gamma(X,\mathcal{K}^n) \arrow[r, "\delta^0"] \arrow[dr, "\chi"'] & H^1(X,\mathcal{K}^{n-1}) \arrow[r] & H^1(X,\mathcal{F}^{n-1})\cdots \\
& & & \Gamma(X,\mathcal{K}^n)/\operatorname{Im} d^{n-1} \arrow[u, dashed, "\theta"'] \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
& & & H^n(\Gamma(X,\mathcal{F}^*)) &
\end{tikzcd}$$

Par la propriété universelle du conoyau $H^n(\Gamma(X,\mathcal{F}^*))$, il existe une unique flèche θ, rendant commutatif le triangle. En composant θ avec les morphismes trouvée plus haut, on obtient alors un morphisme *du cobord itéré*:

$$\varepsilon^n(\mathcal{F}^*):H^n(\Gamma(X,\mathcal{F}^*))\longrightarrow H^n(X,\mathcal{E})$$

On laisse au lecteur le soin d'expliquer en quel sens ε^n est un morphisme fonctoriel en $\mathcal{F}^*$.

6.2. **Résolutions par des objets cohomologiquement triviaux.** Il existe ainsi un cobord itéré pour une résolution quelconque, et pour un ∂–foncteur (H,δ) quelconque, vérifiant seulement $H^0 = \Gamma$. Si de plus (H,δ) est cohomologique et si les faisceaux $\mathcal{F}^n$ ont une cohomologie nulle, on obtient le

Théorème 6.1. *Soit $0 \to \mathcal{E} \to \mathcal{F}^0 \to \mathcal{F}^1 \to \dots$ une résolution de $\mathcal{E}$ par des faisceaux vérifiant $H^p(\mathcal{F}^n) = 0$ pour tout $p \geq 1$ et tout $n \geq 0$. Soit (H,δ) un ∂–foncteur cohomologique. Alors le cobord itéré $\varepsilon^n\mathcal{F}^*$ est un isomorphisme $H^n(\Gamma(X,\mathcal{F}^*)) \xrightarrow{\sim} H^n(X,\mathcal{E})$.*

Démonstration. En effet, la suite *exacte* de cohomologie attachée à S_n s'écrit alors: $\dots \longrightarrow 0 \longrightarrow H^p(X,\mathcal{K}^{n+1}) \xrightarrow{\delta^p} H^{p+1}(X,\mathcal{K}^n) \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots$ et $\delta^p S_n$ est donc un isomorphisme. De plus, dans la suite de cohomologie de S_{n-1}, $H^1(X,\mathcal{F}^{n-1})$ est nul et $H^1(X,\mathcal{K}^{n-1})$ apparaît alors comme un conoyau de la flèche

$$\Gamma(X,\mathcal{F}^{n-1}) \xrightarrow{d^{n-1}} \Gamma(X,\mathcal{K}^n)$$

comme aussi $H^n(\Gamma(X,\mathcal{F}^*))$, et $\theta : H^n(\Gamma(X,\mathcal{F}^*)) \xrightarrow{\sim} H^1(X,\mathcal{K}^{n-1})$ est donc aussi un isomorphisme, d'où le théorème. □

6.3. **Une autre construction du cobord itéré.** Si $0 \to \mathcal{E} \to \mathcal{F}^0 \to \mathcal{F}^1 \to \dots$ est une résolution de $\mathcal{E}$, on peut définir d'autres morphismes

$$a^n : H^n(\Gamma(X,\mathcal{F}^*)) \to H^n(X,\mathcal{E})$$

de la manière suivante. On rappelle qu'on a choisi une résolution injective $(\mathcal{I}^*, i)$ de $\mathcal{E}$, et posé par définition:

$$H^n(X,\mathcal{E}) = H^n(\Gamma(X,\mathcal{I}^*))$$

Mais il existe un morphisme de résolutions $\alpha^* : \mathcal{F}^* \to \mathcal{I}^*$ prolongeant l'identité $\mathcal{E} \to \mathcal{E}$ (cf. plus haut). Alors a^n est induit par α^*:

$$a^n = H^n(\Gamma(X,\alpha^*))$$

On montre alors (Cartan-Eilenberg [2, V §7, Prop. 7.1]) que :

$$\boxed{\varepsilon^n\mathcal{F}^* = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} a^n}$$

6.4. **Résolutions flasques.**

Lemme 6.2. *Soit $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne ayant suffisamment d'injectifs et soit $T : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}b$ un foncteur exact à gauche.*

Soit $\mathcal{B}$ une sous–catégorie de $\mathcal{A}$ satisfaisant aux conditions:

(1) Tout injectif est dans $\mathcal{B}$.
(2) Si un objet E de $\mathcal{A}$ est dans $\mathcal{B}$, toute suite exacte $0 \to E \to F \to G \to 0$ dans $\mathcal{A}$ est transformée par T en suite exacte.
(3) Tout objet quotient d'objets de $\mathcal{B}$ est dans $\mathcal{B}$.

Alors pour tout objet E de $\mathcal{B}$, on a $R^iT(E) = 0$ pour $i > 0$.

Démonstration. Si E est un objet de $\mathcal{B}$ on peut en construire une résolution injective:

$$0 \to E \to E^0 \to E^1 \to E^2 \to \cdots$$

Le quotient F^1 de E^0 par E est dans $\mathcal{B}$ grâce à (1) et (3). De proche en proche on voit que les quotients F^{i+1} de E^i par F^i sont dans $\mathcal{B}$. Les petites suites exactes $0 \to F^i \to E^i \to F^{i+1} \to 0$ sont transformées par T en suites exactes $0 \to T(F^i) \to T(E^i) \to T(F^{i+1}) \to 0$ grâce à (2). Or $R^{i+1}T(E)$ est justement le quotient de $T(F^{i+1})$ par l'image de $T(E^i)$ pour $i \geq 0$ et ce quotient est nul. □

Définition 6.3. *Un faisceau est* flasque *si les morphismes de restriction sont des épimorphismes.*

6.4.1. *Résolution canonique.* On peut envoyer tout faisceau dans un faisceau flasque de la manière suivante. Si X est l'espace de base, on définit $Y \xrightarrow{f} X$ comme dans la preuve du théorème 3.6. Ceci donne lieu au morphisme canonique d'adjonction $\mathcal{F} \to f_* f^* \mathcal{F}$ de faisceaux sur X. C'est un monomorphisme, parce que f est surjective.

De plus, tout faisceau sur un espace discret est évidemment flasque, et l'image directe d'un faisceau flasque par une application continue est flasque ; le faisceau $f_* f^* \mathcal{F}$ est donc flasque.

On obtient ainsi une résolution

$$0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}^0 \xrightarrow{d^0} \mathcal{F}^1 \xrightarrow{d^1} \cdots$$

où les $\mathcal{F}^i$ sont flasques en prenant

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^0 &= f_* f^* \mathcal{F} \\ \mathcal{F}^1 &= f_* f^* (\mathcal{F}^0 / \mathcal{F}) \\ \mathcal{F}^{i+1} &= f_* f^* (\mathcal{F}^i / \operatorname{Im} d^{i-1}) \end{aligned}$$

avec les morphismes évidents.

La construction est visiblement fonctorielle.

6.4.2. *Propriétés des faisceaux flasques.* Montrons que la sous–catégorie des faisceaux flasques de $\mathcal{A}b_X$ satisfait aux conditions du lemme 6.2 pour le foncteur Γ.

Démonstration. Prouvons (1) du lemme 6.2.

Soit $\mathcal{I}$ un faisceau injectif sur X. On peut l'envoyer dans le faisceau flasque $f_* f^* \mathcal{I}$ par un monomorphisme, qui admet une rétraction r puisque $\mathcal{I}$ est injectif. Considérons le diagramme

$$\begin{tikzcd} f_* f^* \mathcal{I}(X) \arrow[r, "r(X)"] \arrow[d] & \mathcal{I}(X) \arrow[d] \\ f_* f^* \mathcal{I}(U) \arrow[r, "r(U)"'] & \mathcal{I}(U) \end{tikzcd}$$

Les flèches horizontales sont des rétractions, donc des épimorphismes. La flèche de gauche est un épimorphisme, donc celle de droite aussi. $\mathcal{I}$ est flasque.

Les condition (2) et (3) du lemme 6.2 sont le théorème 3.1.2 et son corollaire dans Godement [4, II.3.1]. □

La cohomologie pourra se calculer à l'aide des résolutions flasques, comme on a vu au théorème 6.1. C'est ce que fait Godement [4, II.4.4]. La résolution canonique présente le double avantage d'être fonctorielle, donc de fournir les images des morphismes par le ∂–foncteur universel $(H^*(X, .), d)$ et d'éviter le choix de résolutions injectives.

7. Théorème de De Rham

Soit V une variété différentiable $\mathcal{C}^\infty$ paracompacte (c'est-à-dire une variété dont les composantes connexes sont dénombrables à l'infini).

On considère sur V le faisceau constant $\mathbf{R}_V$ (faisceau associé au préfaisceau constant $U \mapsto \mathbf{R}$), et les faisceaux $(\mathcal{E}^i_V)_{i\geq 0}$, $\mathcal{E}^i_V$ étant le faisceau des germes de formes différentielles $\mathcal{C}^\infty$ sur V de degré i.

On a un complexe $(\mathcal{E}^*_V)$:

$$0 \to \mathbf{R}_V \to \mathcal{E}^0_V \xrightarrow{d^0} \mathcal{E}^1_V \to \cdots \to \mathcal{E}^i_V \xrightarrow{d^i} \mathcal{E}^{i+1}_V \to \dots$$

envoyant $\mathbf{R}_V$ sur les germes d'applications localement constantes, et d^i étant la différentielle extérieure.

$\mathcal{E}^*_V$ est une résolution de $\mathbf{R}_V$ d'après le lemme de Poincaré (voir H. Cartan [1, ch.II, th.2.12.1]). D'après section 6.1 on a des morphismes de cobord itéré:

$$H^n(\Gamma(V, \mathcal{E}^*_V)) \to H^n(V, \mathbf{R}_V)$$

Le théorème de De Rham affirme que ce sont des isomorphismes.

D'après le théorème 6.1, il suffit de montrer:

$$\forall\, i > 0\, \forall\, j \geq 0 \quad H^i(V, \mathcal{E}^j_V) = 0$$

Cela résulte de la

Proposition 7.1. *Soit V une variété $\mathcal{C}^\infty$ paracompacte, et $\mathcal{F}$ un faisceau de modules sur $\mathcal{E}^0_V$. Alors on a*

$$\forall\, i > 0 \quad H^i(V, \mathcal{F}) = 0$$

La proposition 7.1 se déduira des propositions 7.5 et 7.6. Auparavant, dégageons deux lemmes, et une définition.

Définition 7.2. *Soient X un espace topologique et $\mathfrak{Z}$ un système cofinal de recouvrements de X, enfin $\mathcal{F}$ un faisceau de groupes abéliens sur X. On dit que $\mathcal{F}$ vérifie $P(\mathfrak{Z})$ lorsque:*

$\forall\,(U_i)_{i\in I} \in \mathfrak{Z}$, $\forall\,(f_{ij})_{ij} \in \prod_{(i,j)\in I^2} \mathcal{F}(U_i \cap U_j)$ vérifiant pour tous i, j, k $f_{ij} + f_{jk} + f_{ki} = 0$ sur $U_i \cap U_j \cap U_k$, il existe $(\lambda_i)_i \in \prod_{i\in I} \mathcal{F}(U_i)$ tel que pour tous i et j, $f_{ij} = \lambda_i - \lambda_j$ sur $U_i \cap U_j$.

Lemme 7.3. *Si $0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G} \xrightarrow{\beta} \mathcal{K} \to 0$ est une petite suite exacte de faisceaux où $\mathcal{F}$ vérifie $P(\mathfrak{Z})$, alors la suite*

$$0 \to \mathcal{F}(X) \xrightarrow{\alpha(X)} \mathcal{G}(X) \xrightarrow{\beta(X)} \mathcal{K}(X) \to 0$$

est exacte.

Démonstration. Soit en effet $k \in \mathcal{K}(X)$. Comme β est localement surjective, il existe un recouvrement (U_i) de X qu'on peut supposer appartenir à $\mathfrak{Z}$, et une famille $(g_i) \in \prod_{i\in I} \mathcal{G}(U_i)$ telle que $k|U_i = \beta(U_i)g_i$. Alors

$$\beta(U_i \cap U_j)(g_i|U_i \cap U_j - g_j|U_i \cap U_j) = 0$$

Donc il existe une famille $f_{ij} \in \mathcal{F}(U_i \cap U_j)$ telle que $\alpha(f_{ij}) = g_j - g_i$. Et α étant injective, comme $\alpha(f_{ij} + f_{jk} + f_{ki}) = 0$ sur $U_i \cap U_j \cap U_k$; alors $f_{ij} + f_{jk} + f_{ki} = 0$ sur $U_i \cap U_j \cap U_k$ quel que soit i, j, k. De $P(\mathfrak{Z})$ on déduit qu'il existe une famille $\lambda_i \in \mathcal{F}(U_i)$ telle que $f_{ij} = \lambda_i - \lambda_j$ sur $U_i \cap U_j$. Posant $g'_i = g_i - \alpha(U_i)(\lambda_i) \in \mathcal{G}(U_i)$, on observe que les g'_i se recollent en $g' \in \mathcal{G}(X)$, et on vérifie que $\beta(g') = k$ car: $\forall i \in I$ $\beta(U_i)(g'|U_i) = \beta(U_i)(g'_i) = \beta(U_i)(g_i - \alpha(U_i)(\lambda_i)) = \beta(U_i)(g_i) = k|U_i$ puisque $\beta(U_i) \circ \alpha(U_i) = 0$. $\square$

Corollaire 7.4. *Si $\mathcal{F}$ vérifie $P(\mathfrak{Z})$ on a $H^1(X, \mathcal{F}) = 0$.*

Démonstration. En effet soit $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{K} \to 0$ une suite exacte avec $\mathcal{G}$ injectif. Alors la suite

$$0 \to \mathcal{F}(X) \to \mathcal{G}(X) \to \mathcal{K}(X) \to H^1(X, \mathcal{F}) \to 0$$

est exacte et d'après le lemme 7.3, ceci entraîne que $H^1(X, \mathcal{F}) = 0$. □

Proposition 7.5. *Soit X un espace topologique, $\mathfrak{Z}$ une famille cofinale de recouvrements de X. Soit $\mathcal{C}$ une classe de faisceaux sur X vérifiant les propriétés suivantes:*

(1) $P(\mathfrak{Z})$
(2) $(Q)\ \forall\, \mathcal{E} \in \mathcal{C} \quad \exists\, 0 \to \mathcal{E} \to \mathcal{I} \to \mathcal{K} \to 0$ *exacte avec $\mathcal{I}$ injectif et $\mathcal{I}, \mathcal{K} \in \mathcal{C}$.*

Alors $\forall\, \mathcal{F} \in \mathcal{C}\ \forall n \geq 1 \quad H^n(X, \mathcal{F}) = 0$.

Démonstration. On raisonne par récurrence sur $n \geq 1$.

D'après le corollaire 7.4, $H^1(X, \mathcal{F}) = 0$.

Supposons que pour $n \leq p$ $H^n(X, \mathcal{F}) = 0$, quel que soit $\mathcal{F} \in \mathcal{C}$. Soit alors $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{K} \to 0$ une suite exacte d'objets de $\mathcal{C}$ telle que $\mathcal{G}$ soit injectif, suite dont (Q) garantit l'existence. On a la suite exacte:

$$H^p(X, \mathcal{K}) \to H^{p+1}(X, \mathcal{F}) \to H^{p+1}(X, \mathcal{G})$$

dont les deux extrémités sont nulles, $H^p(X, \mathcal{K})$ d'après l'hypothèse de récurrence, $H^{p+1}(X, \mathcal{G})$ puisque $\mathcal{G}$ est injectif. Donc $H^{p+1}(X, \mathcal{F}) = 0$. □

Proposition 7.6. *Soit V une variété paracompacte. Soit $\mathfrak{Z}$ l'ensemble des recouvrements de V tels qu'un ouvert de ce recouvrement n'en rencontre qu'un nombre fini d'autres. Soit $\mathcal{C}$ la classe des faisceaux de modules sur $\mathcal{E}^0_V$. Alors: $\mathfrak{Z}$ est un ensemble cofinal de recouvrements de V et $\mathcal{C}$ vérifie $P(\mathfrak{Z})$ et (Q).*

Démonstration. 1) $\mathcal{C}$ vérifie (Q). Cela provient de ce que la construction classique du plongement d'un faisceau dans un faisceau injectif ne fait pas sortir de la catégorie des modules sur un faisceau d'anneaux si on y est déjà, et que le quotient d'un faisceau de modules par un autre est encore un faisceau de modules.

2) $\mathcal{C}$ vérifie $P(\mathfrak{Z})$. Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{E}^0_V$–module. Soit $(U_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de V appartenant à $\mathfrak{Z}$ et soit $m \in \prod_{(i,j) \in I^2} \mathcal{M}(U_i \cap U_j)$ tel que $\forall\, (i, j, k) \in I^3$ on ait $m_{ij} + m_{jk} = m_{ik}$ sur $U_i \cap U_j \cap U_k$. Il existe alors une partition $\mathcal{C}^\infty$ de l'unité sur V subordonnée au recouvrement $(U_i)_i$ (G. de Rham, [6, I, §2, th.1]) c'est-à-dire qu'il existe:

(1) des fermés $(F_i)_{i \in I}$, $F_i \subset U_i$
(2) des fonction $\mathcal{C}^\infty$ $\varphi_i : V \to \mathbf{R}$ à support compact contenu dans F_i et telles que $\forall\, x \in V \quad \sum_{i \in I} \varphi_i(x) = 1$

La somme $n_i = \sum_{k \in I} \varphi_k m_{ik}$ est définie sur U_i (et même sur V) et sur $U_i \cap U_j$ on a

$$n_i - n_j = \sum_{k \in I} \varphi_k (m_{ik} - m_{jk}) = \sum_{k \in I} \varphi_k m_{ij} = m_{ij}$$

□

Références

[1] Henri Cartan, *Cours de Calcul différentiel*, Collection Méthodes, Hermann, Paris, 1977, nouveau tirage 1997.

[2] Henri Cartan and Samuel Eilenberg, *Homological Algebra*, Princeton Mathematical Series, vol. 19, Princeton University Press, Princeton, 1956.

[3] Jean Giraud, *Cours de C3 : Surfaces de Riemann compactes (1969-1970)* (2005), available at http://sites.mathdoc.fr/PMO/PDF/J_GIRAUD_1969-70.pdf.

[4] Roger Godement, *Topologie algébrique et théorie des faisceaux*, Publications de l'Institut de Mathématique de l'Université de Strasbourg, vol. XIII, Hermann, Paris, 1958, 1998.

[5] Serge Lang, *Algebra*, 3rd ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 211, Springer, 2002.

[6] Georges de Rham, *Variétés différentiables*, Publications de l'Institut de Mathématique de l'Université de Nancago, vol. III, Hermann, Paris, 1982.

Index