WELLENGESCHWINDIGKEIT

BERNDT E. SCHWERDTFEGER

Für Gerhard

ZUSAMMENFASSUNG. Dieser Artikel behandelt die *Rumpfgeschwindigkeit* von *Verdrängerbooten*.

VORWORT

Wasser ist inkompressibel und setzt einem Bootskörper einen massiven Widerstand entgegen. Ein Boot in Fahrt schiebt eine Wassermenge vom Gewicht des Bootes beiseite (Prinzip das ARCHIMEDES). Es erzeugt ein Wellensystem (Bug- und Heckwelle), dem es nicht entkommen kann, solange es mit seiner ganzen Bootslänge im Wasser bleibt (sog. *Verdränger*). Die maximal erreichbare Grenzgeschwindigkeit eines *Verdrängerboots* wird als *Rumpfgeschwindigkeit* bezeichnet. Sie ist proportional zur Quadratwurzel der Wasserlinienlänge des Bootes.

In Büchern zur Seemannschaft findet man für die *Rumpfgeschwindigkeit* die Formel

(1) $$v = R \cdot \sqrt{L}$$ [2, Rumpffahrt], [3, p. 148, 159]

mit der Geschwindigkeit v und der Länge der Wasserlinie L. Der Proportionalitätsfaktor wird mit $R = 2,43$ angegeben, wenn v in `kn` (*Knoten*=Seemeilen pro Stunde) und L in `m` (*Metern*) gemessen wird. In diesem Artikel erkläre ich die Formel (1) und den Faktor R.

Berlin, 31. Oktober 2014

 v1.0

1. RUMPFGESCHWINDIGKEIT

Wir notieren einige einfache Formeln, aus denen sich (1) und die Bedeutung des Faktors R ergibt. Die Formeln werden im Abschnitt 2 begründet.

Wir betrachten eine *Welle* der Länge λ, die sich während der *Periode* T fortbewegt. Dann ist die *Geschwindigkeit* c der Welle

(2) $$c = \frac{\lambda}{T}$$ (Phasengeschwindigkeit)

Statt der Periode wird ihre *Frequenz* betrachtet

(3) $$\omega = \frac{2\pi}{T}$$ (Kreisfrequenz)

und ihre *Wellenzahl*

(4) $$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$ (Kreiswellenzahl)

2010 *Mathematics Subject Classification.* Primary 76B15; Secondary 76B20.
Key words and phrases. Rumpfgeschwindigkeit, Schwerewellen, Dispersion.

Dann gilt für c auch

$$c = \frac{\omega}{k} \tag{5}$$

Es gibt einen Zusammenhang zwischen *Frequenz* und *Wellenzahl*: das *Dispersionsgesetz*

$$\omega^2 = kg \tag{6}$$

Aus (5) und (6) ergibt sich

$$c^2 = \frac{g}{k} = \frac{g}{2\pi} \cdot \lambda \tag{7}$$

Aus (7) ergibt sich (1) und die Bedeutung des Faktors R ist

$$R = \sqrt{\frac{g}{2\pi}} \tag{8}$$

was nach Umrechnung auf Seemeilen und mit der *Erdbeschleunigung* $g = 9.81\,\mathtt{m/s}^2$ den im Vorwort gegebenen Wert ergibt

$$R = \sqrt{\frac{9.81}{2\pi}} \cdot \frac{3.6}{1.852} = 2.42888$$

2. Hydrodynamik der Schwerewellen

Die Bewegungsgleichungen einer inkompressiblen Flüssigkeit unter dem Einfluss der *Schwere* entnehmen wir der Hydrodynamik [1, §12. Schwerewellen].

Unter der Annahme $a \ll \lambda$, die *Amplitude* a der Schwingungen in der Welle ist *klein* gegenüber der Wellenlänge λ, vereinfacht sich die *Kontinuitätsgleichung* und die EULER*sche Gleichung* zu [1, (12,4-5)]

$$\Delta\varphi = 0 \tag{9}$$

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z} + \frac{1}{g}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\right)\Big|_{z=0} = 0 \tag{10}$$

Wir betrachten die unbegrenzte Oberfläche einer inkompressiblen Flüssigkeit, auf der sich eine Schwerewelle in x-Richtung ausbreitet und in y-Richtung homogen ist. Die Gravitation wirke in z-Richtung. Die gesuchte Potentialfunktion φ wird als einfache periodische Funktion der Zeit t und des Ortes x angesetzt

$$\varphi = \cos(kx - \omega t)f(z)$$

ω ist die *Kreisfrequenz* der Welle, k ist die *Wellenzahl*, $\lambda = 2\pi/k$ die *Wellenlänge*, d.h. die Periode für die Änderung der Strömung entlang der x-Achse in einem festen Zeitpunkt. Aus (9) ergibt sich die Differentialgleichung

$$f'' = k^2 f$$

und f liegt in dem zwei dimensionalen Lösungsraum

$$\mathbf{R}\cosh(kz) \oplus \mathbf{R}\sinh(kz) = \mathbf{R}\exp(kz) \oplus \mathbf{R}\exp(-kz).$$

Wir berücksichtigen diese Bedingungen:

- die Wellenlänge ist *klein* gegenüber der Tiefe der Flüssigkeit
- die Tiefe der Flüssigkeit ist $-h$

Im letzten Fall muss als Randbedingung am Boden der Flüssigkeit die Normalkomponente der Geschwindigkeit verschwinden

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z}|_{z=-h} = 0 \quad \text{d.h. } f'(-h) = 0$$

Diese Bedingung impliziert für $f(z) = ae^{kz} + be^{-kz}$ die Relation $ae^{-kh} = be^{kh}$, also dass $f(z) = 2ae^{-kh}\cosh k(z+h)$.

Im Falle *kleiner* Wellenlänge gegenüber der Tiefe der Flüssigkeit ist die Lösung, die in der Tiefe abklingt (d.h. bei $z \to -\infty$)

$$\varphi = Ae^{kz}\cos(kx - \omega t)$$

Im Falle einer Flüssigkeit der Tiefe $-h$ ist die Lösung

$$\varphi = A\cos(kx - \omega t)\cosh k(z+h)$$

Wird φ in die EULER Gleichung (10) eingesetzt, erhalten wir bis auf den Faktor $A\cos(kx-\omega t)$: $k - \omega^2/g = 0$ resp. $k\sinh kh - \omega^2\cosh kh/g = 0$, also schließlich

$$\omega^2 = kg \quad \text{resp.} \tag{11}$$

$$\omega^2 = kg\tanh kh \tag{12}$$

Diese Beziehung zwischen der *Frequenz* ω und der *Wellenzahl* k wird *Dispersionsgesetz* genannt. Natürlich geht für $kh \to \infty$, d.h. wenn $\lambda \ll h$, (12) in (11) über.

Die Geschwindigkeitsverteilung in der bewegten Flüssigkeit ist der Gradient der Potentialfunktion (Fall $\lambda \ll h$)

$$\nabla\varphi = Ake^{kz}(-\sin(kx-\omega t), 0, \cos(kx-\omega t))$$

Die Geschwindigkeit nimmt also mit zunehmender Tiefe exponentiell ab und die einzelnen Flüssigkeitsteilchen beschreiben nahezu *Kreise* um ihre Gleichgewichtslage (im Fall endlicher Tiefe sind es *Ellipsen*).

LITERATUR

[1] Lev D. Landau and Jevgeni M. Lifschitz, *Hydrodynamik*, Lehrbuch der Theoretischen Physik, Verlag Harri Deutsch, Frankfurt am Main, 2007.

[2] Joachim Schult, *Segler Lexikon*, Delius Klasing, 2008.

[3] Deutscher Hochseesportverband Hansa (ed.), *Seemannschaft*, Delius Klasing, 2008.