INTRODUCTION À L'ÉTUDE DES VARIÉTÉS KÄHLÉRIENNES

ANDRÉ WEIL

Note à cette édition en TEX. L'édition en TEX v1.0 du fascicule de WEIL [12] servira de le rendre disponible à nouveau, les éditions chez HERMANN étant épuisées depuis des années. Les numérotations et les références profitons des mécanismes de TEX. Les chapitres et n$^{\mathrm{os}}$ dans [12] correspondent aux sections et sous-sections ci-dessous ; tous les théorèmes, lemmes, propositions et corollaires sont numéroté univoquement suivant les sections, de même pour les équations. Les notes à la marge indiquent les n$^{\mathrm{os}}$, pages, lemmes, proposition etc. du fascicule [12]. J'ai ajouté des références bibliographiques, élargi l'index terminologique et corrigé des fautes d'impression.

Berlin, 29 janvier 2015 Berndt E. Schwerdtfeger

TABLE DES MATIÈRES

PRÉFACE 9

La théorie des variétés kählériennes a pris un grand essor depuis un quart de siècle. Ces variétés furent définies pour la première fois, semble-t-il, dans une note de KÄHLER de 1933 ([7]). Mais leur importance n'apparut qu'à la suite des premiers travaux de HODGE et surtout de l'exposé d'ensemble qu'il en donna au chapitre V de

Date: 29 Avril 2015.
2010 *Mathematics Subject Classification.* Primary 32Q15; Secondary 11G10, 14K20, 14K25.
Key words and phrases. Variétés kählériennes, variétés abéliennes, fonctions thêta.

son livre [6], où, indépendamment de Kähler, il entreprend l'étude systématique de la métrique « kählérienne » qu'on peut définir sur toute variété algébrique sans point multiple plongée dans un espace projectif, et en tire des conséquences très importantes pour la géométrie algébrique. C'est principalement dans la direction ainsi inaugurée par lui que les recherches se sont poursuivies depuis lors.

On ne trouvera pas ici une monographie de ce sujet, mais, comme l'indique le titre, une simple introduction, basée sur des cours professés à Chicago et à Göttingen dans les dernières années. Ce volume aura atteint son but s'il facilite au lecteur l'étude des travaux récents sur la question, et particulièrement de ceux de Kodaira et ses élèves. Je n'ai pu néanmoins résister à la tentation d'insérer un chapitre traitant de la théorie des fonctions thêta et des variétés abéliennes sur le corps des complexes. Cette théorie peut être considérée comme celle d'un type particulier de structures kählériennes (les structures invariantes d'un tore), et c'est même ce point de vue qui conduit à la démonstration la plus naturelle d'un des principaux théorèmes d'existence de la théorie (le théorème dit « d'Appell-Humbert »).

Il n'a pas été donné de bibliographie ; on en trouve de fort complètes dans plusieurs ouvrages récents. Je me suis efforcé de réduire au minimum la somme de
10 connaissances exigée du lecteur : quelques résultats élémentaires d'analyse et de théorie des fonctions ; quelques notions d'algèbre et de topologie générale (pour lesquelles il sera en général renvoyé aux *Eléments* de N. Bourbaki) ; les définitions essentielles de la théorie des variétés différentiables (qu'on trouvera dans le volume de G. de Rham [10], paru dans cette même collection) ; la définition des opérateurs $*, \delta, \Delta$ de la théorie des formes harmoniques (exposée dans le même volume) ; et, en quelques points, quelques notions sur la cohomologie entière. Encore ai-je, dans la mesure du possible, rappelé les définitions et résultats dont il aura à être fait usage. L'indication « de Rham, §… » renverra toujours au volume qu'on vient de citer ; les renvois à Bourbaki seront faits sous la forme canonique. Des théorèmes d'existence de la théorie des formes harmoniques, qui jouent bien entendu un rôle essentiel dans le présent volume, le lecteur n'a à connaître que l'existence des opérateurs H et G de de Rham avec les propriétés formelles énoncées au §4.1. Pour le cas particulier des tores, une démonstration directe de ces résultats, indépendante de celle qui est donnée dans le volume de de Rham pour le cas général, est exposée au §4.2, ce qui permettrait, si on le désirait, d'aborder la théorie des fonctions thêta sans s'appuyer sur la théorie générale des formes harmoniques.

Paris, le 31 mai 1957.

11

1. L'algèbre extérieure sur un espace hermitien

n° 1 1.1. Soit T un espace vectoriel de dimension finie n sur le corps $\mathbf{C}$ des nombres complexes ; T sera de dimension $2n$ sur le corps $\mathbf{R}$ des nombres réels. Soit F l'ensemble des applications $\mathbf{R}$-linéaires de T dans $\mathbf{C}$; autrement dit, F est l'ensemble des fonctions $t \mapsto f(t)$ *à valeurs complexes*, définies sur T et telles que

$$f(t+t') = f(t) + f(t') \qquad (t \in T, t' \in T) \tag{1.1}$$

$$f(\lambda t) = \lambda f(t) \qquad (t \in T, \lambda \in \mathbf{R}) \tag{1.2}$$

On considérera F comme espace vectoriel sur $\mathbf{C}$, l'addition et la multiplication scalaire par les complexes y étant définies d'une manière évidente. Si $f \in F$, on désignera par $\bar{f}$ l'application $t \mapsto \overline{f(t)}$, où $\overline{f(t)}$ est l'imaginaire conjuguée de $f(t)$. L'application $f \mapsto \bar{f}$ est une application *antilinéaire* de F sur F ; rappelons qu'on appelle ainsi toute application $u \mapsto \varphi(u)$ d'un espace vectoriel sur $\mathbf{C}$ dans un espace vectoriel sur $\mathbf{C}$ qui satisfait à

$$\varphi(u+u') = \varphi(u) + \varphi(u'), \quad \varphi(\lambda u) = \bar{\lambda}\varphi(u)$$

quels que soient u, u' et quel que soit $\lambda \in \mathbf{C}$. On dira que $f \in F$ est *réelle* si l'application $t \mapsto f(t)$ est à valeurs réelles ; il faut et il suffit pour cela que $f = \bar{f}$.

Soit T' le *dual* de T, c'est-à-dire l'ensemble des formes $\mathbf{C}$-linéaires sur T ; T' n'est autre que l'ensemble des $f \in F$ qui satisfont à $f(it) = if(t)$ pour tout $t \in T$; c'est un sous-espace vectoriel de F de dimension n. Soit T'' l'image de T' par l'application $f \mapsto \bar{f}$ de F sur F ; T'' est l'ensemble des applications antilinéaires
de T dans $\mathbf{C}$, ou encore l'ensemble des $f \in F$ qui satisfont à $f(it) = -if(t)$ pour 12
tout $t \in T$; c'est donc aussi un sous-espace vectoriel de F sur $\mathbf{C}$. On dira que T'', muni de la structure d'espace vectoriel sur $\mathbf{C}$ induite par celle de F, est l'*antidual* de T ; $f \mapsto \bar{f}$ est une application biunivoque antilinéaire, donc à plus forte raison $\mathbf{R}$-linéaire, de T' sur T'' ; par suite, T' et T'' ont même dimension $2n$ sur $\mathbf{R}$, donc aussi même dimension n sur $\mathbf{C}$.

Il est clair que $T' \cap T'' = \{0\}$. Soit $f \in F$; posons

$$f'(t) = f(t) - if(it), f''(t) = f(t) + if(it)$$

Il est immédiat que $f' \in T', f'' \in T''$ et $2f = f' + f''$. Donc F est somme directe de T' et T'' ; par suite, si $(z_1, \dots, z_n)$ est une base de T', $(z_1, \dots, z_n, \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n)$ en est une pour F.

Suivant l'usage, on désignera par $\bigwedge F$ l'algèbre extérieure déduite de l'espace vectoriel F sur $\mathbf{C}$. On considéra les algèbres extérieures $\bigwedge T', \bigwedge T''$ construites sur T', T'' comme canoniquement plongées dans $\bigwedge F$. On posera $F_{a,0} = \bigwedge^a T'$; c'est l'ensemble des éléments homogènes de $\bigwedge T'$ de degré a, c'est-à-dire l'espace des éléments de la forme $z_1 \wedge \cdots \wedge z_a$, où $z_\alpha \in T'$ pour $1 \leq \alpha \leq a$, à condition de convenir que ce produit désigne 1 si $a = 0$. De même, on posera $F_{0,a} = \bigwedge^a T''$. On désignera par $F_{a,b}$ le sous-espace vectoriel de $\bigwedge F$ engendré par les éléments de la forme $u \wedge v$ avec $u \in F_{a,0}, v \in F_{0,b}$; les éléments de $F_{a,b}$ seront dits *bihomogènes* de *bidegré* (a, b). Soit $(z_1, \dots, z_n)$ une base de T' ; il est immédiat que les éléments de la forme

$$(z_{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge z_{\alpha_a}) \wedge (\bar{z}_{\beta_1} \wedge \cdots \wedge \bar{z}_{\beta_b}) \tag{1.3}$$
$$(1 \leq \alpha_1 < \cdots < \alpha_a \leq n;\ 1 \leq \beta_1 < \cdots < \beta_b \leq n)$$

forment une base de $F_{a,b}$ et que $\bigwedge F$ est somme directe des $F_{a,b}$. Autrement dit, tout $u \in \bigwedge F$ s'écrite d'une manière et d'une seule comme somme d'éléments bihomogènes $u_{a,b}$ de bidegrés respectifs (a, b) ; l'application $u \mapsto u_{a,b}$ de $\bigwedge F$ sur $F_{a,b}$ se notera $P_{a,b}$; on dit que c'est un « projecteur ».

L'ensemble $\bigwedge^p F$ des éléments homogènes de degré p de $\bigwedge F$ (qu'on nomme aussi *p-covecteurs à valeurs complexes* sur l'espace T, ou plus précisément sur l'espace vectoriel sur $\mathbf{R}$ sous-jacent à T) est évidemment la somme directe des $F_{a,p-a}$ pour $0 \leq a \leq p$. On posera $P_p = \sum_{\alpha=0}^{p} P_{\alpha,p-\alpha}$; pour tout $u \in \bigwedge F$, $P_p u$ est la partie homogène de u de degré p.

Un endomorphisme L de l'espace vectoriel sous-jacent à $\bigwedge F$ sera dit bihomogène
de bidegré (r, s) si $L(F_{a,b}) \subset F_{a+r,b+s}$ quels que soient a, b. Il en est ainsi par 13
exemple de l'endomorphisme $u \mapsto w \wedge u$ de $\bigwedge F$ si $w \in F_{r,s}$.

Soit G le groupe des automorphismes de l'espace vectoriel T, qui est isomorphe au groupe des matrices inversibles d'ordre n sur $\mathbf{C}$.

Tout $X \in G$ détermine un automorphisme $X' = {}^tX$ de l'espace dual T', le transposé de X, et un automorphisme X'' de T'', donc aussi un automorphisme de $F = T' + T''$ et par suite un automorphisme X_1 de l'algèbre $\bigwedge F$; X'' s'appellera *l'antitransposé de* X ; c'est le transformé de ${}^tX$ par l'application $f \mapsto \bar{f}$ de T' sur T'', et on le notera $X'' = {}^t\overline{X}$. Il est clair que X_1 induit un automorphisme sur chacun des espaces $F_{a,b}$ ou autrement dit est permutable avec chacun des projecteurs $P_{a,b}$. Si en particulier on prend pour X l'automorphisme $t \mapsto it$ de T et qu'on convienne de noter C l'automorphisme X_1 correspondant, C induira sur $F_{a,b}$ l'automorphisme $u \mapsto i^{a-b}u$; autrement dit, on a

$$C = \sum_{a,b} i^{a-b} P_{a,b}. \tag{1.4}$$

Ce qui précède montre que $X \mapsto X_1$ est une représentation du groupe opposé à G dans le groupe des automorphismes de $\bigwedge F$; cette représentation est réductible et somme de celles qu'elle induit sur les espaces $F_{a,b}$; on peut montrer que celles-ci sont irréductibles.

Soit F_0 l'ensemble des éléments réels de F ; c'est un espace vectoriel sur $\mathbf{R}$, qui n'est autre que le dual de l'espace vectoriel sur $\mathbf{R}$ sous-jacent à T. Il est immédiat que tout $z \in F$ s'écrit d'une manière et d'une seule sous la forme $z = x + iy$, avec $x \in F_0, y \in F_0$; on a $x = (z + \bar{z})/2$, $y = (z - \bar{z})/2i$. Une base $(z_1, \dots, z_n)$ de T' étant choisie, posons $z_\alpha = x_\alpha + iy_\alpha$ avec $x_\alpha \in F_0$, $y_\alpha \in F_0$ $(1 \leq \alpha \leq n)$; on aura donc $\bar{z}_\alpha = x_\alpha - iy_\alpha$, ce qui montre que $(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n)$ est une base de F (sur $\mathbf{C}$), donc un système de générateurs de $\bigwedge F$. Tout $f \in F$ s'écrit donc d'une manière et d'une seule sous la forme

$$f = \sum_\alpha (\xi_\alpha x_\alpha + \eta_\alpha y_\alpha)$$

avec $\xi_\alpha \in \mathbf{C}, \eta_\alpha \in \mathbf{C}$. Comme $f \in F_0$ équivaut à $\bar{f} = f$, il s'ensuit que

$$(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n)$$

est une base de F_0 sur $\mathbf{R}$. L'algèbre extérieure $\bigwedge F_0$ déduite de l'espace vectoriel F_0 sur $\mathbf{R}$ a donc une base sur $\mathbf{R}$ formée des éléments de la forme

$$(x_{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge x_{\alpha_r}) \wedge (y_{\beta_1} \wedge \cdots \wedge y_{\beta_s}),$$

14 éléments qui forment aussi une base de $\bigwedge F$ sur $\mathbf{C}$. Cette algèbre $\bigwedge F_0$, dont les éléments homogènes de degré p s'appellent les p-covecteurs réels sur T (ou plus correctement sur l'espace vectoriel sur $\mathbf{R}$ sous-jacent à T) s'identifie ainsi avec la partie de $\bigwedge F$ formée par les combinaisons linéaires à coefficients réels de produits d'éléments de F_0 (1 étant considéré comme un tel produit). Tout élément u de $\bigwedge F$ s'écrit d'une manière et d'une seule sous la forme $u = v + iw$, avec v et w dans $\bigwedge F_0$; on pose $\bar{u} = v - iw$. L'application $u \mapsto \bar{u}$ de $\bigwedge F$ sur $\bigwedge F$ est antilinéaire, est un automorphisme de l'anneau $\bigwedge F$ (et même de $\bigwedge F$ considérée comme algèbre sur $\mathbf{R}$) et prolonge l'application $f \mapsto \bar{f}$ de F sur F ; réciproquement, ces propriétés suffisent à la caractériser. Pour que $u \in \bigwedge F$ soit réel, c'est-à-dire soit dans $\bigwedge F_0$, il faut et il suffit que $u = \bar{u}$.

L'application $u \mapsto \bar{u}$ induit, pour tout a, b, une application antilinéaire biunivoque de $F_{a,b}$ sur $F_{b,a}$, plus précisément, on a $\overline{(P_{a,b}u)} = P_{b,a}(\bar{u})$, ce qu'on écrit aussi $\bar{P}_{a,b} = P_{b,a}$. En particulier, $u \mapsto \bar{u}$ induit une application antilinéaire de $F_{a,a}$ sur $F_{a,a}$; $F_{a,a}$ a donc une base formées d'éléments réels. Il en est ainsi de $F_{0,0}$ et de $F_{n,n}$ qui sont tous deux de dimension 1 ; $F_{0,0}$ est engendré par 1, élément unité des algèbres $\bigwedge F$ et $\bigwedge F_0$; et, si comme plus haut les $z_\alpha = x_\alpha + iy_\alpha$ forment une base de T', $F_{n,n}$ est engendré par l'élément réel

$$\left(\frac{i}{2}\right)^n (z_1 \wedge \bar{z}_1) \wedge \cdots \wedge (z_n \wedge \bar{z}_n) = (x_1 \wedge y_1) \wedge \cdots \wedge (x_n \wedge y_n). \tag{1.5}$$

On notera que cet élément s'écrit aussi

$$\frac{i^{n^2}}{2^n}(z_1 \wedge \cdots \wedge z_n) \wedge (\bar{z}_1 \wedge \cdots \wedge \bar{z}_n)$$

ce qui montre que, si on remplace la base $(z_1, \ldots, z_n)$ par une autre $(z'_1, \ldots, z'_n)$, il se multiplie par $J\bar{J}$ où J est le déterminant de la seconde base par rapport à la première ; son signe est donc indépendant du choix de la base. *On conviendra de choisir une fois pour toutes, dans* T (ou plus correctement dans l'espace vectoriel sur $\mathbf{R}$ sous-jacent à T), *l'orientation pour laquelle le* $(2n)$*-covecteur réel* (1.5) *est positif* ; c'est celle qui est déterminée par les coordonnées $x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n$ prises dans cet ordre (ou dans tout ordre qui s'en déduit par une permutation paire).

Un endomorphisme A de l'espace vectoriel sous-jacent à $\bigwedge F$ est dit *réel* s'il laisse invariants les éléments réels, ou, ce qui revient au même, si $\overline{(Au)} = A(\bar{u})$ pour tout $u \in \bigwedge F$. Il en est ainsi par exemple de $P_{a,a}$ quel que soit a, et de l'opérateur C défini par (1.4), comme on le vérifie immédiatement.

1.2. Par une forme *hermitienne* sur l'espace T, on entend une fonction $H(t,t')$ n° 2
à valeurs complexes, définie sur $T \times T$, telle que pour tout $t \in T$ l'application $t' \mapsto H(t,t')$ de $\mathbf{C}$ dans T soit $\mathbf{C}$-linéaire (et définisse donc une forme linéaire sur T), satisfaisant de plus à la condition de « symétrie hermitienne »

$$H(t',t) = \overline{H(t,t')}.$$

Il s'ensuit que, pour tout $t' \in T$, l'application $t \mapsto H(t,t')$ de T dans $\mathbf{C}$ est antilinéaire.

Posons

$$H(t,t') = S(t,t') + iA(t,t'), \tag{1.6}$$

$S(t,t')$ et $A(t,t')$ étant réels. Il résulte immédiatement des condition imposées à H que S est une forme $\mathbf{R}$-bilinéaire *symétrique* et A une forme $\mathbf{R}$-bilinéaire *alternée*, et qu'on a

$$S(t,t') = -A(it,t') = A(t,it'), \qquad A(t,t') = S(it,t') = -S(t,it') \tag{1.7}$$

$$S(it,it') = S(t,t'), \qquad A(it,it') = A(t,t') \tag{1.8}$$

Réciproquement, supposons donnée, soit une forme $\mathbf{R}$-bilinéaire symétrique S satisfaisant à la première des relations (1.8), soit une forme $\mathbf{R}$-bilinéaire alternée A satisfaisant à la seconde de ces relations ; dans le premier cas la seconde des relations (1.7) définira, comme on le vérifie aussitôt, une forme alternée A, et dans le second cas la première des relation (1.7) définit une forme symétrique S ; dans l'un ou l'autre cas la relation (1.6) définit alors une forme hermitienne H. Les relations (1.8) expriment que S et A sont invariantes par l'automorphismes $t \mapsto it$ de T. On peut donc dire que les relations ci-dessus établissent des correspondances biunivoques entre l'ensemble des formes hermitiennes sur T, l'ensemble des formes symétriques invariantes par $t \mapsto it$, et l'ensemble des formes alternées invariantes par $t \mapsto it$. Si on pose de plus

$$\Phi(t) = H(t,t) = S(t,t),$$

Φ est une forme quadratique dont la donnée détermine réciproquement S au moyen de la formule

$$2S(t,t') = \Phi(t+t') - \Phi(t) - \Phi(t'),$$

16 et détermine donc A et H pourvu que S soit invariante par $t \mapsto it$; pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que Φ le soit. C'est quelquefois la forme quadratique Φ qu'on appelle « forme hermitienne ».

Une base $(z_1, \ldots, z_n)$ étant choisie pour le dual T' de T, toute forme **C**-linéaire sur T s'écrit $t \mapsto \sum \xi_\alpha z_\alpha(t)$, et toute forme antilinéaire s'écrit $t \mapsto \sum \xi_\alpha \bar{z}_\alpha(t)$. On en conclut aussitôt que toute forme « sesquilinéaire » en t, t', c'est-à-dire antilinéaire en t et linéaire en t', est combinaison linéaire des formes $(t, t') \mapsto \bar{z}_\alpha(t) z_\beta(t')$; en particulier, si H est hermitienne, on aura

$$H(t, t') = \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} h_{\alpha\beta} \bar{z}_\alpha(t) z_\beta(t'), \tag{1.9}$$

la condition de « symétrie hermitienne » s'écrivant alors $h_{\beta,\alpha} = \bar{h}_{\alpha\beta}$. On sait qu'étant donnée une telle forme H, on peut toujours choisir une base (z_α) pour T', ou autrement dit un « système de coordonnées complexes » pour T, de telle sorte que $h_{\alpha\beta} = 0$ pour $\alpha \neq \beta$, c'est-à-dire que $\|h_{\alpha\beta}\|$ soit une matrice diagonale ; quant aux $h_{\alpha\alpha}$, ils sont en tout cas réels.

On dit que H est *non-dégénérée* si, quel que soit $t' \neq 0$, il y a un $t \in T$ tel que $H(t, t') \neq 0$; en vertu des formules (1.6) et (1.7), il faut et il suffit pour cela que S soit non-dégénérée, ou encore que A le soit. Si H est mise sous la forme (1.9), il faut et il suffit, pour que H soit non-dégénérée, que l'on ait $\det(h_{\alpha\beta}) \neq 0$. On dit que H est *positive* si la forme quadratique associée Φ est positive, c'est-à-dire si $\Phi(t) = H(t, t) \geq 0$ quel que soit t ; pour que H soit positive et non-dégénérée, il faut et il suffit l'on ait $\Phi(t) > 0$ pour tout $t \neq 0$; en ce cas, on peut choisir la base (z_α) de manière que la matrice $\|h_{\alpha\beta}\|$ soit la matrice unité.

Si $(f_1, \ldots, f_{2n})$ est une base de F_0, les $f_\mu \wedge f_\nu$, pour $1 \leq \mu < \nu \leq 2n$, en forment une pour $\bigwedge^2 F_0$; d'autre part, les formes alternées

$$A_{\mu\nu}(t, t') = f_\mu(t) f_\nu(t') - f_\nu(t) f_\mu(t')$$

forment, pour $1 \leq \mu < \nu \leq 2n$, une base de l'espace des formes **R**-bilinéaires alternées à valeurs réelles sur T. Il est immédiat que l'isomorphisme de $\bigwedge^2 F_0$ sur ce dernier espace qui fait correspondre $A_{\mu\nu}$ à $f_\mu \wedge f_\nu$ pour $1 \leq \mu < \nu \leq 2n$ fait aussi correspondre la forme $f(t)g(t') - g(t)f(t')$ à $f \wedge g$ quels que soit $f \in F_0, g \in F_0$, et qu'il est complètement déterminé par cette condition ; on dit, comme on sait, que c'est l'*isomorphisme canonique* entre les espaces en question. Soit maintenant u un élément quelconque de $\bigwedge^2 F_0$; on peut le considérer comme élément de $\bigwedge^2 F$; soient $v = P_{2,0}u, w = P_{1,1}u$, d'où $\bar{v} = P_{0,2}u$ puisque u est réel ; pour la même raison
17 on a $w = \bar{w}$. On aura donc

$$u = v + w + \bar{v}, \ Cu = -v + w - \bar{v}.$$

Mais Cu est par définition le transformé de u par l'automorphisme de $\bigwedge F$ induit par l'automorphisme $t \mapsto it$ de T ; pour que u soit invariant par cet automorphisme, il faut et il suffit évidemment que la forme **R**-bilinéaire alternée associée à u le soit. En vertu des formules ci-dessus, $u = Cu$ équivaut à $v + \bar{v} = 0$, c'est-à-dire $u = w$, ou encore $u \in F_{1,1}$. Donc, pour qu'une forme **R**-bilinéaire alternée soit invariante par $t \mapsto it$, il faut et il suffit que le bicovecteur correspondant soit bihomogène de bidegré $(1, 1)$; et l'isomorphisme canonique défini plus haut induit un isomorphisme entre l'espace de ces formes et l'espace des éléments réels de $F_{1,1}$.

Appliquons ceci à la forme hermitienne $H(t, t')$ considérée tout à l'heure, à son expression (1.9) au moyen des $\bar{z}_\alpha, z_\beta$, et sa partie imaginaire $A(t, t')$ définie par

(1.6). On a

$$A(t,t') = \frac{1}{2i}\sum_{\alpha,\beta} h_{\alpha\beta}\big(\bar z_\alpha(t) z_\beta(t') - z_\beta(t)\bar z_\alpha(t')\big)$$

et par suite le bicovecteur associé peut s'écrire

$$u = \frac{i}{2}\sum_{\alpha,\beta} h_{\alpha\beta} z_\beta \wedge \bar z_\alpha. \tag{1.10}$$

On notera que, si $\|h_{\alpha\beta}\|$ est la matrice unité, de sorte qu'on a

$$u = \frac{i}{2}\sum z_\alpha \wedge \bar z_\alpha,$$

$u^n/n!$ n'est autre que l'élément de $F_{n,n}$ défini par la formule (1.5) ; par suite, si on oriente l'espace T conformément aux conventions de la fin du §1.1, u^n est alors un $(2n)$-covecteur réel *strictement psositif*. Comme on peut, pour toute forme hermitienne positive non-dégénérée H, supposer la mtrice $\|h_{\alpha\beta}\|$ ramenée à la matrice unité par un choix convenable de la base, on en conclut que *u^n est strictement positif chaque fois que u est le bicovecteur associé à une forme hermitienne positive non-dégénérée.*

1.3. Dans tout le reste de ce chapitre, nous supposons donnée une fois pour toutes une forme hermitienne H sur T ; comme au §1.2, nous noterons S, A et u les formes symétrique et alternée et le bicovecteur associés à H. *On supposera que H est positive non-dégénérée* ; cette hypothèse n'est d'ailleurs pas indispensable pour les résultats purement algébriques du présent chapitre (ni d'ailleurs non plus pour les résultats purement locaux du chapitre suivant) ; ceux-ci restent valables pourvu qu'on suppose H non-dégénérée, comme on le vérifie, soit directement, soit à partir des résultats qui vont suivre au moyen du principe de prolongement des identités algébriques (cf. Bourbaki, [2, IV, §2, Th. 2]). n° 3 18

On dit que la donnée de la forme hermitienne positive non-dégénérée H définit sur T une structure d'*espace hermitien*. A titre auxiliaire, on supposera choisie une fois pour toutes une base (z_α) de T' (un « système de coordonnées » dans T) pour laquelle H s'écrive sous la forme

$$H(t,t') = \sum_\alpha \bar z_\alpha(t) z_\alpha(t');$$

comme précédemment, on posera $z_\alpha = x_\alpha + iy_\alpha$, les x_α, y_α étant réels. On aura donc

$$\Phi(t) = H(t,t) = \sum_\alpha \bar z_\alpha(t) z_\alpha(t) = \sum_\alpha \big(x_\alpha(t)^2 + y_\alpha(t)^2\big).$$

Mais on sait que la donnée d'une forme quadratique positive dans un espace vectoriel E sur $\mathbf{R}$ détermine sur l'algèbre des multicovecteurs sur E un opérateur $*$ défini comme suit (de Rham, [10, §24]). L'espace E étant supposé orienté, et la forme quadratique écrite comme somme de carrés $f_1^2 + \cdots + f_m^2$ au moyen du choix d'une base convenable $(f_1, \dots, f_m)$ dans le dual de E, on aura, pour toute permutation *paire* $(i_1, \dots, i_p, j_1, \dots, j_{m-p})$ des indices $(1, 2, \dots, m)$:

$$*(f_{i_1} \wedge \cdots \wedge f_{i_p}) = f_{j_1} \wedge \cdots \wedge f_{j_{m-p}}.$$

Pour tout p, $*$ est alors l'isomorphisme de l'espace vectoriel des p-covecteurs sur l'espace vectoriel des $(m-p)$-covecteurs qui est déterminé par les formules ci-dessus ; on démontre qu'il ne dépend pas du choix de la base (f_i) mais seulement de la forme quadratique donnée sur E, forme à laquelle il est donc associé d'une manière invariante (cf. Bourbaki, [2, III, §8]).

Cette définition de $*$ s'applique en particulier à l'algèbre $\bigwedge F_0$ des multicovecteurs réels sur T et à la forme quadratique $H(t,t)$. *On conviendra de prolonger* $*$ *à* $\bigwedge F$ *de telle sorte qu'il soit* $\mathbf{C}$*-linéaire sur* $\bigwedge F$; cette condition le détermine d'une manière unique ; $*$ est alors, au sens du §1.1, un opérateur réel sur $\bigwedge F$, et détermine un isomorphisme de $\bigwedge^p F$ sur $\bigwedge^{2n-p} F$.

19 Pour déterminer $*$ d'une manière plus précise, nous allons introduire momentanément les notations suivantes. Soit $N = \{1, 2, \dots, n\}$; pour toute partie M de N, désignons par $\nu(M)$ le nombre d'éléments de M, et posons

$$w_M = \prod_{\mu \in M} (z_\mu \wedge \bar{z}_\mu) = (-2i)^{\nu(M)} \prod_{\mu \in M} (x_\mu \wedge y_\mu),$$

ces produits étant indépendants de l'ordre des facteurs parce que ceux-ci sont de degré 2 et par suite permutables entre eux et avec tout élément de $\bigwedge F$.

Soit encore $\mathcal{A}$ l'ensemble des suites dont le premier élément est $+1$ ou -1 et les autres sont des éléments *distincts* de N ; si $A = (\pm 1, \alpha_1, \dots, \alpha_a)$ est une telle suite, convenons de noter par $|A|$ l'ensemble $\{\alpha_1, \dots, \alpha_a\}$, par $\nu(A)$ l'entier $a = \nu(|A|)$, et de poser

$$z_A = \pm z_{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge z_{\alpha_a},$$

le signe du second membre étant celui qui figure en tête de A ; convenons de définir de même x_A et y_A. Disons qu'un couple $(A', A'') \in \mathcal{A} \times \mathcal{A}$ est une partition de A si $z_A = z_{A'} \wedge z_{A''}$ et que deux telles partitions (A', A'') et (A'_1, A''_1) sont équivalentes si $|A'| = |A'_1|$, ce qui implique $|A''| = |A''_1|$. On aura, avec ces notations

$$z_A = \sum i^{\nu(A'')} x_{A'} \wedge y_{A''},$$

la sommation étant étendue à un système complet de représentants pour les classes d'équivalence de partitions de A.

Cela posé, tout élément de base de la forme (1.3) peut aussi s'écrire sous la forme $z_A \wedge \bar{z}_B \wedge w_M$, les ensembles $|A|, |B|$ et M étant deux à deux disjoints. Calculons le transfomé d'un tel élément par $*$. On a

$$z_A \wedge \bar{z}_B \wedge w_M = (-2i)^{\nu(M)} \sum i^{\nu(A'')-\nu(B'')} x_{A'} \wedge y_{A''} \wedge x_{B'} \wedge y_{B''} \wedge \prod_{\mu \in M} (x_\mu \wedge y_\mu)$$

la sommation étant étendue à des systèmes complets de représentants (A', A'') et (B', B'') pour les partitions de A et celles de B. Posons

$$M' = N - (|A| \cup |B| \cup M).$$

Appliquant ce qui a été dit plus haut pour l'opérateur $*$ défini au moyen d'une
20 forme écrite comme somme de carrés, on voit qu'on aura

$$\begin{aligned} &* (z_A \wedge \bar{z}_B \wedge w_M) = \\ &\quad = (-2i)^{\nu(M)} \sum (-1)^r i^{\nu(A'')-\nu(B'')} x_{A''} \wedge y_{A'} \wedge x_{B''} \wedge y_{B'} \wedge \prod_{\mu \in M'} (x_\mu \wedge y_\mu) \end{aligned}$$

où on a posé

$$r = \nu(A)\nu(A'') + \nu(B)\nu(B'') + \frac{1}{2}\big(\nu(A) + \nu(B)\big)\big(\nu(A) + \nu(B) - 1\big).$$

Soit A''_1 l'élément de $\mathcal{A}$ qui ne diffère de A'' que par le signe et qui est tel que (A''_1, A') soit une partition de A ; quand (A', A'') parcourt un système complet de représentants des partitions de A, il en est de même de (A''_1, A'). En faisant usage de cette remarque, on obtient, par un calcul facile, le résultat suivant :

$$*(z_A \wedge \bar{z}_B \wedge w_M) = (-1)^{\nu(M) + \frac{p(p+1)}{2}} (-2i)^{p-n} i^{a-b} z_A \wedge \bar{z}_B \wedge w_{M'},$$

où $M' = N - (|A| \cup |B| \cup M)$, où (a, b) est le bidegré de $z_A \wedge \bar{z}_B \wedge w_M$ et où p est son degré, c'est-à-dire qu'on a

$$a = \nu(A) + \nu(M), \quad b = \nu(B) + \nu(M), \quad p = a + b.$$

Ces formules mettent en évidence que $*$ transforme tout p-covecteur de bidegré (a, b) en un $(2n - p)$-covecteur de bidegré $(n - b, n - a)$; autrement dit, on a

$$*P_{a,b} = P_{n-b,n-a}*,$$

d'où résulte que $*$ est permutable avec C, ce que nous écrirons aussi

$$[*, C] = 0 \tag{1.11}$$

en convenant suivant l'usage d'écrire $[X, Y] = XY - YX$ chaque fois que X, Y sont deux endomorphismes d'un espace vectoriel. Notons encore que, la dimension de l'espace T sur les réels étant *paire*, $**$ n'est autre que l'opérateur w (DE RHAM, [10, §24]) qui multiplie par $(-1)^p$ tout *p-covecteur*, et qui 'sécrit aussi $w = C^2$; on a ainsi :

$$w = *^2 = C^2 = \sum_{p=0}^{2n} (-1)^p P_p, \quad *^{-1} = w* = *w, \quad C^{-1} = wC = Cw. \tag{1.12}$$

21

1.4. Désignons par u, comme au §1.2, le bicovecteur associé à la partie imaginaire de la forme H définissant la structure de l'espace hermitien T ; dans le système de coordonnées qu'on a choisi, on a n° 4

$$u = \frac{i}{2} \sum_{\alpha} z_\alpha \wedge \bar{z}_\alpha = \frac{i}{2} \sum_{\alpha} w_\alpha;$$

c'est un bicovecteur réel de bidegré $(1, 1)$. Pour tout $v \in \bigwedge F$, on posera :

$$Lv = u \wedge v, \quad \Lambda v = w * (u \wedge *v) = w * L * v = *^{-1} L * v.$$

Les opérateurs L, Λ sont *réels, bihomogènes*, de bidegrés respectifs $(1, 1)$ et $(-1, -1)$; on vérifie immédiatement qu'ils sont permutables avec w et C :

$$[L, w] = [L, C] = [\Lambda, w] = [\Lambda, C] = 0. \tag{1.13}$$

Il est clair qu'on a, avec les notations du §1.3 :

$$L(z_A \wedge \bar{z}_B \wedge w_M) = \frac{i}{2} z_A \wedge \bar{z}_B \wedge \Big(\sum_{\mu \in M'} w_{M \cup \{\mu\}} \Big).$$

D'autre part, les formules du §1.3 permettent de vérifier, par un calcul facile, qu'on a

$$\Lambda(z_A \wedge \bar{z}_B \wedge w_M) = \frac{2}{i} z_A \wedge \bar{z}_B \wedge \Big(\sum_{\mu \in M} w_{M - \{\mu\}} \Big).$$

On en conclut immédiatement qu'on a, p étant toujours le degré de $z_A \wedge \bar{z}_B \wedge w_M$:

$$(\Lambda L - L\Lambda)(z_A \wedge \bar{z}_B \wedge w_M) = (n - p) z_A \wedge \bar{z}_B \wedge w_M$$

d'où la formule

$$[\Lambda, L] = \sum_{p=0}^{2n} (n - p) P_p. \tag{1.14}$$

On en conclut, pour $r \geq 1$:

$$[\Lambda, L^r] = \sum_{\rho=0}^{r-1} L^{r-\rho-1} [\Lambda, L] L^\rho = \sum_{\rho=0}^{r-1} \sum_{p=0}^{2n} (n - p) L^{r-\rho-1} P_p L^\rho;$$

mais L est homogène de degré 2, c'est-à-dire qu'on a $P_p L = L P_{p-2}$; on obtient 22 donc

$$[\Lambda, L^r] = L^{r-1} \sum_{\rho=0}^{r-1} \sum_{p=0}^{2n} (n-p) P_{p-2\rho}$$

où bien entendu $P_{p-2\rho}$ se réduit à 0 si $p - 2\rho < 0$. Le coefficient de P_q dans le second membre est

$$\sum_{\rho=0}^{r-1} (n-q-2\rho)$$

pourvu que $q + 2(r-1) \leq 2n$; mais, si cette dernière inégalité n'est pas satisfaite, on a $L^{r-1}P_q = 0$ puisque $L^{r-1}P_q v$ est de degré $\geq 2(r-1)+q$. On peut donc écrire en définitive

$$[\Lambda, L^r] = \sum_{q=0}^{2n} r(n-q-r+1)L^{r-1}P_q.$$

On dira qu'un élément homogène v de $\bigwedge F$ est primitif si $\Lambda v = 0$.

Soit v un p-covecteur primitif ; pour $r \geq 1, s \geq 1$, on aura

$$\Lambda^s L^r v = \Lambda^{s-1}(\Lambda L^r - L^r \Lambda)v = r(n-p-r+1)\Lambda^{s-1}L^{r-1}v,$$

ce qui permet, par récurrence sur i, d'écrire le premier membre, pour tout $i \leq \min(r,s)$, comme produit de $\Lambda^{s-i}L^{r-i}v$ et d'un coefficient numérique facile à calculer ; en particulier, pour $i = s \leq r$, on aura :

(1.15) $\Lambda^s L^r v = r(r-1)\cdots(r-s+1)(n-p-r+1)(n-p-r+2)\cdots(n-p-r+s)L^{r-s}v.$

Supposons qu'on ait pris $s = n+1, r = n+q+1, q \geq 0$; alors $L^r v$ est de degré $> 2n$ et est donc 0 ; quant au coefficient numérique du second membre, il est $\neq 0$ si $q \geq n-p+1$; en ce cas, on aura donc $L^q v = 0$. En posant, suivant l'usage, $x^+ = \max(x, 0)$ pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a donc démontré ce qui suit :

Th. 1 **Théorème 1.1.** *Si v est un p-covecteur primitif, on a $L^q v = 0$ pour tout $q \geq (n-p+1)^+$.*

Cor. **Corollaire 1.2.** *Il n'y a pas de p-covecteur primitif non nul de degré $p > n$.*

Le corollaire résulte du théorème, en y prenant $q = 0$.

23

Th. 2 **Théorème 1.3.** *Pour tout p-covecteur primitif v, on a*

$$*L^r v = (-1)^{\frac{p(p+1)}{2}} \frac{r!}{(n-p-r)!} L^{n-p-r} C v \tag{1.16}$$

chaque fois que $0 \leq r \leq n-p$, et $*L^r v = 0$ pour $r > n-p$.

La seconde assertion résulte du th. 1.1 ; formellement, on peut convenir de considérer (1.16) comme valable même si $r > n-p$, en interprétant $1/(n-p-r)!$ comme $1/\Gamma(n-p-r+1)$ qui s'annule pour $r > n-p$. Suivant l'usage, on convient que $0! = \Gamma(1) = 1$.

Supposons donc $r \leq n-p$. Ecrivons v comme combinaison linéaire d'éléments $z_A \wedge \bar{z}_B \wedge w_M$:

$$v = \sum_{A,B,M} \xi_{A,B,M} z_A \wedge \bar{z}_B \wedge w_M.$$

L'hypothèse $\Lambda v = 0$ s'écrit alors, d'après la formule établie plus haut :

$$\sum_{A,B,M} \xi_{A,B,M} z_A \wedge \bar{z}_B \wedge \Big(\sum_{\mu \in M} w_{M-\{\mu\}}\Big) = 0$$

Il s'ensuit que, si on pose

$$v_{A,B} = \sum_M \xi_{A,B,M} z_A \wedge \bar{z}_B \wedge w_M$$

chacun des $v_{A,B}$ est lui-même primitif. Il suffira donc de faire la démonstration pour un p-covecteur tel que $v_{A,B}$, ou autrement dit de considérer le cas où v est de la forme

$$v = z_A \wedge \bar{z}_B \wedge \Big(\sum_M \xi(M) w_M\Big),$$

la sommation étant étendue à toutes les parties M de $N - |A| - |B|$ formées de m éléments, où m est déterminé par $2m = p - \nu(A) - \nu(B)$. On posera $N' = N - |A| - |B|$. L'hypothèse $\Lambda v = 0$ s'écrit alors :

$$\sum_{\mu \in N' - M'} \xi(M' \cup \{\mu\}) = 0$$

pour toute partie M' de N' telle que $\nu(M') = m - 1$.

Supposons en particulier que N_1, N_2 soient deux parties disjointes de N' telles 24
que $N' = N_1 \cup N_2$; posons $M_1' = N_1 \cap M', M_2' = N_2 \cap M'$; la relation ci-dessus s'écrit :

$$\sum_{\mu \in N_1 - M_1'} \xi(M' \cup \{\mu\}) + \sum_{\mu \in N_2 - M_2'} \xi(M' \cup \{\mu\}) = 0.$$

Pour un entier r donné tel que $1 \leq r \leq m$, faisons parcourir à M' l'ensemble des parties de N' telles que $\nu(M_1') = r-1, \nu(M_2') = m-r$; si M' est tel et qu'on prenne $\mu \in N_1 - M_1'$, l'ensemble $M = M' \cup \{\mu\}$ sera tel que $\nu(M) = m, \nu(N_1 \cap M) = r$; et toute partie M de N' ayant ces propriétés pourra être mise sous la forme $M' \cup \{\mu\}$, avec M' et μ comme on a dit, de r manières différentes. De même, si M' parcourt le même ensemble et qu'on prenne $\mu \in N_2 - M_2'$, l'ensemble $M = M' \cup \{\mu\}$ sera tel que $\nu(M) = m, \nu(N_1 \cap M) = r - 1$, et toute partie M de N' ayant ces propriétés pourra être écrite sous la forme $M' \cup \{\mu\}$, avec M' et μ tels qu'on vient de le dire, de $m - r + 1$ manières différentes. Posons, dans ces conditions :

$$S_r(N_1) = \sum_M \xi(M) \qquad (M \subset N', \nu(M) = m, \nu(N_1 \cap M) = r).$$

La relation écrite plus haut, sommée pour tous les M' en question, donne :

$$rS_r(N_1) + (m - r + 1)S_{r-1}(N_1) = 0,$$

d'où on déduit immédiatement $S_m(N_1) = (-1)^m S_0(N_1)$. On a d'ailleurs

$$S_m(N_1) = \sum_{M \subset N_1} \xi(M)$$

et $S_0(N_1) = S_m(N' - N_1)$; en particulier, $S_m(N_1) = \xi(N_1)$ pour $\nu(N_1) = m$.

Appliquons maintenant les résultats du §1.3 ; on a

$$*v = \gamma z_A \wedge \bar{z}_B \wedge \Big(\sum_M \xi(M) w_{N'-M}\Big)$$

où le coefficient γ est donné par

$$\gamma = (-1)^{m + \frac{p(p+1)}{2}} (-2i)^{p-n} i^{\nu(A)-\nu(B)}$$

On a d'autre part 25

$$u^{n-p} = (-2i)^{p-n}(n-p)! \sum_R w_R$$

où la sommation est étendue à toutes les parties R de N telles que $\nu(R) = n - p$; on en déduit :

$$L^{n-p}v = (-2i)^{p-n}(n-p)!z_A \wedge \bar{z}_B \wedge \Big(\sum_{M,R} \xi(M)w_{M\cup R}\Big)$$

la sommation étant étendue à tous les couples (M, R) de parties disjointes de N' telles que $\nu(M) = m, \nu(R) = n-p$; le dernier facteur au second membre n'est alors pas autre chose que $\sum S_m(T)w_T$, la sommation étant étendue à toutes les parties T de N' telles que $\nu(T) = m + n - p$, et $S_m(T)$ étant défini comme il a été dit. Tenant compte des formules démontrées ci-dessus pour $S_m(N_1), S_0(N_1)$, on aura donc

$$L^{n-p}v = (-1)^m(-2i)^{p-n}(n-p)!z_A \wedge \bar{z}_b \wedge \Big(\sum_T S_m(N' - T)w_T\Big).$$

Mais $L^{n-p}v$ a même degré $2n - p$ que $*v$, donc le dernier facteur de l'expression qu'on vient d'obtenir pour $L^{n-p}v$ a même degré que le dernier facteur de l'expression donnée ci-dessus pour $*v$, ce qui revient à dire que

$$m + n - p = \nu(N') - m;$$

pour tout $T \subset N', \nu(T) = m + n - p$, on a donc $\nu(N' - T) = m$ et par suite $S_m(N'-T) = \xi(N'-T)$. Il est clair dans ces conditions que les expressions obtenues pour $L^{n-p}v$ et pour $*v$ ne diffèrent que par les facteurs numériques qui y figurent ; la comparaison de ceux-ci achève alors de démontrer la formule du théorème 1.3 dans le cas $r = 0$.

Pour passer de là au cas général, observons qu'on a

$$*L^r v = (*L^r *^{-1})(*v) = (*^{-1}L^r *)(*v) = \Lambda^r * v,$$

et par suite, d'après ce qu'on vient de démontrer :

$$*L^r v = (-1)^{\frac{p(p+1)}{2}} \frac{1}{(n-p)!}\Lambda^r L^{n-p}Cv.$$

26 Mais, C étant permutable avec Λ, Cv est primitif en même temps que v. Comme $r \leq n - p$, la formule (1.15) s'applique, et la conclusion du théorème 1.3 en résulte immédiatement.

Th. 3 **Théorème 1.4.** *Soit v un élément homogène de $\bigwedge F$; soit p son degré. On peut d'une manière et d'une seule, mettre v sous la forme*

$$v = \sum_{r \geq (p-n)^+} L^r v_r, \tag{1.17}$$

où, pour tout $r \geq (p-n)^+$, v_r est un $(p-2r)$-covecteur primitif. De plus, il y a des polynomes non commutatifs $\Phi_{p,r}(L, \Lambda)$, à coefficients rationnels, tels que, pour tout p-covecteur v, les éléments v_r figurant dans l'expression (1.17) de v soient donnés par

$$v_r = \Phi_{p,r}(L, \Lambda)v.$$

Par un polynome non commutatif $\Phi(X, Y)$ à deux indéterminées X, Y, à coefficients rationnels, on entend, suivant l'usage, tout élément de l'algèbre libre à élément unité engendrée sur le corps $\mathbf{Q}$ des rationnels par les indéterminées X, Y ; c'est donc une combinaison linéaire à coefficients dans $\mathbf{Q}$ de monomes dont chacun est, soit 1, soit un élément du monoïde libre engendré par X, Y. Un tel polynome étant donné, on peut d'une manière évidente, y substituer à X, Y deux éléments de n'importe quelle algèbre sur $\mathbf{Q}$ à élément unité, et par exemple deux endomorphismes d'un espace vectoriel sur un corps de caractéristique 0. Au moyen de (1.14), on vérifierait d'ailleurs sans peine qu'on pourrait supposer les polynomes $\Phi_{p,r}(L,\Lambda)$ ramenés à la forme

$$\Phi_{p,r}(L,\Lambda) = \sum_s a_{p,r,s} L^s \Lambda^{r+s},$$

avec des $a_{p,r,s}$ rationnels ; mais cela n'importe pas à notre objet.

Démontrons d'abord qu'une expression de la forme (1.17) pour v, si elle existe, est unique, ou autrement dit que $v = 0$ entraîne $v_r = 0$ si les v_r sont des $(p-2r)$-covecteurs primitifs. Sinon, en effet, soit s le plus grand entier tel que $v_s \neq 0$. Multipliant par Λ^s, nous aurons

$$\sum_r \Lambda^s L^r v_r = \sum_r \Lambda^{s-r} \Lambda^r (L^r v_r) = 0,$$

la sommation étant étendue aux r tels que $(p-n)^+ \leq r \leq s$. En vertu de (1.15), $\Lambda^r L^r v_r$ ne diffère de v_r que par un facteur numérique et est donc primitif, de sorte que tous les termes de la somme ci-dessus, sauf celui qui correspond à $r =$ 27
s, s'annulent ; on a donc $\Lambda^s L^r v_s = 0$, ce qui, d'après (1.15), entraîne $v_s = 0$, contrairement à l'hypothèse.

Démontrons maintenant le lemme suivant :

Lemme 1.5. *Il existe des polynomes non commutatifs $\Phi_{p,r,s}(L,\Lambda)$ à coefficients rationnels $(0 \leq p \leq 2n; (p-n)^+ \leq s < r)$ tels que, si on pose* Lemme

$$q = (p-n)^+, \quad v_s = \Phi_{p,r,s}(L,\Lambda)v, \quad v' = v - \sum_{s=q}^{r-1} L^s v_s,$$

v_s soit de degré $p-2s$ chaque fois que v est de degré p, et que, pour tout p-covecteur v satisfaisant à $\Lambda^r v = 0$, on ait $\Lambda v_s = 0$ pour $q \leq s < r$, et $\Lambda^q v' = 0$.

Pour $r = q$, il n'y a rien à démontrer ; la formule définissant v' doit en ce cas s'interpréter comme $v' = v$. On procédera par récurrence. Soit $r \geq q$; soit v un p-covecteur satisfaisant à $\Lambda^{r+1} v = 0$; alors $\Lambda^r v$ est primitif de degré $p - 2r$, et on aura donc, en vertu de (1.15), $\Lambda^r L^r(\Lambda^r v) = \gamma \Lambda^r v$, où γ est donné par

$$\gamma = r!(n-p+r+1)\cdots(n-p+2r)$$

et n'est donc pas nul puisque $r \geq p - n$. On aura donc

$$\Lambda^r(v - \gamma^{-1} L^r \Lambda^r v) = 0,$$

et par suite on pourra appliquer l'hypothèse de récurrence à $v - \gamma^{-1} L^r \Lambda^r v$. Il s'ensuit qu'en posant

$$\begin{aligned}
&\Phi_{p,r+1,r}(L,\Lambda) = \gamma^{-1}\Lambda^r, \\
&\Phi_{p,r+1,s}(L,\Lambda) = \Phi_{p,r,s}(L,\Lambda) \cdot (1 - \gamma^{-1} L^r \Lambda^r) \quad (q \leq s < r),
\end{aligned}$$

on satisfera aux conditions du lemme.

Appliquons d'abord le lemme dans le cas $p \leq n$, c'est-à-dire $q = 0$; alors $\Lambda^q v' = 0$ devient simplement $v' = 0$; si en même temps on prend r tel que $2r > p$, on aura $\Lambda^r v = 0$ quel que soit v de degré p, ce qui démontre le théorème dans ce cas. Soit maintenant $p > n$; alors $*v'$ est de degré $2n - p < n$, donc, d'après ce qu'on vient de démontrer, on pourra écrire

$$*v' = \sum_{r \geq 0} L^r v'_r,$$

où v'_r est primitif de degré $2n - p - 2r$. De $\Lambda^q v' = 0$ on déduit alors 28

$$0 = *\Lambda^q v' = L^q * v' = \sum_{r\geq 0} L^{q+r} v'_r;$$

dans cette relation, les termes du dernier membre sont de degré p ; en vertu de l'unicité de l'expression (1.17) pour les p-covecteurs quand une telle expression existe, la relation ci-dessus entraîne donc $v'_r = 0$ pour tout r, donc $v' = 0$. Le théorème s'ensuit alors comme pour $p \leq n$.

Cor. **Corollaire 1.6.** *Soit v un p-covecteur tel que $L^m v = 0$; alors, dans l'expression (1.17) de v, on a $v_r = 0$ pour $r \geq (p-n+m)^+$. En particulier, si $p \leq n$, $L^{n-p}v = 0$ entraîne $v = 0$; pour que v soit primitif, il faut et il suffit que l'on ait $p \leq n$ et $L^{n-p+1}v = 0$.*

L'hypothèse s'écrit en effet $\sum_r L^{m+r}v_r = 0$; v_r étant primitif de degré $p-2r$, le théorème 1.1 montre que $L^{m+r}v_r$ s'annule pour $r < p-n+m$; on aura donc $\sum L^{m+r}v_r = 0$, la sommation étant étendue aux $r \geq (p-n+m)^+$. Les termes du premier membre sont de degré $p+2m$; en vertu de l'unicité de (1.17) pour les $(p+2m)$-covecteurs, les v_r figurant dans ce premier membre sont donc nuls.

Le corollaire montre que, pour $0 \leq m \leq n-p$, L^m induit sur $\bigwedge^p F$ une *injection* dans $\bigwedge^{p+2m} F$, ou autrement dit un *isomorphisme* de cet espace sur son image par L^m. Soit, pour $0 \leq p \leq n$ ϖ_p l'espace vectoriel des p-covecteurs primitifs ; c'est le noyau de l'application Λ de $\bigwedge^p F$ dans $\bigwedge^{p-2} F$, ou encore, d'après ce qui précède, le noyau de l'application L^{n-p+1} de $\bigwedge^p F$ dans l'espace des $(2n-p+2)$-covecteurs. Pour tout $p \leq n$, et tout $m \leq n-p$, L^m induit un isomorphisme de ϖ_p sur $L^m(\varpi_p)$; et la première partie du théorème 1.4 peut s'exprimer en disant que *$\bigwedge F$ est somme directe des espaces vectoriels $L^m(\varpi_p)$ pour $0 \leq p \leq n$, $0 \leq m \leq n-p$.*

On peut pousser plus loin cette décomposition de $\bigwedge F$ en somme directe. On a déjà vu, en effet, que tout p-covecteur primitif est somme de p-covecteurs primitifs bihomogènes ; c'est d'ailleurs là une conséquence immédiate de la bihomogénéité de Λ, qui entraîne que, si v est primitif, les composantes bihomogènes $P_{a,b}v$ de v le sont aussi. Soit donc, pour $0 \leq a+b \leq n$, $\varpi_{a,b}$ l'espace des covecteurs primitifs de bidegré (a,b) ; on a en particulier, pour $0 \leq a \leq n$, $\varpi_{a,0} = F_{a,0}$ et $\varpi_{0,a} = F_{0,a}$; car Λ, étant bihomogène de bidegré $(-1,-1)$, s'annule nécessairement sur tout covecteur de
29 bidegré $(a,0)$ ou $(0,a)$. Alors ϖ_p est somme directe des $\varpi_{a,b}$ pour $a+b = p$; pour $0 \leq m \leq n-(a+b)$, L^m induit sur $\varpi_{a,b}$ un isomorphisme de $\varpi_{a,b}$ sur son image $L^m(\varpi_{a,b})$ dans $F_{a+m,b+m}$; $\bigwedge F$ est somme directe des $L^m(\varpi_{a,b})$; et, quels que soient a et b, $F_{a,b}$ est somme directe des $L^m(\varpi_{a-m,b-m})$ pour $0 \leq m \leq \min(a,b)$.

Des formules démontrées ci-dessus, il résulte que les espaces $L^m(\varpi_{a,b})$ sont appliqués les uns dans les autres par les opérateurs $P_{a,b}, L, *, \Lambda$, et par conséquent par tous les endomorphismes de l'espace vectoriel sous-jacent à $\bigwedge F$ qui appartiennent à l'algèbre engendrée par ces opérateurs. Ce fait, qui s'est présenté ici comme un résultat de calcul, peut s'expliquer autrement. Soit U le groupe des automorphismes de l'espace hermitien T muni de la forme H, c'est-à-dire le groupe des automorphismes de l'espace vectoriel T sur $\mathbf{C}$ qui laissent invariante la forme hermitienne H ; pour le choix de la base adopté jusqu'ici, U s'identifie au groupe unitaire à n variables. On a déjà vu au §1.1 que tout automorphisme de T, donc en particulier tout $X \in U$, détermine un automorphisme $X' = {}^t X$ de $T' = F_{1,0}$ et un automorphisme $X'' = {}^t\overline{X}$ de $T'' = F_{0,1}$, donc un automorphisme de $F = T' + T''$ et par suite un automorphisme X_1 de $\bigwedge F$. Comme les opérateurs $L, *, \Lambda$ sont canoniquement associés à la structure hermitienne de T et que X est un automorphisme de cette structure, il s'ensuit qu'ils sont permutables avec X_1 et que par suite les espaces $L^m(\varpi_{a,b})$ sont stables par X_1. Autrement dit, l'application $X \mapsto X_1$, qui est une représentation du groupe opposé à U dans le groupe des automorphismes de $\bigwedge F$, se décompose suivant les espaces $L^m(\varpi_{a,b})$ et induit sur chacun de ceux-ci une représentation du même groupe. On peut démontrer que *les représentations de ce groupe ainsi induites sur les $L^m(\varpi_{a,b})$ sont irréductibles* ; autrement dit, la décomposition de $\bigwedge F$ en somme directe des espaces $L^m(\varpi_{a,b})$ réalise précisément la décomposition de $X \mapsto X_1$ en représentations irréductibles du groupe opposé à U. Il s'ensuit alors, bien entendu, que tout opérateur permutable avec tous les X_1 transforme les uns dans les autres les espaces $L^m(\varpi_{a,b})$. On peut aussi tirer de là, au moyen de résultats très généraux dûs à S.S. Chern [4], le théorème de Hodge que nous démontrerons à la fin du chapitre suivant, d'après lequel les composantes suivant les $L^m(\varpi_{a,b})$ de toute forme harmonique sont elle-mêmes harmoniques.

2. Géométrie kählérienne locale

30

2.1. On supposera connues les notions de *variétés à structure C^∞* et de *variété à structure analytique réelle* (cf. de Rham [10, §1]) ; le mot « différentiable » sera pris comme synonyme de C^∞ et sera le plus souvent sous-entendu, toutes les variétés, fonctions, formes qu'on aura à considérer étant donc supposées différentiables (c'est-à-dire C^∞) sauf lorsque le contexte indique qu'on ne fait pas cette hypothèse. n° 1

On aura besoin aussi de la notion de *variété à structure analytique complexe* de dimension complexe n ; par analogie avec celle de variété C^∞ (de Rham [10, §1]) nous définirons une telle variété comme un espace topologique séparé V, à base dénombrable, muni de la donnée pour chaque $x \in V$ d'une classe de fonctions *à valeurs complexes*, dites *holomorphes* ou *analytiques complexes* au point x, définies chacune dans un voisinage ouvert de x, de façon à satisfaire à l'axiome :

Pour chaque $u \in V$ il existe un voisinage ouvert U de u et une application F de U dans $\mathbf{C}^n$, ayant les propriétés suivantes : a) F est un homéomorphisme de U sur un ouvert de $\mathbf{C}^n$; b) soient x un point de U, U' un voisinage ouvert de x. et F' la restriction de F à $U \cap U'$; alors, pour que f, définie dans U', soit holomorphe en x, il faut et il suffit que $f \circ F^{-1}$ le soit en $F(x)$ (c'est-à-dire dans un voisinage de $F(x)$ dans $\mathbf{C}^n$).

Une telle application F est appelée une *carte* de U ; si l'on a

$$F(x) = (z_1(x), \dots, z_n(x)),$$

on dit que les z_i, qui sont des fonctions holomorphes dans U en vertu de l'axiome, forment un système de coordonnées locales dans U. Une structure analytique complexe sur V sera fréquemment définie au moyen de la donnée d'un recouvrement 31 $\{U_i\}$ de V, et, pour chaque U_i, d'une carte, c'est-à-dire d'un système de coordonnées locales (cf. de Rham, *loc.cit.*).

La donnée sur V d'une structure analytique complexe de dimension complexe n implique celle d'une structure analytique réelle de dimension $2n$, dite *sous-jacente* à la précédente ; il suffit pour l'obtenir de prendre pour coordonnées locales, au voisinage de chaque point, les parties réelles et imaginaires des coordonnées locales complexes. Rappelons que la donnée sur V d'une structure analytique réelle implique celle d'une structure différentiable de même dimension, définie par les mêmes coordonnées locales.

Sur toute variété différentiable, on peut considérer des formes différentielles (de tous les degrés) à valeurs complexes ; si V est une telle variété, et T l'espace vectoriel des vecteurs tangents à V en un point $x \in V$, toute forme différentielle ω de degré 1 à valeurs complexes, définie dans un voisinage de x sur V, détermine sur T

une application **R**-linéaire $t \mapsto \omega(x;t)$ de T dans $\mathbf{C}$. Supposons en particulier V analytique complexe, de dimension complexe n ; soient $z_1, \dots, z_n$ des coordonnées locales complexes dans un voisinage de x ; alors, en posant $z_\alpha = x_\alpha + iy_\alpha$, les x_α, y_α forment un système de coordonnées locales réelles (pour la structure C^∞ sous-jacente à la structure donnée) dans le même voisinage de x sur V ; par suite, les $2n$ formes $t \mapsto dx_\alpha(x;t)$, $t \mapsto dy_\alpha(x,t)$ sur l'espace T sont linéairement indépendantes ; autrement dit, l'application

$$t \mapsto (dz_1(x;t), \dots, dz_n(x;t))$$

de T dans $\mathbf{C}^n$ est un isomorphisme de T sur l'espace vectoriel sur $\mathbf{R}$ sous-jacente à $\mathbf{C}^n$. On peut donc utiliser l'application réciproque de celle-là pour transporter à T la structure d'espace vectoriel sur $\mathbf{C}$ qui est canoniquement définie sur $\mathbf{C}^n$; la structure ainsi définie sur T satisfera donc à la condition $dz_\alpha(x;\lambda t) = \lambda dz_\alpha(x;t)$ quels que soient $t \in T, \lambda \in \mathbf{C}$, et $\alpha = 1, 2, \dots, n$; et cette condition la définit. Mais soit alors z une fonction holomorphe quelconque dans un voisinage de x sur V ; en vertu de l'axiome des structures complexes, on pourra, dans un voisinage suffisamment petit de x sur V, écrire $z = f(z_1, \dots, z_n)$, où f est une fonction holomorphe des n variables complexes z_α dans un voisinage du point $(z_1(x), \dots, z_n(x))$ dans $\mathbf{C}^n$. Il s'ensuit qu'on a, au voisinage de x :

$$dz = f'_1 dz_1 + \cdots + f'_n dz_n,$$

les f'_α étant les dérivées partielles de f par rapport aux z_α. On a donc $dz(x;\lambda t) =$
32 $\lambda dz(x;t)$ quels que soient $t \in T, \lambda \in \mathbf{C}$, et z holomorphe sur V au voisinage de x ; et, d'après ce qui précède, cette condition définit complètement la structure d'espace vectoriel complexe sur T ; on voit ainsi que celle-ci est indépendante du choix des coordonnées locales z_α.

On va maintenant définir une espèce de structure plus générale que les structures analytiques complexes, à savoir les *structures quasi-complexes*. La donnée d'une telle structure comporte d'abord la donnée d'une structure de *variété différentiable de dimension paire* $2n$ sur un espace V, et de plus, sur l'espace T_x des vecteurs tangents à V en tout point $x \in V$, d'une structure d'espace vectoriel sur $\mathbf{C}$, de manière à satisfaire l'axiome suivant :

Pour chaque $u \in V$, il existe un voisinage ouvert U de u et n formes différentielles à valeurs complexes $\omega_1, \dots, \omega_n$ définies (et différentiables C^∞) *dans U, tels que, pour tout $x \in U$, l'application*

$$t \mapsto (\omega_1(x;t), \dots, \omega_n(x;t))$$

soit un isomorphisme sur $\mathbf{C}^n$ de T_x muni de sa structure d'espace vectoriel sur $\mathbf{C}$.

On dira alors que les ω_α forment un *système de formes de structure* au voisinage de u ; il est clair que, si (ω'_α) est un autre système analogue, on aura, dans un voisinage de u, $\omega'_\alpha = \sum_\beta f_{\alpha\beta}\omega_\beta$, où $\|f_{\alpha\beta}\|$ est une matrice inversible de fonctions C^∞ à valeurs complexes.

Les définitions et résultats du §1.1 s'appliquent d'une manière évidente aux formes différentielles complexes sur toute variété quasi-complexe. En particulier, une forme différentielle sera dite *bihomogène* de *bidegré* (a, b), si, au voisinage de tout point u de V, elle peut s'écrire au moyen d'un système de formes de structure ω_α comme combinaison linéaire (à coefficients C^∞ à valeurs complexes) des formes

$$(\omega_{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge \omega_{\alpha_a}) \wedge (\bar\omega_{\beta_1} \wedge \cdots \wedge \bar\omega_{\beta_b})$$
$$(1 \le \alpha_1 < \cdots < \alpha_a \le n;\ 1 \le \beta_1 < \cdots < \beta_b \le n).$$

Toute forme différentielle η s'écrit comme somme de ses composantes bihomogènes $P_{a,b}\eta$. L'opérateur C est toujours défini par la formule (1.4) du §1.1. Une forme η est réelle si et seulement si $\eta = \bar{\eta}$.

On convient d'*orienter* (une fois pour toutes) toute variété quasi-complexe en lui donnant l'orientation qui rend positive la forme 33

$$\left(\frac{i}{2}\right)^n (\omega_1 \wedge \bar{\omega}_1) \wedge \cdots \wedge (\omega_n \wedge \bar{\omega}_n)$$

chaque fois que les ω_α forment un système de formes de structure dans un voisinage d'un point de la variété. Il s'ensuit que toute variété quasi-complexe est orientable. Il n'est d'ailleurs pas vrai que toute variété C^∞ orientable de dimension paire puisse être munie d'une structure quasi-complexe ; elle doit pour cela satisfaire à d'autres conditions, elles aussi de nature topologique, qui ont fait l'objet de divers travaux récents.

2.2. Sur une variété analytique complexe, toute forme bihomogène de bidegré (a, b) n° 2
peut s'exprimer localement, au moyen de coordonnées locales z_α, comme somme de termes de la forme

$$f \cdot (dz_{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge dz_{\alpha_a}) \wedge (d\bar{z}_{\beta_1} \wedge \cdots \wedge d\bar{z}_{\beta_b}).$$

Comme df est combinaison linéaire des $dz_\alpha, d\bar{z}_\beta$, la différentielle d'un tel terme est somme de termes bihomogènes de bidegrés respectifs $(a+1, b)$ et $(a, b+1)$. Donc, quelle que soit la forme η bihomogène de bidegré (a, b), $d\eta$ est somme de deux formes bihomogènes de bidegrés respectifs $(a+1, b)$ et $(a, b+1)$.

Il n'en est pas nécessairement de même sur une variété quasi-complexe. Sur une telle variété, soit (ω_α) un système de formes de structure au voisinage d'un point ; posons

$$\eta_\alpha = P_{2,0}(d\omega_\alpha), \quad \eta'_\alpha = P_{1,1}(d\omega_\alpha), \quad \eta''_\alpha = P_{0,2}(d\omega_\alpha).$$

la différentielle de la forme

$$f \cdot (\omega_{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge \omega_{\alpha_a}) \wedge (\bar{\omega}_{\beta_1} \wedge \cdots \wedge \bar{\omega}_{\beta_b})$$

sera somme des termes obtenus, d'une part en remplaçant le facteur f par df, d'autre part en remplaçant, soit un facteur ω_{α_i} par $\pm(\eta_{\alpha_i} + \eta'_{\alpha_i} + \eta''_{\alpha_i})$, soit un facteur $\bar{\omega}_{\beta_j}$ par $\pm(\bar{\eta}_{\beta_j} + \bar{\eta}'_{\beta_j} + \bar{\eta}''_{\beta_j})$, les signes étant convenablement choisis. Il s'ensuit qu'en tout cas cette différentielle est somme de formes bihomogènes de bidegrés respectifs $(a-1, b+2), (a, b+1), (a+1, b)$ et $(a+2, b-1)$; elle se réduit à une somme de formes bihomogènes de degrés $(a, b+1)$ et $(a+1, b)$ si l'on a $\eta''_\alpha = 0$ quel que soit α. On peut énoncer ce résultat comme suit : 34

Proposition 2.1. *Soit V une variété quasi-complexe. Pour que, quels que soient a, b, la différentielle de toute forme bihomogène de bidegré (a, b) soit somme de formes bihomogènes de bidegré respectifs $(a+1, b)$ et $(a, b+1)$, il faut et il suffit qu'il en soit ainsi pour les formes de bidegré $(1, 0)$, ou autrement dit qu'on ait $P_{0,2}(d\omega) = 0$ quelle que soit ω de bidegré $(1, 0)$.* Prop. 1

Lorsqu'il en est ainsi, on dira que la structure quasi-complexe donnée sur V est *intégrable*. Toute structure analytique complexe est donc quasi-complexe intégrable.

Soit V quasi-complexe intégrable ; si η est une forme bihomogène de bidegré (a, b) sur V, on posera :

$$d'\eta = P_{a+1,b}(d\eta), \quad d''\eta = P_{a,b+1}(d\eta)$$

Il est immédiat qu'on a, pour une telle forme :

$$d\eta = d'\eta + d''\eta, \quad d(C\eta) = \frac{1}{i}(Cd'\eta - Cd''\eta). \tag{2.1}$$

Convenons de définir un opérateur d^C au moyen de la formule :

$$d^C = C^{-1}dC.$$

Les formules (2.1) montrent qu'on a, pour toute forme bihomogène :

$$2d' = d + id^C \quad , \quad 2d'' = d - id^C.$$

Si on convient de définir en général d', d'' par ces formules, ces opérateurs coïncideront, pour toute forme bihomogène, avec ceux qui ont été définis ci-dessus ; ils sont donc bihomogènes, de bidegrés respectifs $(1, 0)$ et $(0, 1)$. On notera que d^C est, comme d, un opérateur *réel*, c'est-à-dire qu'il est son propre transformé par l'opérateur $\eta \mapsto \bar{\eta}$, ou encore qu'il est permutable avec celui-ci. Quant aux opérateurs d', d'', ils sont *imaginaires conjugués* l'un de l'autre, c'est-à-dire qu'ils sont transformés l'un de l'autre par l'opérateur $\eta \mapsto \bar{\eta}$, ce qui s'exprime par la formule

$$\overline{(d'\eta)} = d''\overline{(\eta)}.$$

Il est clair, par linéarité, que les formules (2.1) restent valables quelle que soit la forme η.

On a $d(\alpha \wedge \beta) = (d\alpha) \wedge \beta + (w\alpha) \wedge d\beta$; comme C est un automorphisme de l'algèbre extérieure des formes différentielles, on tire immédiatement de là une identité analogue pour d^C, et par suite aussi pour d', d''.

35 D'autre part, on a, quelle que soit la forme η :

$$0 = d(d\eta) = d'^2\eta + d'd''\eta + d''d'\eta + d''^2\eta.$$

Appliquant cela à une forme de bidegré (a, b), on voit qu'alors $d'^2\eta, (d'd'' + d''d')\eta$ et $d''^2\eta$ sont bihomogènes de bidegrés respectifs $(a + 2, b), (a + 1, b + 1), (a, b + 2)$; ils doivent donc s'annuler séparément. On a donc:

$$d'^2 = 0, \quad d''^2 = 0, \quad d'd'' + d''d' = 0. \tag{2.2}$$

Tenant compte de la définition de d^C, on tire de là :

$$2id'd'' = -2id''d' = dd^C = -d^Cd \tag{2.3}$$

n° 3 2.3. Une fonction holomorphe de n variables $(z_1, \ldots, z_n)$, définie dans un ouvert de $\mathbf{C}^n$, peut se définir comme une fonction f à valeurs complexes, indéfiniment différentiables (au sens de la structure C^∞ sous-jacente à la structure complexe de $\mathbf{C}^n$) et dont la différentielle df est une combinaison linéaire des dz_α. Avec les notations introduites ci-dessus, cette dernière condition s'écrit simplement $d''f = 0$; autrement dit, la relation $d''f = 0$ est équivalente aux conditions dites de Cauchy-Riemann. On sait d'ailleurs que la condition d'indéfinie différentiabilité (au sens réel) peut être remplacée par une condition beaucoup plus large ; mais peu nous importe ici.

Sous la forme $d''f = 0$, la condition ci-dessus se transporte immédiatement à toute variété à structure analytique complexe ; sur une telle variété, par conséquent, les fonctions holomorphes sont celles qui satisfont à $d''f = 0$, l'opérateur d'' étant défini au moyen de la structure quasi-complexe sous-jacente à la structure analytique complexe donnée. *Une structure quasi-complexe ne peut donc être sous-jacente qu'à une seule structure analytique complexe.* Pour qu'elle soit sous-jacente à une telle structure, il est nécessaire, comme on l'a vu, qu'elle soit intégrable ; d'après un résultat récent de Newlander et Nirenberg [9], cette condition est suffisante, ce qui entraîne, d'après ce qui précède, qu'il n'y a pas de distinction

à faire, sur une variété C^∞, entre structures analytiques complexes et structures quasi-complexes intégrables (compatibles avec la structure C^∞ donnée). Nous maintiendrons néanmoins cette distinction dans ce qui suit ; cela peut permettre, dans
certaines circonstances, d'éviter d'avoir à faire usage du théorème en question ; et 36
nous nous contenterons de faire voir qu'il n'y a pas de distinction à faire, *sur une variété analytique réelle*, entre structures analytiques complexes et structures quasi-complexes intégrables (compatibles avec la structure analytique réelle donnée). Il suffit pour cela de démontrer la proposition suivante :

Proposition 2.2. *Soit V une variété analytique réelle de dimension $2n$; supposons* Prop. 2
donnée sur V une structure quasi-complexe intégrable telle qu'au voisinage de tout point de V il existe un système de formes de structure analytiques. Alors il existe sur V une structure analytique complexe déterminant à la fois la structure analytique réelle et la structure quasi-complexe données.

Le théorème étant purement local, on peut se borner au cas où V est un voisinage de 0 dans $\mathbf{R}^{2n}$; soit (ω_α) un système de formes de structure analytiques dans ce voisinage. On peut écrire

$$\omega_\alpha = \sum_{j=1}^{2n} f_{\alpha j}(x_1, \ldots, x_{2n}) dx_j,$$

où les $f_{\alpha j}$ sont des fonctions à valeurs complexes qui peuvent se développer au voisinage de 0 en séries de Taylor convergentes en $x_1, \ldots, x_{2n}$. Si on considère $\mathbf{R}^{2n}$ comme plongée dans $\mathbf{C}^{2n}$, il y aura un voisinage U de 0 dans $\mathbf{C}^{2n}$ où les développements de Taylor des $f_{\alpha j}$ convergent et définissent donc des fonctions holomorphes qu'on notera encore $f_{\alpha j}$; les formules $\omega_\alpha = \sum_j f_{\alpha j} dx_j$ définissent alors n formes différentielles dans U, qui induisent sur $\mathbf{R}^{2n} \cap U$ les formes de structure données. Soit de plus $g_{\alpha j}$ la série de Taylor qui se déduit du développement de Taylor de $f_{\alpha j}$ en remplaçant chaque coefficient par son imaginaire conjugué ; les $g_{\alpha j}$ seront, elles aussi, convergentes dans U. Posons, dans U, $\eta_\alpha = \sum_j g_{\alpha j} dx_j$; sur $\mathbf{R}^{2n} \cap U$, ces formes induisent les $\bar{\omega}_\alpha$.

Comme les ω_α sont les formes de structure d'une structure quasi-complexe, les $2n$ formes

$$\omega_\alpha(0; t) = \sum_{j=1}^{2n} f_{\alpha j}(0) t_j, \quad \bar{\omega}_\alpha(0; t) = \sum_{j=1}^{2n} g_{\alpha j}(0) t_j$$

constituent une base pour l'ensemble des applications $\mathbf{R}$-linéaires dans $\mathbf{C}$ de l'espace T des vecteurs tangents à V en 0 ; elles sont donc linéairement indépendantes sur $\mathbf{C}$, d'où il s'ensuit que les $2n$ formes $\omega_\alpha, \eta_\alpha$ sont linéairement indépendantes en 0 et par suite dans un voisinage suffisamment petit U' de 0 dans U ; on peut donc, dans
U', exprimer les dx_j comme combinaisons linéaires à coefficients holomorphes des 37
$\omega_\alpha, \eta_\alpha$, et par suite exprimer les $d\omega_\alpha$ comme combinaisons linéaires à coefficients holomorphes des $\omega_\alpha \wedge \omega_\beta, \omega_\alpha \wedge \eta_\beta, \eta_\alpha \wedge \eta_\beta$:

$$d\omega_\alpha = \sum_{\beta<\gamma} \varphi_{\alpha\beta\gamma}(x) \omega_\beta \wedge \omega_\gamma + \sum_{\beta,\gamma} \chi_{\alpha\beta\gamma}(x) \omega_\beta \wedge \eta_\gamma + \sum_{\beta<\gamma} \psi_{\alpha\beta\gamma} \eta_\beta \wedge \eta_\gamma$$

La structure quasi-complexe donnée étant supposée intégrable, les $\psi_{\alpha\beta\gamma}(x)$ induisent 0 sur $\mathbf{R}^{2n} \cap U'$; ces fonctions étant holomorphes, elles s'annulent donc dans U', ce qui montre que, dans U', les $d\omega_\alpha$ peuvent s'écrire sous la forme $\sum_\beta \omega_\beta \wedge \theta_{\alpha\beta}$ où les $\theta_{\alpha\beta}$ sont des combinaisons linéaires des dx_j à coefficients holomorphes. Or ce sont précisément là les conditions d'intégrabilité complète du système de Pfaff $\omega_\alpha = 0$; et le théorème de Frobenius sur les systèmes de Pfaff complètement intégrables dans le domaine analytique complexe montre qu'il existe alors un voisinage U'' de 0 dans U', et n fonctions $F_\alpha(x_1, \dots, x_{2n})$ holomorphes dans U'', telles que dans U'' les dF_α puissent s'exprimer comme combinaisons linéaires des ω_α, et les ω_α comme combinaissons linéaires des dF_α, avec des coefficients holomorphes. Il s'ensuit que, si on note z_α la restriction de $F_\alpha(x_1, \dots, x_{2n})$ à $\mathbf{R}^{2n} \cap U''$, les différentielles dz_α forment un système de formes de structure dans U'' pour la structure quasi-complexe donnée sur V. De plus, les $2n$ formes $dz_\alpha(0;t), d\bar{z}_\alpha(0;t)$ forment une base pour l'ensemble des applications $\mathbf{R}$-linéaires de T dans $\mathbf{C}$; par suite, si on pose $z_\alpha = u_\alpha + iv_\alpha$, les u_α et v_α étant à valeurs réelles, les formes $du_\alpha(0;t), dv_\alpha(0;t)$ constituent une base de l'espace des formes $\mathbf{R}$-linéaires sur T, c'est-à-dire qu'elles sont linéairement indépendantes. D'après le théorème des fonctions implicites, il y a donc un voisinage U_0 de 0 dans $\mathbf{R}^{2n} \cap U''$ sur lequel l'application $x \mapsto (z_\alpha(x))$ induit un homéomorphisme de U_0 sur un ouvert de $\mathbf{C}^n$. On définira une structure complexe dans U_0 en y prenant les z_α comme coordonnées complexes locales ; il est clair alors que cette structure a les propriétés annoncées dans notre proposition.

Sur une variété quasi-complexe intégrable, on dira qu'une forme différentielle η de degré p est *holomorphe* si elle est bihomogène de bidegré $(p,0)$ et satisfait à $d''\eta = 0$; en particulier, une fonction f sera dite holomorphe si $d''f = 0$. Sur une variété analytique complexe, cette dernière notion coïncide avec la notion usuelle ; et, pour qu'une forme de degré p soit holomorphe, il faut et il suffit qu'elle s'exprime au
38 voisinage de tout point de la variété au moyen de coordonnées complexes locales z_α comme combinaison linéaire des $dz_{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge dz_{\alpha_p}$ *avec des coefficients holomorphes* ; la vérification de ce résultat est immédiate. Il est clair que toute forme *fermée* de bidegré $(p,0)$ est holomorphe.

Prop. 3 **Proposition 2.3.** *Soit V une variété à structure quasi-complexe intégrable ; alors toute fonction F à valeurs complexes sur V, de la forme $F = f + \bar{g}$ avec f et g holomorphes, satisfait à $d'd''F = 0$. Réciproquement, si le premier groupe d'homologie de V est nul, toute fonction F sur V satisfaisant à $d'd''F = 0$ est de la forme $F = f + \bar{g}$ avec f et g holomorphes ; et, F étant donnée, f et g sont bien déterminées par ces conditions à des constantes près.*

La première partie résulte immédiatement des relation (2.3). Quant à la réciproque, supposons que $d'd''F = 0$; d'après (2.2) et (2.3), cela équivaut à $d(d'F) = 0$. Si le premier groupe d'homologie de V est nul, $d(d'F) = 0$ entraîne qu'il y a une fonction f sur V telle que $df = d'F$; cela équivaut à $d'f = d'F$ et $d''f = 0$, ce qui s'écrit aussi, en posant $g = \bar{F} - \bar{f}$, $d'(\bar{g}) = 0$ et $d''f = 0$. Mais $d'(\bar{g}) = 0$ équivaut à $d''g = 0$. Donc f et g sont holomorphes, et on a $F = f + \bar{g}$. Si $F = 0$, on a $d'f = 0, d''(\bar{g}) = 0$, donc f et g sont constantes.

Cor. 1 **Corollaire 2.4.** *Sur une variété quasi-complexe intégrable V, toute fonction F qui est, soit la partie réelle d'une fonction holomorphe, soit de la forme $F = \log|f|^2$ avec f holomorphe et partout non nulle, satisfait à $d'd''F = 0$. Réciproquement, si le premier groupe d'homologie de V est nul, toute fonction F à valeurs réelles, satisfaisant à $d'd''F = 0$, est la partie réelle d'une fonction holomorphe, bien déterminée à une constante purement imaginaire près.*

En ce qui concerne la dernière assertion, il suffit d'observer que, si $F = f + \bar{g}$ est à valeur réelles, on a $f - g = \bar{f} - \bar{g}$, donc $h = f - g$ est à valeur réelles ; si f et g sont holomorphes, on a $d''h = 0$, donc aussi, si h est à valeur réelles, $d'h = 0$, d'où $dh = 0$; h est donc constante, et F est la partie réelle de la fonction holomorphe $2f - h$.

Cor. 2 **Corollaire 2.5.** *Soit V une variété à structure complexe de dimension complexe*

n. Soit Θ une forme différentielle de degré $2n$, réelle et partout > 0, sur V. Alors il y a sur V une forme Ω et une seule, réelle et bihomogène de bidegré $(1,1)$, telle que, si $z_1, \dots, z_n$ sont des coordonnées complexes locales dans un voisinage U d'un point de V et si F est la fonction définie dans U par

$$\Theta = i^n F \prod_{\alpha=1}^{n} (dz_\alpha \wedge d\bar{z}_\alpha).$$

Ω s'exprime dans U par $\Omega = id'd''(\log F)$. 39

La variété V étant orientée comme il a été dit à la fin du §2.1, l'hypothèse $\Theta > 0$ implique, avec les notations de l'énoncé, qu'on a $F > 0$ dans U. Si, au voisinage d'un point de U, $(z'_a, \dots, z'_n)$ est un autre système de coordonnées locales, on aura, au voisinage de ce point :

$$dz'_1 \wedge \cdots \wedge dz'_n = J dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n$$

où J est le jacobien de $(z'_a, \dots, z'_n)$ par rapport à $(z_1, \dots, z_n)$ et est donc une fonction holomorphe non nulle. Le coefficient F' de l'expression de Θ au moyen des z' est donc $F' = F(J\bar{J})^{-1}$, ce qui donne

$$d'd''(\log F') = d'd''(\log F) - d'd''(\log |J|^2).$$

Le second terme du second membre est nul d'après le corollaire 2.4. Cela montre bien que la forme Ω est indépendante du choix des coordonnées locales.

2.4. La relation $d^2 = 0$ sur une variété différentiable signifie que, si $\omega = d\eta$, on a $d\omega = 0$; réciproquement, si ω est de degré $p > 0$ et si $d\omega = 0$, on sait (DE RHAM [10, §19]) que tout point a un voisinage dans lequel on peut mettre ω sous la forme $d\eta$. En raison de la relation $d'^2 = 0$, une question analogue de pose au sujet de l'opérateur d' ; il y sera répondu au §4.4. Pour l'instant, nous démontrerons seulement un résultat partiel : n° 4

Proposition 2.6. *Soit V une variété à structure complexe. Soit ω une forme sur V, analytique au sens réel, telle que $d'\omega = 0$. Alors tout point de V a un voisinage dans lequel on peut mettre ω sous la forme $\omega = d'\eta + \bar{\zeta}$, où ζ est une forme holomorphe.* Prop. 4

La question étant purement locale, on peut supposer qu'on est dans un voisinage de 0 dans $\mathbf{C}^n$. Pour toute suite croissante $A = (\alpha_1, \dots, \alpha_a)$ d'éléments distincts de l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$, posons

$$\omega_A = dz_{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge dz_{\alpha_a},$$
$$\eta_A = \sum_{j=1}^{a} (-1)^{j+1} z_{\alpha_j} dz_{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge dz_{\alpha_{j-1}} \wedge dz_{\alpha_{j+1}} \wedge \cdots \wedge dz_{\alpha_a},$$

en convenant de prendre $\omega_A = 1, \eta_A = 0$ pour $a = 0$. Dire qu'une forme donnée dans un ouvert de $\mathbf{C}^n$ est analytique au sens réel signifie qu'elle s'écrit comme combinaison linéaire des formes $\omega_A \wedge \bar{\omega}_B$ avec des coefficients qui sont des fonctions 40 analytiques des parties réelles et imaginaires des z_α, donc peuvent se développer au voisinage de tout point en séries de TAYLOR convergentes. Au voisinage de l'origine, il revient au même de dire que ces coefficients peuvent de développer en séries de puissances des $z_\alpha, \bar{z}_\alpha$. Convenons de ranger en une suite $(M_\nu(z))$ l'ensemble de tous les monomes en $z_1, \dots, z_n$; toute série de puissances dans les $z_\alpha, \bar{z}_\alpha$ pourra s'écrire $\sum_\nu M_\nu(z) P_\nu(\bar{z})$, où les $P_\nu(\bar{z})$ sont des séries de puissances dans les $\bar{z}_\alpha$; et toute fonction analytique au sens réel au voisinage de 0 pourra s'écrire dans un voisinage de 0 comme une telle série, les $P_\nu(\bar{z})$ et la série $\sum_\nu M_\nu(z) P_\nu(\bar{z})$ étant absolument convergentes dans ce voisinage. Par suite, toute forme différentielle, analytique au sens réel au voisinage de 0, pourra s'écrire dans un voisinage de 0 comme somme des termes de la forme

$$\Big(\sum_\nu M_\nu(z)P_\nu(\bar z)\Big)\omega_A\wedge\bar\omega_B,$$

cette expression étant d'ailleurs unique. Pour chaque ν, soit d_ν le degré du monome $M_\nu(z)$; a désignant toujours le degré de la forme ω_A, convenons de définir un opérateur I' en posant

$$I'\bigg(\Big(\sum_\nu M_\nu(z)P_\nu(\bar z)\Big)\omega_A\wedge\bar\omega_B\bigg)=\Big(\sum_\nu\frac{1}{a+d_\nu}M_\nu(z)p_\nu(\bar z)\Big)\eta_A\wedge\bar\omega_B,$$

étant entendu que pour $a=0$ le second membre est 0 ; il est clair que la série du second membre est absolument convergente dans tout voisinage de 0 où la série du premier membre est convergente. La définition de cet opérateur s'étend alors par linéarité à toutes les formes différentielles analytiques au sens réel dans un voisinage de 0 ; si ω est une telle forme, il en est de même de $I'\omega$, bien que $I'\omega$ ne soit pas nécessairement définie dans le même voisinage de 0 que ω. Supposons d'autre part les monomes $M_\nu(z)$ ordonnés de telle sorte que $M_0(z)=1$, donc $d_0=0$; définissons un opérateur J' en posant

$$J'\bigg(\Big(\sum_\nu M_\nu(z)P_\nu(\bar z)\Big)\bar\omega_B\bigg)=P_0(\bar z)\bar\omega_B,$$

et $J'\omega=0$ pour toute forme ω bihomogène de bidegré (a,b) avec $a>0$, et étendant cette définition par linéarité à toutes les formes analytiques réelles au voisinage de 0. Un calcul facile montre alors que l'on a, chaque fois que ω est une telle forme :

$$\omega=d'I'\omega+I'd'\omega+J'\omega,$$

cette relation étant satisfaite dans tout voisinage de 0 où toutes les séries de puissances qui interviennent dans l'expression de ω sont convergentes. La proposition
41 2.6 suit aussitôt de là si on remarque de plus que $\overline{J'\omega}$ est holomorphe par définition, quelle que soit ω.

n° 5 2.5. Soit V une variété *quasi-complexe*. Supposons donnée sur V une forme différentielle Ω réelle bihomogène de bidegré $(1,1)$. Localement, Ω pourra s'exprimer au moyen de formes de structures ω_α :

$$\Omega=\frac{i}{2}\sum_{\alpha,\beta}h_{\alpha\beta}\omega_\beta\wedge\bar\omega_\alpha,$$

où les $h_{\alpha\beta}$ sont des fonctions différentiables à valeurs complexes ; pour que Ω soit réelle, il faut et il suffit que $h_{\beta\alpha}=\bar h_{\alpha\beta}$.

Au bicovecteur déterminé en chaque point de V par Ω, on a vu au §1.2, qu'on peut associer d'une manière invariante une forme hermitienne sur l'espace des vecteurs tangents à V en ce point ; *si celle-ci est partout positive non-dégénérée, on dira que la forme Ω est positive non-dégénérée.* En ce cas la forme hermitienne associé à Ω détermine sur V un ds^2 qui, au moyen des formes de structure ω_α et des coefficients $h_{\alpha\beta}$ de l'expression de Ω, s'écrit comme suit :

$$ds^2=\sum_{\alpha,\beta}h_{\alpha\beta}\bar\omega_\alpha\omega_\beta,$$

la multiplication devant ici s'entendre au sens des formes quadratiques de différentielles.

La structure définie sur une variété V par la donnée sur V d'une structure quasi-complexe et d'une forme Ω réelle positive non-dégénérée de bidegré $(1,1)$

est dite *structure hermitienne* ; Ω s'appelle *forme fondamentale* de la structure. Le ds^2 associé comme ci-dessus à Ω détermine alors sur V une structure d'*espace de* RIEMANN, dite sous-jacente à la structure hermitienne donnée ; celle-ci permet (DE RHAM [10, §§24 et 25]) de définir des opérateurs $*, \delta$ et Δ opérant sur les formes différentielles réelles, et qu'on convient d'étendre par linéarité aux formes différentielles complexes. L'opérateur $*$ opère « ponctuellement », c'est-à-dire sur les multicovecteurs en chaque point, et a été longuement étudié au §1 ; si on tient compte du fait que la dimension (réelle) de V est paire, on voit que la définition des deux autres s'écrit

$$\delta = -*d*, \quad \Delta = d\delta + \delta d;$$

rappelons encore que Δ est permutable avec $*, d$ et δ. Comme d, les opérateurs δ, Δ sont *locaux*, c'est-à-dire que, si une forme α s'annule dans un ouvert U sur V, il en est de même de $\delta\alpha, \Delta\alpha$.

D'autre part la définition des opérateurs L, Λ, donnée au §1.4 pour les multico- 42
vecteurs, s'étend immédiatement aux formes différentielles sur V :

$$L\alpha = \Omega \wedge \alpha, \quad \Lambda = *^{-1}L* = w * L * .$$

Théorème 2.7. *Soit V une variété hermitienne dont la forme fondamentale Ω est* Th. 1
fermée, c'est-à-dire satisfait à $d\Omega = 0$. Alors on a

$$[L, d] = 0, \quad [\Lambda, \delta] = 0, \quad [L, \delta] = d^C = C^{-1}dC, \quad [\Lambda, d] = -\delta^C = -C^{-1}\delta C. \tag{2.4}$$

La première relation s'écrit aussi $Ld = dL$, et exprime que L est permutable avec d ; c'est une conséquence immédiate de l'hypothèse $d\Omega = 0$. La seconde exprime de même que Λ est permutable avec δ ; compte tenu des définitions de Λ et δ, c'est une conséquence immédiate de la précédente.

Les deux autres relations s'écrivent aussi

$$L\delta - \delta L = C^{-1}dC, \quad \Lambda d - d\Lambda = -C^{-1}\delta C$$

Compte tenu des définitions de Λ et δ, chacune d'elle est une conséquence immédiate de l'autre ; démontrons par exemple la dernière. Soit η une forme différentielle de degré p ; appliquant le théorème 1.4, nous poserons

$$\eta_r = \Phi_{p,r}(L, \Lambda)\eta,$$

où les $\Phi_{p,r}$ sont tels qu'ils ont été définis dans ce théorème. On a alors $\Lambda\eta_r = 0$, et $\eta = \sum L^r\eta_r$. Il s'ensuit qu'il suffit, pour démontrer la formule en question, de vérifier qu'on a

$$\Lambda d(L^r\eta) - d\Lambda(L^r\eta) = -C^{-1}\delta C(L^r\eta)$$

pour toute forme η qui satisfait à $\Lambda\eta = 0$. Soit p le degré de η ; d'après le théorème 1.1, on peut supposer que $p \leq n$ et $r \leq n - p$, car dans le cas contraire on aurait $L^r\eta = 0$; et on a $L^{n-p+1}\eta = 0$, doù aussi $L^{n-p+1}d\eta = 0$ puisque d est permutable avec L. Mais $d\eta$ est de degré $p + 1$; appliquant à $d\eta$ le théorème 1.4, et tenant compte du corollaire 1.6 de ce théorème, on voit qu'on aura $d\eta = \eta_0 + L\eta_1$, avec $\Lambda\eta_0 = 0, \Lambda\eta_1 = 0$. On a donc, en tenant compte de la permutabilité de d et L et en utilisant la formule (1.15) :

$$\Lambda dL^r\eta = \Lambda L^r\eta_0 + \Lambda L^{r+1}\eta_1 = r(n-p-r)L^{r-1}\eta_0 + (r+1)(n-p-r+1)L^r\eta_1,$$
$$d(\Lambda L^r\eta) = r(n-p-r+1)dL^{r-1}\eta = r(n-p-r+1)(L^{r-1}\eta_0 + L^r\eta_1).$$

D'autre part, on a 43

$$-C^{-1}\delta C(L^r\eta) = C^{-1} * dC(*L^r\eta).$$

En vertu du théorème 1.3, on a $*L^r\eta = \gamma L^{n-p-r}C\eta$, où γ est le coefficient numérique figurant au second membre de la formule (1.16) dans ce théorème. Comme d et C sont permutables avec L, on a donc :

$$-C^{-1}\delta C L^r\eta = (-1)^p\gamma C^{-1} * (L^{n-p-r}\eta_0 + L^{n-p-r}\eta_1).$$

Il suffit alors d'appliquer encore une fois aux deux termes du second membre de cette dernière relation le théorème 1.3, et de tenir compte encore de la permutabilité de C et L, pour achever la vérification de la formule annoncée.

Cor. 1 **Corollaire 2.8.** *Les hypothèses étant celles du théorème 2.7, on a :*

$$[L, d^C] = 0, \quad [\Lambda, \delta^C] = 0, \quad [L, \delta^C] = -d, \quad [\Lambda, d^C] = \delta^C. \tag{2.5}$$

Ces relations s'obtiennent en effet à partir des relations (2.4) en multipliant celles-ci à gauche par C^{-1} et à droite par C, compte tenu de ce que C est permutable avec L et Λ et de ce qu'on a $C^2 = w$ et parsuite $(d^C)^C = -d$ et $(\delta^C)^C = -\delta$.

Cor. 2 **Corollaire 2.9.** *Les hypothèses étant celles du théorème 2.7, on a $\delta\eta = 0$ pour toute forme bihomogène η satisfaisant à $d\eta = 0, \Lambda\eta = 0$, et en particulier pour toute forme fermée de bidegré $(a, 0)$ ou $(0, a)$.*

En vertu de la dernière des relatione (2.4), $d\eta = \Lambda\eta = 0$ entraîne $C^{-1}\delta C\eta = 0$, donc $\delta C\eta = 0$ et par suite $\delta\eta = 0$ si η est bihomogène. Comme Λ est bihomogène de bidegré $(-1, -1)$, on a $\Lambda\eta = 0$ pour tout η de bidegré $(a, 0)$ ou $(0, a)$, d'où la dernière assertion.

Cor. 3 **Corollaire 2.10.** *Les hypothèses étant celles du théorème 2.7, on a $\Delta F = 0$ pour toute fonction F satisfaisant à $d'd''F = 0$.*

Il suffit, pour le voir, d'appliquer la seconde partie du corollaire 2.9 aux formes $d'F$ et $d''F$.

n° 6 2.6. Soit V une variété hermitienne dont la structure quasi-complexe soit intégrable. Comme C est permutable avec $*$, on a $\delta^C = - * d^C *$; on peut donc poser:

$$\delta' = - * d'' * = \frac{1}{2}(\delta - i\delta^C), \quad \delta'' = - * d' * = \frac{1}{2}(\delta + i\delta^C). \tag{2.6}$$

44 La première expression pour δ' montre que δ' est bihomogène de bidegré $(-1, 0)$, et de même δ'' est bihomogène de bidegré $(0, -1)$. Des relations (2.2), on déduit immédiatement les suivantes :

$$\delta'^2 = \delta''^2 = \delta'\delta'' + \delta''\delta' = 0; \tag{2.7}$$

bien entendu, on a aussi pour δ', δ'' des relations analogues à (2.3).

On dira désormais qu'on a défini sur une variété V une *structure kählérienne* si on s'est donné sur V une structure hermitienne satisfaisant aux deux conditions suivantes :

(a) *la structure quasi-complexe sous-jacente est intégrable ;*

(b) *la forme fondamentale Ω est fermée, c'est-à-dire que $d\Omega = 0$.*

Le théorème 2.7 s'applique alors, ainsi que ses corollaires. Il s'ensuit immédiatement qu'on a, *sur toute variété kählérienne :*

$$\begin{gathered} [L, d'] = [L, d''] = 0 \quad , \quad [\Lambda, \delta'] = [\Lambda, \delta''] = 0 \\ [L, \delta'] = id'', \quad [L, \delta''] = -id', \quad [\Lambda, d'] = i\delta'', \quad [\Lambda, d''] = -i\delta'. \end{gathered} \tag{2.8}$$

Notons aussi les relations

$$\begin{aligned} \delta d^C &= -d^C\delta = \delta L\delta = -d^C\Lambda d^C, \\ d\delta^C &= -\delta^C d = \delta^C L\delta^C = -d\Lambda d, \\ d'\delta'' &= -\delta'' d' = -i\delta'' L\delta'' = -id'\Lambda d', \\ d''\delta' &= -\delta' d'' = i\delta' L\delta' = id''\Lambda d''. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Le première par exemple s'obtient en remplaçant, dans δd^C ou bien dans $d^C\delta$, soit d^C par son expression tirée de la troisième relation (2.4), soit δ par son expression tirée de la quatrième relation (2.5) ; et les autres s'obtiennent de même.

Théorème 2.11. *Sur une variété kählérienne, Δ est un opérateur bihomogène de bidegré $(0,0)$ permutable avec $*, d$ et L ; et on a* Th. 2

$$\frac{1}{2}\Delta = d'\delta' + \delta' d' = d''\delta'' + \delta'' d''. \tag{2.10}$$

On sait déjà que Δ est permutable avec $*$ et d. On a, puisque d et L sont permutables

$$\Delta L - L\Delta = d\delta L - Ld\delta + \delta dL - L\delta d = -d(L\delta - \delta L) - (L\delta - \delta L)d.$$

Appliquant le théorème 2.7, on voit que le dernier membre s'écrit $-dd^C - d^C d$; il 45
s'annule donc d'après (2.3), ce qui montre que Δ et L sont permutables.

D'autre part, remplaçons, dans le définition de Δ,δ par son expression de la dernière relation (2.5) ; il vient :

$$\Delta = d\Lambda d^C - dd^C\Lambda + \Lambda d^C d - d^C\Lambda d.$$

Multiplions à gauche par C^{-1} et à droite par C ; on obtient :

$$\Delta^C = -d^C\Lambda d + d^C d\Lambda - \Lambda dd^C + d\Lambda d^C.$$

Compte tenu de (2.3), on voit que ces expressions de Δ et Δ^C sont identiques ; on a donc $\Delta = \Delta^C$. Considérons alors l'expression

$$\begin{aligned} 4(d'\delta' + \delta' d') &= (d + id^C)(\delta - i\delta^C) + (\delta - i\delta^C)(d + id^C) \\ &= (d\delta + \delta d) + (d^C\delta^C + \delta^C d^C) + i(d^C\delta + \delta d^C) - i(d\delta^C + \delta^C d). \end{aligned}$$

Au dernier membre, les deux derniers termes sont nuls en vertu de (2.9) ; les deux premiers sont égaux, l'un à Δ, l'autre à Δ^C qui n'est autre que Δ. Cela démontre la première des relations (2.10). En changeant i en $-i$ dans ce calcul, on obtient de même la seconde. L'une ou l'autre de ces relations montre que Δ est bihomogène de bidegré $(0,0)$.

Corollaire 2.12. *Sur une variété kählérienne, Δ appartient au centre de l'algèbre d'opérateurs engendrée par $*, d, L$ et les $P_{a,b}$. En particulier, Δ est permutable avec $C, \Lambda, d', d'', \delta, \delta', \delta''$.* Cor. 1

Pour énoncer le résultat suivant, rappelons qu'on appelle *harmonique* toute forme η qui satisfait à $\Delta\eta = 0$.

Corollaire 2.13. *Soit η une forme harmonique de degré p sur une variété kählérienne. Alors, dans la décomposition canonique de η fournie par le théorème 1.4* Cor. 2

$$\eta = \sum_{r \geq (p-n)^+} L^r\eta_r; \qquad \eta_r = \Phi_{p,r}(L,\Lambda)\eta, \quad \Lambda\eta_r = 0, \tag{2.11}$$

les formes η_r et $L^r\eta_r$ sont harmoniques.

C'est une conséquence immédiate du fait que Δ est permutable avec L et Λ, et de l'expression des η_r au moyen de η donnée par la deuxième des relations (2.11).

3. Structures induites ; structures quotientes ; construction de métriques kählériennes

46

n° 1 3.1. Soient V, W deux variétés analytiques complexes, de dimensions complexes n et p respectivement. Soit φ une application continue de W dans V. On dira que φ est *holomorphe* ou *analytique complexe* en $x \in W$ si, quelle que soit la fonction f défini dans un voisinage de $\varphi(x)$ sur V et holomorphe en ce point, la fonction $f \circ \varphi$ est holomorphe en x sur W. Soient $z_1, \ldots, z_n$ un système de coordonnées locales au voisinage de $\varphi(x)$ sur V, et $w_1, \ldots, w_p$ un tel système au voisinage de x sur W ; supposons φ holomorphe en x ; alors les fonctions $z_\alpha \circ \varphi$ sont holomorphe sur W en x, de sorte qu'en vertu de l'axiome des structures complexes il y a n fonctions $\varphi_\alpha(w_1, \ldots, w_p)$, holomorphes dans un voisinage du point $(w_1(x), \ldots, w_p(x))$ dans $\mathbf{C}^p$, telles que l'on ait, pour u suffisamment voisin de x :

$$z_\alpha(\varphi(u)) = \varphi_\alpha(w_1(u), \ldots, w_p(u)) \qquad (1 \leq \alpha \leq n).$$

Réciproquement, s'il en est ainsi, il résulte immédiatement de l'axiome des structures complexes que φ est holomorphe en x. Si φ est holomorphe en tout point de W, on dira que φ est une application *holomorphe* ou *analytique complexe* de W dans V.

Prop. 1 **Proposition 3.1.** *Soient V, W deux variétés analytiques complexes, de dimensions n et p respectivement. Soit φ une application de W dans V, holomorphe en $x \in W$. Alors les trois propriétés suivantes sont équivalentes :*

(a) toute fonction g définie dans un voisinage de x sur W et holomorphe en x coïncide dans un voisinage de x avec une fonction de la forme $f \circ \varphi$, où f est définie dans un voisinage du point $\varphi(x)$ sur V et est holomorphe en $\varphi(x)$ sur V ;

47 *(b) φ détermine une application injective de l'espace des vecteurs tangents à W en x dans l'espace des vecteurs tangents à V en $\varphi(x)$;*

(c) il y un voisinage ouvert U de x dans W, un voisinage ouvert U' de $\varphi(x)$ dans V, et un système $z_1, \ldots, z_n$ de coordonnées locales complexes pour V dans U', tels que φ induise sur U un isomorphisme de U sur l'ensemble des points de U' pour lesquels on a $z_{p+1} = \cdots = z_n = 0$, celui-ci étant muni de la structire complexe déterminée par les coordonnées locales $z_1, \ldots, z_p$.

Les propriétés (a), (b), (c) étant purement locale, on peut, pour démontrer la proposition, remplacer V et W pas des voisinages de $\varphi(x)$ sur V et de x sur W qu'on peut supposer respectivement isomorphes à des voisinages de 0 dans $\mathbf{C}^n$ et dans $\mathbf{C}^p$; autrement dit, on peut supposer que V et W sont de tels voisinages, et aussi qu'on a $x = 0$, $\varphi(x) = 0$. Soient $z_1, \ldots, z_n$ les coordonnées dans $\mathbf{C}^n$ et $w_a, \ldots, w_p$ les coordonnées dans $\mathbf{C}^p$; φ est alors donnée par

$$(w_1, \ldots, w_p) \mapsto (\varphi_1(w), \ldots, \varphi_n(w)),$$

où par hypothèse les φ_α sont n fonctions holomorphes dans W. Si on a $g = f \circ \varphi$, on aura

$$g(w) = f(\varphi_1(w), \ldots, \varphi_n(w))$$

et par suite $dg = \sum_\alpha f'_\alpha d\varphi_\alpha$, où les f'_α sont définies par $df = \sum_\alpha f'_\alpha dz_\alpha$.

Supposons (a) satisfaite ; on peut alors prendre pour g toute fonction holomorphe en 0 sur W, par exemple w_ν ; on aura donc p relations de la forme $dw_\nu = \sum_\alpha f'_{\alpha\nu} d\varphi_\alpha (1 \leq \nu \leq p)$. Il s'ensuit que, parmi les n covecteurs déterminés en 0 par les formes $d\varphi_\alpha$, il y en a p linéairement indépendants sur $\mathbf{C}$. Si on pose $d\varphi_\alpha = \sum_\nu \varphi'_{\alpha\nu} dw_\nu$, cela revient à dire que la matrice $\|\varphi'_{\alpha\nu}(0)\|$ est de rang p, ce qui équivaut à la condition (b).

Supposons (b) satisfaite ; parmi les covecteurs déterminés par les $d\varphi_\alpha$ en 0, il y en a donc p linéairement indépendants ; après avoir fait au besoin une permutation sur les z_α, on peut supposer que ce sont $d\varphi_1, \dots, d\varphi_p$. En vertu du théorème des fonctions implicites, on peut prendre $\varphi_1, \dots, \varphi_p$ comme coordonnées locales sur W dans un voisinage suffisamment petit de 0 ; remplaçant W par ce voisinage, on peut donc supposer qu'on a $\varphi_\nu(w) = w_\nu$ pour $1 \leq \nu \leq p$. Cela posé, il résulte du théorème des fonctions implicites qu'on peut prendre

$$(z_1, \dots, z_p, z_{p+1} - \varphi_{p+1}(z_1, \dots, z_p), \dots, z_n - \varphi_n(z_1, \dots, z_p))$$

pour coordonnées locales sur V dans un voisinage suffisamment petit de 0 ; remplaçant V par un tel voisinage, et y prenant ces coordonnées locales, on voit que φ 48
n'est alors pas autre chose que l'application

$$(w_1, \dots, w_p) \mapsto (w_1, \dots, w_p, 0, \dots, 0),$$

ce qui montre que la condition (c) est satisfaite.

Enfin, supposons (c) satisfaite ; soit U_1 l'image de U par φ. On peut remplacer V par U', W par U, puis U par U_1 en identifiant U à U_1 au moyen de φ. Pour vérifier (a), il suffit alors de remarquer que toute fonction $G(z_1, \dots, z_p)$ holomorphe sur U_1 en 0 peut être trivialement mise sous la forme $F(z_1, \dots, z_p, 0, \dots, 0)$, avec F holomorphe sur U' en 0 ; on définira par exemple F par $F(z_1, \dots, z_n) = G(z_1, \dots, z_p)$.

Considérons maintenant une application continue φ d'un espace topologique séparé W à base dénombrable dans une variété analytique complexe V de dimension complexe n. Disons qu'une fonction g définie dans un voisinage de $x \in W$ sur W est holomorphe en x si elle coïncide dans un voisinage de x avec une fonction de la forme $f \circ \varphi$, où f est définie dans un voisinage du point $\varphi(x)$ sur V et holomorphe en ce point. Nous allons montrer que la condition suivante est nécessaire et suffisante pour que cette définition des fonctions holomorphes sur W satisfasse à l'axiome des structures complexes de dimension p :

(C) *Quel que soit $x \in W$, il y a un voisinage ouvert U de x dans W, un voisinage ouvert U' de $\varphi(x)$ dans V, et un système de coordonnées locales $z_1, \dots, z_n$ pour V dans U' tels que φ soit un homéomorphisme de U sur l'ensemble des points de U' pour lesquels on a $z_{p+1} = \cdots = z_n = 0$.*

En effet, si l'axiome en question est vérifié, φ satisfera, pour la structure complexe de dimension p définie sur W, à la condition (a) de la prop. 3.1 ; la condition (c) sera donc satisfaite, et par suite à plus forte raison la condition (C). Réciproquement, si (C) est satisfaite, il est immédiat que l'axiome des structures complexes de dimension p est satisfait en prenant, avec les notations de (C), $z_1 \circ \varphi, \dots, z_p \circ \varphi$ pour coordonnées locales sur W dans U.

Quand (C) est satisfaite, on a donc déterminé, au moyen de la définition ci-dessus, une structure complexe de dimension p sur W ; on dira que celle-ci est *l'image réciproque par φ de la structure complexe donné sur V* ; lorsque $W \subset V$ et que φ est l'injection canonique de W dans V, on dit aussi que cette structure est *induite sur W* par celle de V.

Quand l'injection canonique dans V d'une partie W de V satisfait à (C), on dit que W, muni de la structure complexe induite par celle de V, est une *variété* 49
plongée dans V ; si de plus W est une partie fermée de V, on dit que c'est une *sous-variété de V*.

Quand V et W sont deux variétés à structure complexe, dire qu'une application continue φ de W dans V satisfait partout aux conditions équivalentes (a), (b), (c) de la prop. 3.1 revient à dire que la structure complexe de W n'est autre que l'image réciproque par φ de celle de V ; on dira en ce cas que φ est une application *partout localement birégulière* de W sur son image dans V, ou encore (pas abus de langage) de W dans V.

n° 2 3.2. Soit φ une application holomorphe d'une variété complexe W dans une variété complexe V. A toute forme différentielle ω sur V correspond alors sur W son *image transposée* $\varphi^*\omega$ (DE RHAM [10, §4]), qui est une forme de même degré. Au moyen de coordonnées locales, on voit immédiatement que l'image transposée d'une forme bihomogène de bidegré (a, b) est encore bihomogène de même bidegré. Il s'ensuit que l'opérateur φ^* est permutable avec $P_{a,b}$ quels que soient a et b ; il est donc aussi permutable avec l'opérateur C. Comme on sait (loc.cit.) qu'il est permutable avec d, il s'ensuit qu'il l'est aussi avec d' et d''. Si ω est une forme holomorphe, il en est de même de $\varphi^*\omega$.

Soit en particulier Ω une forme différentielle réelle de bidegré $(1, 1)$ sur V. Soit $x \in W$; soit $z_1, \dots, z_n$ un système de coordonnées locales sur V au voisinage de $\varphi(x)$. Au moyen des z_α, Ω s'écrira

$$\Omega = \frac{i}{2} \sum_{\alpha,\beta} h_{\alpha\beta} dz_\beta \wedge d\bar{z}_\alpha.$$

La forme hermitienne dans l'espace des vecteurs tangents à V en $\varphi(x)$ qui est associée au bicovecteur déterminé par Ω en $\varphi(x)$ est alors :

$$H(t, t') = \sum_{\alpha,\beta} h_{\alpha\beta}(\varphi(x)) d\bar{z}_\alpha(\varphi(x); t) dz_\beta(\varphi(x); t'),$$

où t, t' sont deux vecteurs tangents à V au point $\varphi(x)$.

On a, dans ces conditions :

$$\varphi^*\Omega = \frac{i}{2} \sum_{\alpha,\beta} (\varphi^* h_{\alpha\beta})(\varphi^* dz_\beta) \wedge (\varphi^* d\bar{z}_\alpha).$$

Mais, par définition, $\varphi^* h_{\alpha\beta}$ n'est autre chose que $h_{\alpha\beta} \circ \varphi$ et a pour valeur $h_{\alpha\beta}(\varphi(x))$
50 au point x ; par définition aussi, si on désigne par φ' l'application linéaire de l'espace des vecteurs tangents à W en x dans l'espace des vecteurs tangents à V en $\varphi(x)$ qui est induite par φ, on a :

$$\varphi^* dz_\alpha(x; u) = dz_\alpha(\varphi(x); \varphi' u)$$

pour tout vecteur u tangent à W en x. Il s'ensuit que la forme hermitienne associé au bicovecteur par $\varphi^*\Omega$ en x n'est autre que $H(\varphi' u, \varphi' u')$. On en conclut immédiatement que $\varphi^*\Omega$ est positive si Ω est positive, et que $\varphi^*\Omega$ est positive non-dégénérée si Ω est positive non-dégénérée et si de plus φ' est une injection, c'est-à-dire si φ satisfait à la condition (b) de la prop. 3.1. Par conséquent :

Prop. 2 **Proposition 3.2.** *Soit V une variété analytique kählérienne ; soit Ω sa forme fondamentale. Soit W une variété analytique complexe ; soit φ une application holomorphe et partout localement birégulière de W dans V. Alors la forme $\varphi^*\Omega$ image transposée de Ω par φ dans W, détermine sur W une structure kählérienne.*

On dira que cette dernière structure est *l'image réciproque* par φ de celle qui est donnée sur V ; on dira qu'elle est *induite* par celle-ci si $W \subset V$ et si φ est l'injection canonique de W dans V.

n° 3 3.3. Soient V et W deux espaces topologiques connexes et φ une application continue de W sur V. On dit, comme on sait, que W, muni de l'application φ sur V, est un *revêtement* de V si φ satisfait à la condition suivante :

(R) *Tout point de V a un voisinage ouvert U tel que $\varphi^{-1}(U)$ soit réunion d'ensembles ouverts disjoints U_λ sur chacun desquels φ induit un homéomorphisme φ_λ de U_λ sur U.*

Alors φ est une application ouverte (c'est-à-dire que l'image de tout ouvert par φ est ouvert) ; et V est homéomorphe à l'espace quotient de W par la relation d'équivalence $\varphi(x) = \varphi(x')$ et peut être identifié avec ce quotient.

Supposons qu'il en soit ainsi, et que de plus V soit muni d'une structure analytique complexe de dimension n, ce qui implique que V est séparé et à base dénombrable ; il est immédiat que W est alors aussi séparé, et il résulte des théorèmes généraux sur les revêtements que W est à base dénombrable. Il est clair que φ satisfait à la condition (C) du §3.1, avec $p = n$, de sorte que W peut être munie de la structure complexe image réciproque par φ de celle qui est donnée sur V ; si de plus on se donne sur V une structure kählérienne de forme fondamentale Ω, $\varphi^*\Omega$ détermine sur W une structure kählérienne. Enfin, avec les notations de la condition 51
(R), l'application $\varphi_\lambda^{-1} \circ \varphi_\mu$ de U_μ sur U_λ sera un isomorphisme pour les structures complexes (resp. kählériennes) induites sur U_λ et U_μ par celle qu'on vient de définir sur W.

Réciproquement, supposons donnée sur W une structure complexe (resp. kählérienne), ce qui implique que W est séparée et à base dénombrable ; il est immédiat que V est alors à base dénombrable. Supposons V séparée ; et supposons vérifiée la condition suivante :

(R') *Tout point de V a un voisinage ouvert U tel que $\varphi^{-1}(U)$ soit réunion d'ensembles ouverts disjoints U_λ sur chacun desquels φ induit un homéomorphisme φ_λ de U_λ sur U, les φ_λ étant tels que, quels que soient λ et μ, $\varphi_\lambda^{-1} \circ \varphi_\mu$ soit un isomorphisme de U_μ sur U_λ pour les structures complexes (resp. kählériennes) induites sur U_λ, U_μ par celle de W.*

Alors, avec les notations de (R'), on peut transporter à U au moyen de φ_λ la structure complexe (resp. kählérienne), dite *quotient* de celle donnée sur W par la relation d'équivalence $\varphi(x) = \varphi(x')$. Il est clair que la structure qu'on s'était donnée sur W est alors l'image réciproque par φ de cette structure quotient.

Un cas particulier important est celui où W est un espace séparé connexe et où V est le quotient W/G de W par la relation d'équivalence déterminée par un groupe d'homéomorphismes de W sur W (c'est-à-dire par la relation pour laquelle la classe d'équivalence de $x \in W$ est l'ensemble des transformés $s(x)$ par les éléments s de G). Pour qu'alors W, muni de son application canonique φ sur $V = W/G$, soit un revêtement de V, il suffit que G satisfasse à la condition suivante :

(D) *Tout point de W a un voisinage U_0 tel que $U_0 \cap sU_0 = \varnothing$ quel que soit $s \in G$ autre que l'élément neutre.*

En effet, s'il en est ainsi, on satisfera à (R), pour $z \in V$, en prenant $x \in W$ tel que $z = \varphi(x)$, puis $U = \varphi(U_0)$ où U_0 est un voisinage de x sur W satisfaisant à (D), et enfin en choisissant pour ensembles U_λ les transformés sU_0 de U_0 par les $s \in G$. On peut d'ailleurs vérifier sans difficulté que (D) est nécessaire pour que W soit un revêtement de W/G. On exprime parfois (D) en disant que G est « proprement discontinu sans point fixe » sur W. Lorsqu'il en est ainsi, et que de 52
plus V est séparé, il suffit évidemment, pour que (R') soit satisfaite, que G soit

un groupe d'*isomorphismes* pour la structure compplexe (resp. kählérienne) de W ; cette condition est d'ailleurs nécessaire. Chaque fois qu'il en sera ainsi, on pourra donc définir sur $V = W/G$ une structure complexe (resp. kählérienne), dite *quotient* par G de celle qu'on s'est donnée sur W.

n° 4 3.4. Les considérations qui précèdent s'appliquent immédiatement au cas où on prend pour W un espace vectoriel E de dimension n sur $\mathbf{C}$ et pour G un groupe discret de translations de E ; il est évident et bien connu (cf. Bourbaki [3, Chap. VII] que la condition (D) est satisfaite et que E/G est séparé ; en tant que groupe topologique, E/G est isomorphe au produit d'un tore et d'un espace vectoriel sur $\mathbf{R}$. La structure complexe de E étant invariante par translation, on peut définir sur E/G la structure complexe quotient par G de celle de E ; cette structure quotient est évidemment invariante par toute translation de E/G muni de sa structure de groupe.

En particulier, si G est de rang $2n$, on sait que E/G est compact et est isomorphe, en tant que groupe topologique, au tore de dimension réelle $2n$. Si on muni E/G de sa structure de groupe topologique et en même temps de la structure complexe quotient de celle de E par G, on dira que c'est un *tore complexe* de dimension complexe n. Contrairement à ce qui se passe dans le domaine réel, deux tores complexes de même dimension ne sont pas nécessairement isomorphes (v. §6).

Soit maintenant E un espace hermitien. Comme on l'a vu au §1.2 la forme hermitienne qui en définit la structure détermine en 0 un bicovecteur positif non dégénéré ; si on transporte celui-ci à tout point de E par translation, on définit sur E une forme différentielle Ω de bidegré $(1, 1)$ qui, dans un système de coordonnées pour lequel la forme hermitienne fondamentale est $\sum h_{\alpha\beta}\bar{z}_\alpha z_\beta$, s'écrira :

$$\Omega = \frac{i}{2}\sum_{\alpha,\beta} h_{\alpha\beta}dz_\beta \wedge d\bar{z}_\alpha.$$

Cette forme est à coefficients constants ; donc elle est fermée et détermine sur E une structure kählérienne invariante par translation, canoniquement associée à la structure d'espace hermitien de E.

Si donc G est un groupe discret de translations sur E, on pourra munir E/G de la structure kählérienne quotient par G de celle de E. Si G est de rang $2n$, on dira que la variété kählérienne E/G ainsi obtenue, munie en même temps de sa structure
53 de groupe topologique, est un *tore kählérien.*

n° 5 3.5. Pour définir d'autres structures kählériennes, on s'appuyera sur le résultat suivant :

Prop. 3 **Proposition 3.3.** *Soient $f_1, \dots, f_N$ des des fonctiones holomorphes sur une variété complexe V de dimension n. Alors la forme*

$$\Omega = id'd'' \log\Big(\sum_\nu f_\nu \bar{f}_\nu\Big),$$

définie sur l'ensemble des points où les f_ν ne sont pas toutes nulles, y est partout positive. Pour qu'elle soit positive non-dégénérée en un point x de V où $f_{\nu_0}(x) \neq 0$, il faut et il suffit que, parmi les covecteurs déterminés en x par les formes $d(f_\nu/f_{\nu_0})$, il y en ait n linéairement indépendants.

Puisque les f_ν sont holomorphes, on a $df_\nu = d'f_\nu, d''f_\nu = 0$, et par suite $d\bar{f}_\nu = d''\bar{f}_\nu, d'\bar{f}_\nu = 0$, d'où

$$\Omega = i\big(\sum_\nu f_\nu\bar{f}_\nu\big)^{-2}\Big(\big(\sum_\nu f_\nu\bar{f}_\nu\big)\big(\sum_\nu df_\nu\wedge d\bar{f}_\nu\big) - \big(\sum_\nu \bar{f}_\nu df_\nu\big)\wedge\big(\sum_\nu f_\nu d\bar{f}_\nu\big)\Big) =$$
$$= \frac{i}{2}\big(\sum_\nu f_\nu\bar{f}_\nu\big)^{-2}\sum_{\mu,\nu}(f_\mu df_\nu - f_\nu df_\mu)\wedge(\bar{f}_\mu d\bar{f}_\nu - \bar{f}_\nu d\bar{f}_\mu)$$

Si t est un vecteur tangent à V en un point x où les f_ν ne sont pas toutes nulles, et si on pose

$$w_{\mu\nu}(t) = f_\mu(x)df_\nu(x;t) - f_\nu(x)df_\mu(x;t),$$

la forme quadratique associée au bicovecteur déterminé par Ω en x sera, d'après les définitions du §1.2 :

$$F(t) = \Big(\sum_\nu f_\nu\bar{f}_\nu\Big)^{-2}\sum_{\mu,\nu}\overline{w_{\mu\nu}(t)}w_{\mu\nu}(t).$$

Elle est évidemment positive et ne s'annule que si les $w_{\mu\nu}(t)$ sont tous nuls, ce qui, puisque les $f_\nu(x)$ ne sont pas tous nuls, équivaut à dire qu'il y a $\xi \in \mathbf{C}$ tel que $df_\nu(x;t) = \xi f_\mu(x)$ quel que soit μ. Si $f_{\nu_0}(x) \neq 0$, cela revient à dire qu'on a

$$f_{\nu_0}df_\nu(x;t) - f_\nu(x)df_{\nu_0}(x;t) = 0$$

quel que soit ν, ou encore, en posant $g_\nu = f_\nu/f_{\nu_0}$, $dg_\nu(x;t) = 0$. Pour qu'il y ait en x un vecteur tangent t satisfaisant à ces conditions, il faut et il suffit que, parmi les covecteurs déterminés en x par les dg_ν, il n'y en ait pas n linéairement indépendants.

La prop. 3.3 va nous servir en premier lieu à définir une structure kählérienne sur l'*espace projectif complexe* $\mathbf{P}^n$ de dimension n. Rappelons que $\mathbf{P}^n$ peut être défini comme suit. Dans $\mathbf{C}^{n+1}$, appelons « droite pointée » tout ensemble $D-\{0\}$, où D est une droite passant par 0 ; alors $\mathbf{P}^n$ est le quotient de $\mathbf{C}^{n+1}-\{0\}$ par la relation d'équivalence pour laquelle les classes d'équivalence sont les droites pointées ; si $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ est un point de la droite pointée correspondant à $x \in \mathbf{P}^n$, on dit que $(x_0, \ldots, x_n)$ est un système de coordonnées homogènes pour x. Muni de la topologie quotient de celle de $\mathbf{C}^{n+1}-\{0\}$ par la relation d'équivalence ci-dessus, $\mathbf{P}^n$ est un espace compact. Pour $0 \le \nu \le n$, soit U_ν l'ensemble des points de $\mathbf{P}^n$ pour lequels $x_\nu \neq 0$; les U_ν forment un recouvrement ouvert de $\mathbf{P}^n$, et, pour chaque ν, l'application 54

$$(x_0, \ldots, x_n) \mapsto (x_\nu^{-1}x_0, \ldots, x_\nu^{-1}x_{\nu-1}, x_\nu^{-1}x_{\nu+1}, \ldots, x_\nu^{-1}x_n)$$

détermine un homéomorphisme de U_ν sur $\mathbf{C}^n$. Si on prend

$$(x_\nu^{-1}x_0, \ldots, x_\nu^{-1}x_{\nu-1}, x_\nu^{-1}x_{\nu+1}, \ldots, x_\nu^{-1}x_n)$$

comme coordonnées complexes locales dans U_ν, on définit une structure complexe de dimension n dans $\mathbf{P}^n$; en effet, les coordonnées locales relatives à U_ν s'expriment comme fonctions rationnelles des coordonnées relatives à U_μ, quels que soit μ et ν ; comme les unes et les autres restent partout finies dans $U_\nu\cap U_\mu$, elles sont donc bien, dans $U_\nu\cap U_\mu$, fonctions holomorphes les unes des autres. Il est clair que la structure complexe ainsi définie sur $\mathbf{P}^n$ est invariante par toute application projective de $\mathbf{P}^n$ sur $\mathbf{P}^n$ (c'est-à-dire toute application déduite d'une application linéaire de $\mathbf{C}^{n+1}$ sur $\mathbf{C}^{n+1}$ par passage au quotient).

Pour la structure complexe ainsi définie dans $\mathbf{P}^n$, $x_\nu^{-1}x_\mu$ est une fonction holomorphe dans U_ν. Dans U_ν, considérons la forme

$$\Omega_\nu = id'd'' \log\Bigl(\sum_{\mu=0}^{n} |x_\nu^{-1}x_\mu|^2\Bigr)$$

Parmi les fonctions holomorphes $x_\nu^{-1}x_\mu$ sur U_ν se trouve la fonction constante $x_\nu^{-1}x_\nu = 1$; les autres forment un système de coordonnées locales dans U_ν, de sorte que leurs différentielles sont linéairement indépendantes en tout point de U_ν. Donc, d'après la prop. 3.3, Ω_ν est positive non-dégénérée en tout point de U_ν. De plus, on a dans $U_\nu \cap U_\mu$:

$$\Omega_\mu - \Omega_\nu = id'd'' \log |x_\mu^{-1}x_\nu|^2.$$

55 Mais le second membre s'annule d'après le corollaire 2.4. Il y a donc une forme Ω sur $\mathbf{P}^n$ qui coïncide avec Ω_ν dans U_ν quel que soit ν ; les Ω_ν étant positives non-dégénérées en tout point de U_ν, il en est ainsi de Ω en tout point de $\mathbf{P}^n$. Donc Ω définit sur $\mathbf{P}^n$ une structure kählérienne analytique. On notera que celle-ci n'est pas invariante par toutes les applications projectives de $\mathbf{P}^n$ sur $\mathbf{P}^n$.

Au moyen des résultats de §§3.1 et 3.2 ci-dessus, on voit alors qu'on peut définir une structure kählérienne sur toute variété W admettant une application holomorphe et partout localement birégulière dans un espace projectif complexe. En particulier, la structure qu'on vient de définir sur $\mathbf{P}^n$ induira une structure kählérienne sur toute variété complexe plongée dans $\mathbf{P}^n$, et par exemple sur toute sous-variété de $\mathbf{P}^n$, donc sur toute variété algébrique sans point multiple dans $\mathbf{P}^n$. Il résulte d'ailleurs d'un théorème de CHOW qu'il n'existe pas d'autre sous-variété de $\mathbf{P}^n$ (au sens où ce mot a été défini au §3.1) que les variétés algébriques sans point multiple. Pour une démonstration simple de ce résultat, v. Am. J. Math. **78** (1956), p. 898.

Pour la commodité du lecteur, cette correspondence est inséré ici.

A correspondent, who wishes to remain anonymous, writes as follows:

SIR,

In a paper which has been published by your Journal, W. L. CHOW [5, Th. V] proved the following theorem:

Every closed analytic subvariety V of the projectif space $\mathbf{P}_r(\mathbf{C})$ is algebraic.

I should like to point out that there is a very simple proof for this *if V is assumed to be free from singularities.*

It is no restriction to assume that V is connected ; let n its complex dimension. In the polynomial ring $\mathbf{C}[X_0, \ldots, X_r]$, the homogeneous polynomials which vanish on V generate a homogeneous ideal $\mathfrak{p}$. Since V is connected, $\mathfrak{p}$ is a prime ideal and defines therefore an irreducible algebraic variety W, which is the smallest one containing V ; call m its dimension ; we have $m \leq n$. Every rational function f on W can be written as $f = P/Q$, where P, Q are homogeneous polynomials of the same degree and Q is not in $\mathfrak{p}$; therefore f induces a meromorphic function on V. This shows that the field L of rational functions on W is isomorphic to a subfield of the field K of meromorphic functions of V. It is well-known (cf. e.g., C. L. Siegel's proof, Göttingen Nachrichten 1955) that K has at most the degree of transcendency n ; so we get $m \leq n$, and hence $m = n$; therefore W has the same dimension as V. It is also well-known that W is analytically irreducible (this follows from the fact that the set of all simple points on W is connected, which is easily proved by induction on the dimension, using hyperplane sections). Therefore $W = V$.

Yours, etc.

X.X.X.

n° 6 3.6. On va maintenant étendre la prop. 3.3 au cas d'une infinité de fonctions f_ν. Nous aurons besoin du lemme suivant :

Lemme 3.4. *Soient V et W deux variétés à structures complexes. Soient (f_ν) et (g_ν) deux suites de fonctions holomorphes, sur V et sur W respectivement ; supposons qu'il existe des constantes A et B telles que l'on ait* Lemme

$$\sum_\nu |f_\nu(x)|^2 \leq A, \quad \sum_\nu |g_\nu(y)|^2 \leq B$$

quels que soient $x \in V, y \in W$. Alors la série $\sum_\nu f_\nu(x)\overline{g_\nu(y)}$ est absolument et uniformément convergente sur toute partie compacte de $V \times W$, est partout indéfiniment différentiable terme à terme, et a pour somme une fonction analytique au sens réel sur $V \times W$.

Dans cet énoncé, la différentiabilité de la série terme à terme signifie que tout point de $V \times W$ a un voisinage compact dans lequel chacune des séries obtenues à partir de $\sum_\nu f_\nu(x)\overline{g_\nu(y)}$ par différentiation (d'ordre quelconque) par rapport à des coordonnées locales valables dans ce voisinage est uniformément convergente.

Soit $\overline{V}$ la variété à structure complexe *conjuguée* de V ; on entend par là la variété qui a même espace topologique sous-jacent que V, mais pour laquelle, par 56
définition, une fonction h est holomorphe en un point x si $\bar{h}$ est holomorphe en x pour la structure complexe de V. Considérons sur $V \times \overline{V}$ les fonctions

$$F_n(x, x') = \sum_{\nu=1}^{n} f_\nu(x)\overline{f_\nu(x')}.$$

Elles y sont holomorphes et partout $\leq A$ en vertu des hypothèses et de l'inégalité de Schwarz. D'après un théorème bien connu, chaque point de $V \times \overline{V}$ a donc un voisinage compact tel qu'il y ait une suite partielle extraite de la suite (F_n) qui y converge uniformément ; en particulier, tout point de V aura un voisinage compact U tel qu'il y ait une suite partielle (F_{n_i}) extraite de la suite (F_n) qui converge uniformément dans $U \times U$. Cela entraîne que la suite

$$F_{n_i}(x, x) = \sum_{\nu=1}^{n_i} f_\nu(x)\overline{f_\nu(x)} = \sum_{\nu=1}^{n_i} |f_\nu(x)|^2$$

converge uniformément dans U, et par suite que la série $\sum_\nu |f_\nu(x)|^2$ elle-même converge uniformément dans U.

De même, tout point de W aura un voisinage compact U' où la série $\sum_\nu |g_\nu(y)|^2$ converge uniformément. D'après l'inégalité de Schwarz, on en conclut que la série

$$\sum_\nu f_\nu(x)\overline{g_\nu(y)}$$

converge uniformément dans $U \times U'$. Mais, si $\overline{W}$ est la variété conjuguée de W, c'est là une série de fonctions holomorphes dans $V \times \overline{W}$; puisqu'elle est uniformément convergente au voisinage de tout point, il s'ensuit, comme on sait, qu'elle est indéfiniment différentiable terme à terme au sens expliqué plus haut, et qu'elle a pour somme une fonction holomorphe sur $V \times \overline{W}$, ce qui achève la démonstration.

Proposition 3.5. *Soit V une variété complexe de dimension complexe n. Soit (f_ν) une suite de fonctions holomorphes sur V ; supposons qu'il existe une constante A telle que l'on ait $\sum_\nu |f_\nu|^2 \leq A$ en tout point de V. Alors la forme* Prop. 4

$$\Omega = id'd'' \log\Big(\sum_\nu f_\nu \bar{f}_\nu\Big),$$

définie sur l'ensemble des points de V où les f_ν ne sont pas toutes nulles, y est 57
partout positive. Pour qu'elle soit positive non-dégénérée en un point x de V où $f_{\nu_0}(x) \neq 0$, il faut et il suffit que, parmi les covecteurs déterminés en x par les formes $d(f_\nu/f_{\nu_0})$, il y en ait n linéairement indépendants.

D'après le lemme 3.4, Ω est définie, et analytique au sens réel, au voisinage de tout point où les f_ν ne sont pas toutes nulles ; et le bicovecteur déterminé par Ω en un point x où $f_{\nu_0}(x) \neq 0$ est limite des bicovecteurs déterminés en x par les formes

$$\Omega_m = id'd'' \log\Big(\sum_{\nu=1}^{m} f_\nu \bar{f}_\nu\Big)$$

pour $m \geq \nu_0$. Utilisons pour celles-ci l'expression données au cours de la démonstration de la prop. 3.3 ; les $w_{\mu\nu}(t)$ étant définis comme dans cette démonstration, on voit que la forme quadratique associée au bicovecteur déterminé par Ω en x s'écrit

$$F(t) = \lim_{n\to\infty} \Big(\sum_{\nu=1}^{n} |f_\nu(x)|^2\Big)^{-2} \sum_{\mu,\nu=1}^{n} \overline{w_{\mu\nu}(t)} w_{\mu\nu}(t) = \frac{\sum_{\mu,\nu} \overline{w_{\mu\nu}(t)} w_{\mu\nu}(t)}{\big(\sum_\nu |f_\nu(x)|^2\big)^2}$$

La démonstration s'achève alors exactement comme celle de la prop. 3.3.

n° 7 3.7. On va maintenant définir, sur une variété V à structure complexe, des notions qui ont été introduites et étudiées par S. Bergmann dans le cas particulièrement intéressant des domaines bornés de $\mathbf{C}^n$.

Soit V une variété analytique complexe de dimension complexe n. Soit α une forme bihomogène de bidegré $(n, 0)$ sur V ; au moyen des formules du §1.3 on vérifie immédiatement qu'on a, pour toute structure hermitienne de V compatible avec sa structure complexe, $*\alpha = i^{-n^2}\alpha$; pour ces formes, l'opérateur $*$ ne dépend donc que de la structure complexe de V. Il s'ensuit qu'on a $i^{n^2}\alpha \wedge \bar{\alpha} > 0$ en tout point où α n'est pas nul, ce qui est d'ailleurs évident aussi en exprimant α au moyen de coordonnées locales. On posera, conformément à de Rham [10, §24] :

$$(\alpha, \beta) = i^{n^2} \int_V \alpha \wedge \bar{\beta}$$

chaque fois que α, β seront des formes de bidegré $(n, 0)$ telles que l'intégrale soit convergente ; on conviendra de définir (α, α) par cette même formule, que l'intégrale
58 soit convergente ou non, de sorte qu'on aura $0 \leq (\alpha, \alpha) \leq +\infty$ pour toute forme α de bidegré $(n, 0)$. En vertu de nos conventions générales, suivant lesquelles toutes les formes sont supposées indéfiniment différentiables et à plus forte raison à coefficients continus, on a $(\alpha, \alpha) > 0$ pour $\alpha \neq 0$. Il résulte de l'inégalité de Schwarz que (α, β) est défini chaque fois que $(\alpha, \alpha) < \infty$ et $(\beta, \beta) < \infty$, et aussi que (α, α) satisfait à l'inégalité dite du triangle :

$$(\alpha + \beta, \alpha + \beta)^{1/2} \leq (\alpha, \alpha)^{1/2} + (\beta, \beta)^{1/2}.$$

Pour abréger, on posera aussi $N(\alpha) = (\alpha, \alpha)^{1/2}$; et on posera, pour tout compact K dans V :

$$N_K(\alpha) = i^{n^2} \int_K \alpha \wedge \bar{\alpha}.$$

On dira qu'une famille (α_ι) de formes de bidegré $(n, 0)$ sur V est *orthonormale* si l'on a $(\alpha_\iota, \alpha_\iota) = 1$ quel que soit ι et $(\alpha_\iota, \alpha_{\iota'}) = 0$ chaque fois que $\iota \neq \iota'$.

Prop. 5 **Proposition 3.6.** *Soient $z_1, \ldots, z_n$ des coordonnées complexes locales dans un voisinage ouvert U de $x \in V$. Alors il y a un voisinage compact U_1 de x dans U et une constante A tels que, pour toute forme α holomorphe de degré n sur V, on ait, si $\alpha = f dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n$ dans U, $|f|^2 \leq A(\alpha, \alpha)$ en tout point de U_1.*

On peut supposer que les z_μ s'annulent en x ; la carte de U qu'ils déterminent applique alors U sur un voisinage ouvert de 0 dans $\mathbf{C}^n$; soit $\varepsilon > 0$ tel que ce dernier voisinage contienne le « polycylindre » $\max_\mu |z_\mu| \leq \varepsilon$. Pour $0 < \delta \leq \varepsilon$, soit $U(\delta)$ l'ensemble des points de U satisfaisant à $\max_\mu |z_\mu| \leq \delta$. Avec les notations de l'énoncé, f est holomorphe dans U et peut donc se développer en série de TAYLOR

$$f = \sum_{\nu_1,\dots,\nu_n} a_{\nu_1\dots\nu_n} z_1^{\nu_1}\cdots z_n^{\nu_n},$$

cette série étant absolument et uniformément convergente dans $U(\varepsilon)$. On a :

$$(\alpha,\alpha) \geq N_{U(\varepsilon)}(\alpha) = i^{n^2}\int_{U(\varepsilon)} |f|^2 dz_1\wedge\dots\wedge dz_n\wedge d\bar z_1\wedge\dots\wedge d\bar z_n =$$
$$= (2\pi\varepsilon^2)^n \sum_{\nu_1,\dots,\nu_n} |a_{\nu_1\dots\nu_n}|^2 \frac{\varepsilon^{2(\nu_1+\dots+\nu_n)}}{(\nu_1+1)\dots(\nu_n+1)}.$$

Il suit de là, en vertu de l'inégalité de SCHWARZ, qu'on a dans $U(\rho\varepsilon)$, pour $0<\rho<1$ 59

$$|f|^2 \leq \Big(\sum_{\nu_1,\dots,\nu_n} |a_{\nu_1\dots\nu_n}|^2(\rho\varepsilon)^{\nu_1+\dots+\nu_n}\Big)^2$$
$$\leq (2\pi\varepsilon^2)^{-n}(\alpha,\alpha)\sum_{\nu_1,\dots,\nu_n}(\nu_1+1)\dots(\nu_n+1)\rho^{2(\nu_1+\dots+\nu_n)}.$$

La série qui forme le dernier facteur du dernier membre étant convergente (et égale à $(1-\rho^2)^{-2n}$) pour $\rho<1$, la proposition s'ensuit en prenant par exemple $U_1 = U(\varepsilon/2)$.

Corollaire 3.7. *Les notations étant celles de la prop. 3.6, soit $(\alpha_1,\dots,\alpha_N)$ une famille orthonormale finie de formes α_ν holomorphes de degré n sur V. Alors, si $\alpha_\nu = f_\nu dz_1\wedge\dots\wedge dz_n$ dans U, on a $\sum_\nu |f_\nu|^2 \leq A$ en tout point de U_1.* Cor.

En effet, il résulte de la prop. 3.6 qu'on a alors, quelles que soient les constantes a_ν :

$$|\sum_\nu a_\nu f_\nu|^2 \leq A\sum_\nu |a_\nu|^2$$

en tout point de U_1, d'où l'assertion du corollaire en prnenant $x_1\in U_1$ et $a_\nu = \overline{f_\nu(x_1)}$.

3.8. Nous considérerons maintenant, avec S. BERGMANN, *l'espace $B(V)$ des formes α holomorphes de degré n sur V telles que* $(\alpha,\alpha) < +\infty$. Muni du « produit scalaire »(α,β), $B(V)$ a une structure d'espace « préhilbertien ». La proposition suivante montre que c'est un espace de HILBERT (complexe). n° 8

Proposition 3.8. *L'espace $B(V)$ est complet.* Prop. 6

Rappelons (DE RHAM [10, §9]) qu'on dit qu'une suite de formes différentielles converge sur V « au sens de l'espace $\mathscr{E}^p(V)$ » si, lorsqu'on exprime ces formes au moyen de coordonnées locales dans un voisinage de $x\in V$, il y a un voisinage compact de x dans lequel les coefficients de ces formes et leurs dérivées partielles successives jusqu'à l'ordre p convergent uniformément, et cela quel que soit $x\in V$; s'il en est ainsi quel que soit p, on dit que la suite converge « au sens de $\mathscr{E}(V)$ ». Soit alors (α_ν) une suite de CAUCHY dans $B(V)$, c'est-à-dire une suite telle que $N(\alpha_\mu-\alpha_\nu)$ tende vers 0 pour μ,ν augmentant indéfiniment. Il en résulte alors de la prop. 3.6 que la suite (α_ν) converge « au sens de $\mathscr{E}^0(V)$ » ; il résulte même de cette proposition, et de théorèmes bien connus sur les suites de fonctions holomorphes, 60
que la suite (α_ν) converge « au sens de $\mathscr{E}(V)$ » vers une forme holomorphe α ; pour démontrer la proposition, il nous suffira alors de faire voir que $\alpha\in B(V)$ et que la

suite (α_ν) converge vers α au sens de $B(V)$. Pour cela, soit $\varepsilon > 0$; soit μ tel que $N(\alpha_\nu - \alpha_\mu) \leq \varepsilon$ pour $\nu \geq \mu$; soit K un compact tel que l'on ait

$$N_K(\alpha_\mu) \geq N(\alpha_\mu) - \varepsilon.$$

Soit K' un compact ne rencontrant pas K ; par définition de K, on aura $N_{K'}(\alpha_\mu) \leq \varepsilon$; par définition de μ, on aura $N_{K'}(\alpha_\nu - \alpha_\mu) \leq \varepsilon$ pour $\nu \geq \mu$. Appliquant l'inégalité du triangle à $N_{K'}$, on voit donc qu'on a pour $\nu \geq \mu$, et quel que soit le compact $K' \subset V - K$, $N_{K'} \leq 4\varepsilon$. Comme la suite (α_ν) converge vers α « au sens de $\mathscr{E}^0(V)$ », donc uniformément sur tout compact, on en conclut que $N_{K'}(\alpha) \leq 4\varepsilon$. Comme il en est ainsi quel que soit le compact $K' \subset V - K$, on a donc $N(\alpha) \leq N_K(\alpha) + 4\varepsilon$, ce qui montre que $\alpha \in B(V)$. De plus, l'inégalité du triangle donne alors aussi $N_{K'}(\alpha_\nu - \alpha) \leq 16\varepsilon$ pour $\nu \geq \mu$, quel que soit le compact $K' \subset V - K$, et par suite

$$N(\alpha_\nu - \alpha) \leq N_K(\alpha_\nu - \alpha) + 16\varepsilon.$$

Comme la suite (α_ν) converge vers α uniformément sur K, il s'ensuit que $N(\alpha_\nu - \alpha) \leq 17\varepsilon$ dès que ν est asseu grand, ce qui montre bien que la suite (α_ν) converge vers α au sens de $B(V)$.

Cor. **Corollaire 3.9.** *L'espace $B(V)$, muni du produit scalaire (α, β), est un espace de* Hilbert *à base dénombrable.*

Il ne nous reste à démontrer que la dénombrabilité. Si $B(V)$ n'avait pas cette propriété, il y aurait dans $B(V)$ une famille orthonormale (α_ι) non dénombrable. Mais, si $x \in V$, le corollaire 3.7 montre que l'ensemble $I(x)$ des ι tels que $\alpha_\iota \neq 0$ en x est dénombrable. Soit alors (x_ν) une famille dénombrable partout dense de points de V ; un α_ι ne peut s'annuler en tous les x_ν, donc tout ι appartient à la réunion des $I(x_\nu)$; celle-ci étant dénombrable, le corollaire s'ensuit.

Toujours suivant S. Bergmann, nous sommes maintenant en mesure de démontrer le résultat principal que nous avions en vue.

Th. 1 **Théorème 3.10.** *Soit V une variété analytique complexe de dimension complexe n. Soit $B(V)$ l'espace de* Hilbert *des formes holomorphes α de degré n sur V telles que $(\alpha, \alpha) < +\infty$. Soit (α_ν) une famille orthonormale maximale d'éléments*
61 *de $B(V)$. Soient p_1, p_2 les projections de $V \times V$ sur le premier et le second facteur de ce produit, respectivement. Alors la série*

$$\Theta = \sum_\nu p_1^*\alpha_\nu \wedge p_2^*\bar{\alpha}_\nu$$

est commutativement convergente dans $\mathscr{E}(V \times V)$ et a pour somme une forme Θ, analytique au sens réel, de bidegré (n, n), qui est indépendante du choix de la famille orthonormale maximale (α_ν).

D'après le corollaire 3.9, on sait déjà que la famille (α_ν) est dénombrable. Soit $(x, y) \in V \times V$; soient $(z_1, \ldots, z_n)$ et $(w_1, \ldots, w_n)$ des systèmes de coordonnées locales sur V dans des voisinages de x et y, respectivement. Soient $f_\nu dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n$ et $g_\nu dw_1 \wedge \cdots \wedge dw_n$ les expressions de α_ν dans ces voisinages au moyen de ces coordonnées locales. On a alors, dans un voisinage de (x, y) sur $V \times V$:

$$p_1^*\alpha_\nu \wedge p_2^*\bar{\alpha}_\nu = f_\nu(z)\overline{g_\nu(w)} dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n \wedge d\bar{w}_1 \wedge \cdots \wedge d\bar{w}_n.$$

Le corollaire 3.7, joint au lemme 3.4, donne alors tous les résultats annoncés, sauf celui qui dit que Θ est indépendante du choix des α_ν. Pour démontrer ce point, prenons de nouveau des coordonnées locales $z_1, \ldots, z_n$ dans un voisinage U de $x \in V$; f_ν étant comme ci-dessus, Θ s'écrira dans $U \times V$ sous la forme

$$\Theta = dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n \wedge \sum_\nu f_\nu(z) p_2^*\bar{\alpha}_\nu.$$

Pour démontrer que Θ est déterminé d'une manière unique, il suffira évidemment de démontrer que la forme $\eta_x = \sum_\nu f_\nu(x)\bar{\alpha}_\nu$ est déterminée d'une manière unique par la donnée de x et des coordonnées locales z_μ. D'après ce qui précède, la série qui définit η_x est convergente au sens de $\mathscr{E}(V)$ et définit une forme de type $(0,n)$ sur V. Mais de plus le corollaire 3.7 montre que la série $\sum_\nu \overline{f_\nu(x)}\alpha_\nu$ converge au sens de $B(V)$ et a même somme $\bar{\eta}_x$ au sens de $B(V)$ qu'au sens de $\mathscr{E}(V)$. Soit alors α quelconque dans $B(V)$; au moyen de la famille orthonormale (α_ν), on peut l'écrire sous la forme $\alpha = \sum_\nu a_\nu \alpha_\nu$, avec $\sum_\nu |a_\nu|^2 < +\infty$. Alors, si $\alpha = f dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n$ dans U, on aura

$$(\alpha, \bar{\eta}_x) = \sum_\nu a_\nu f_\nu(x) = f(x).$$

Si η'_x est la forme analogue à η_x définie au moyen d'une autre famille orthonormale
(α'_ν), on aura de même $(\alpha, \bar{\eta}'_x) = f(x)$ quel que soit $\alpha \in B(V)$. Donc $\bar{\eta}_x - \bar{\eta}'_x$ 62
sera dans $B(V)$ et orthonormal à tout élément de $B(V)$, ce qui implique bien que $\eta_x = \eta'_x$.

Corollaire 3.11. *Les notations étant celles du théorème 3.10, la série* Cor. 1

$$\theta = i^{n^2} \sum_\nu \alpha_\nu \wedge \bar{\alpha}_\nu$$

est commutativement convergente dans $\mathscr{E}(V)$ et a pour somme une forme θ de degré $2n$, analytique au sens réel, partout ≥ 0, qui est indépendante du choix des α_ν et est invariante par tous les automorphismes analytiques complexes de V.

Au facteur i^{n^2} près, θ n'est autre que la forme induite par Θ sur la diagonale du produit $V \times V$. L'invariance de θ par les automorphismes de V est une conséquence immédiate du fait que θ est canoniquement associée à la structure de V.

Corollaire 3.12. *Les notations étant comme ci-dessus, soit V' l'ensemble des* Cor. 2
points de V où θ n'est pas nul. Alors il y a sur V' une forme Ω et une seule telle que, si les α_ν sont comme dans le théorème 3.10 et s'expriment au voisinage d'un point $x \in V$ comme $\alpha_\nu = f_\nu dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n$ au moyen de coordonnées locales z_μ, on ait, au voisinage de x

$$\Omega = i d' d'' \log\Bigl(\sum_\nu f_\nu \bar{f}_\nu\Bigr).$$

cette forme est analytique réelle de bidegré $(1,1)$, partout positive sur V' et est invariante, ainsi que V', par tous les automorphismes analytiques complexes de V.

Ce sont là des conséquences immédiates du théorème 3.10 et de son corollaire 3.11, du corollaire 2.5 et de la prop. 3.5.

Corollaire 3.13. *Les notations étant comme ci-dessus, soit $x \in V$. Pour que* Cor. 3
$x \in V'$, il faut et il suffit qu'il y ait une forme $\alpha_0 \in B(V)$ ne s'annulant pas en x. Pour que de plus Ω soit positive non-dégénérée en x, il faut et il suffit, α_0 étant une telle forme, qu'il y ait n formes $\alpha_\nu \in B(V)$ $(1 \leq \nu \leq n)$ telles que, si on écrit $\alpha_\nu = \varphi_\nu \alpha_0$ au voisinage de x, les φ_ν forment un système de coordonnées locales sur V au voisinage de x.

La première assertion est évidente. Soit donc $\alpha_0 \in B(V)$ ne s'annulant pas en x ; les z_μ étant des coordonnées locales dans un voisinage U de x, on pourra écrire $\alpha_0 =$
$f_0 dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n$ dans U, avec $f_0(x) \neq 0$; il y aura alors un voisinage U' de x dans 63
U où $f_0 \neq 0$, et toute forme holomorphe de degré n pourra s'écrire dans U' comme $\varphi\alpha_0$, φ étant holomorphe dans U'. La prop. 3.5, jointe à la définition de Ω et au théorème des fonctions implicites, montre alors aussitôt que la condition de l'énoncé

est nécessaire pour que Ω soit non-dégénérée en x. Réciproquement, supposons que les α_ν et φ_ν soient comme il est dit dans l'énoncé. Si l'on avait une relation $\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu \alpha_\nu = 0$ à coefficients constants a_ν, on en déduirait $a_0 + \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \varphi_\nu = 0$, puis $\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu d\varphi_\nu = 0$; comme les φ_ν sont un système de coordonnées locales en x, leurs différentielles y sont linéairement indépendantes, donc les a_ν sont tous nuls. Par suite, les formes $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ sont linéairement indépendante et engendrent un sous-espace de $B(V)$ de dimension $n+1$; on peut alors choisir pour ce sous-espace une base orthonormale $\alpha'_0, \alpha'_1, \dots, \alpha'_n$ telle que $\alpha'_0 = a\alpha_0$ avec $a \neq 0$. Si, au moyen des z_μ, les α'_ν s'écrivent $\alpha'_\nu = f'_\nu dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n$, on aura $f'_0(x) = af_0(x) \neq 0$. Comme les α_ν sont des combinaisons linéaires des α'_ν, les φ_ν sont des combinaisons linéaires des différentielles $d(f'_\nu/f'_0)$; celles-ci sont donc linéairement indépendantes en x. La conclusion s'ensuit en appliquant la prop. 3.5 à une famille maximale orthonormale dans $B(V)$ qui comprenne $\alpha'_0, \alpha'_1, \dots, \alpha'_n$.

Si Z est un n-multivecteur de bidegré $(n, 0)$ en un point de V, une partie des résultats ci-dessus peut s'exprimer en disant que la fonction φ_Z sur $B(V)$ définie par $\varphi_Z(\alpha) = \alpha(Z)$ est une forme linéaire continue sur $B(V)$, autrement dit un élément du dual $B'(V)$ de $B(V)$. Nous avons ainsi défini une application canonique $Z \mapsto \varphi_Z$ de l'ensemble W des n-multivecteurs de bidegré $(n, 0)$ sur V dans l'espace $B'(V)$. Mais W est une « variété fibrée » de base V, de fibre vectorielle de dimension 1 sur $\mathbf{C}$, attachée canoniquement à V, et qu'on peut munir, canoniquement aussi, d'une structure complexe de dimension $n+1$; $B'(V)$, en tant que dual de $B(V)$, peut être considéré comme espace de Hilbert ; l'application $Z \mapsto \varphi_Z$ est alors holomorphe en ce sens que, si F est une forme linéaire quelconque sur $B'(V)$, $F(\varphi_Z)$ est une fonction holomorphe sur W. La forme différentielle Θ du théorème 3.10 peut alors être définie comme celle qui, à tout couple (Z, Z') d'éléments de W considéré multivecteur en un point de $V \times V$, fait correspondre le produit scalaire $(\varphi_Z, \varphi_{Z'})$ de leurs images canoniques dans $B'(V)$.

n° 9 3.9. Étant donnée une variété V, il peut arriver que l'espace $B(V)$ qui lui est attaché se réduise à 0 ; on vérifie facilement qu'il en est ainsi, par exemple, pour $V = \mathbf{C}^n$, et par suite aussi pour $V = \mathbf{P}^n$. Lorsqu'il en est ainsi, le théorème 3.10 et ses corollaires sont bien entendu sans intérêt.

64 Du point de vue où nous nous plaçons dans ce fascicule, le principal intérêt des résultats qui précèdent est de permettre, dans des cas assez étendus, de définir sur une variété complexe V une structure kählérienne (dite alors *structure de* Bergmann) qui lui est canoniquement associée ; il en sera ainsi quand les conditions du corollaire 3.13 seront satisfaites en tout point de V.

C'est ce qui a lieu chaque fois que V est un « domaine borné » de $\mathbf{C}^n$, c'est-à-dire une partie ouverte relativement compacte de $\mathbf{C}^n$; en effet, on satisfera alors en tout point de V aux conditions du corollaire 3.13 en prenant $\alpha_0 = dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n$, $\alpha_\nu = z_\nu \alpha_0$, les z_ν étant les coordonnées dans $\mathbf{C}^n$. Plus généralement, soit V une variété complexe de dimension complexe p admettant une application φ partout localement birégulière dans une partie relativement compacte de $\mathbf{C}^n$; alors tout point de V vérifie la première condition du corollaire 3.13, c'est-à-dire tel qu'il y ait une forme $\alpha_0 \in B(V)$ ne s'y annulant pas, satisfait aussi à la seconde ; car, en posant $\varphi_\nu = z_\nu \circ \varphi$, on pourra, en vertu de l'hypothèse faite sur φ, choisir p formes α_ν satisfaisant à cette condition parmi les n formes $\varphi_1\alpha_0, \dots, \varphi_n\alpha_0$. De plus, V et φ étant telles qu'il vient d'être dit, il suffira, pour que tout point de V satisfasse à la première condition du corollaire 3.13, qu'on ait

$$\varphi^*(dz_{\mu_1} \wedge \dots, \wedge dz_{\mu_p}) \in B(V)$$

quel que soient $\mu_1, \dots, \mu_p$; en effet, l'hypothèse faite sur φ signifie précisément qu'en tout point de V l'une au moins de ces formes ne s'annule pas. Si en particulier φ est l'injection canonique dans $\mathbf{C}^n$ d'une variété V plongée dans $\mathbf{C}^n$, on dit, quand cette dernière condition est satisfaite, que V est d'*aire finie*. Il y a donc une structure de Bergmann sur toute variété d'aire finie plongée dans une partie relativement compacte de $\mathbf{C}^n$; il en est ainsi, par exemple, de toute partie ouverte relativement compacte V d'une variété W plongée dans $\mathbf{C}^n$.

Soit enfin V une variété analytique complexe possédant une structure de Bergmann. Celle-ci est invariante par tous les automorphismes analytiques complexes de V ; il en est donc de même du ds^2 qui lui est associé, et par suite aussi de la distance géodésique défini par celui-ci (de Rham, [10, §27]). Considérons alors un groupe G d'automorphismes analytiques complexes de V satisfaisant à la condition suivante

(D_0) *Tout point $x \in V$ a un voisinage U tel que $s(x) \notin U$ pour tout $s \in G$ autre que l'élément neutre.* On vérifie facilement, au moyen de l'invariance de la distance 65
géodésique, que G satisfait alors aussi à la condition (D) du §3.3 (c'est-à-dire est « proprement discontinu sans point fixe »), et que de plus l'espace quotient V/G est séparé. Il s'ensuit, en vertu des résultats du §3.3, qu'on peut définir sur V/G une structure analytique complexe et une structure kählérienne quotient par G de celle de Bergmann sur V. Ces notions jouent un rôle important dans la théorie des fonctions automorphes.

4. Variétés compactes de type kählérien 66

4.1. On sait (de Rham [10, § 31, th. 23]) que, sur un espace de Riemann compact, on peut définir des operateurs H, G satisfaisant aux relations n° 1

$$dH = Hd = 0,\ \delta H = H\delta = 0$$
$$GH = HG = 0,\ \mathbf{1} = H + \Delta G = H + G\Delta \tag{4.1}$$

où $\mathbf{1}$ désigne l'opérateur identique. Ce sont des opérateurs homogènes de degré 0, c'est-à-dire que, si α est une forme différentielle de degré p, il en est de même de $H\alpha$ et de $G\alpha$; ce ne sont pas des opérateurs locaux, c'est-à-dire que, si α s'annule dans un ouvert, il n'en est pas nécessairement de même de $H\alpha$ et $G\alpha$.

La plupart des propriétés des opérateurs H et G se déduisent d'une manière purement formelle des relations (4.1).

Lemme 4.1. *On a $H\Delta = \Delta H = 0$; les quatre relations (i) $\Delta\alpha = 0$, (ii) $\alpha = H\alpha$, (iii) $d\alpha = \delta\alpha = 0$ et (iv) $G\alpha = 0$ sont équivalentes ; et on a $H^2 = H$.* Lemme 1

La première assertions est une conséquence immédiate de (4.1). On voit immédiatement aussi, au moyen de (4.1), que (i) entraîne (ii) et que (ii) entraîne (iii) ; et (iii) entraîne évidemment (i). De même, il est clair (iv) entraîne (ii) ; (ii) entraîne $\Delta G\alpha = 0$ d'après (4.1) ; comme on a, d'après (4.1), $G\alpha = H(G\alpha) + G\Delta(G\alpha)$, et que $HG = 0$, (ii) entraîne donc bien (iv). Enfin, comme $\Delta(H\alpha) = 0$, on a $H\alpha = H(H\alpha)$ puisque (i) et (ii) sont équivalentes ; donc $H^2 = H$. 67

Lemme 4.2. *Pour qu'on ait $\alpha = \beta + \Delta\gamma$ avec $\Delta\beta = 0$, il faut et il suffit qu'on ait* Lemme 2

$$\beta = H\alpha,\ \Delta(\gamma - G\alpha) = 0$$

De plus, on a alors $\gamma = H\gamma + G\alpha$.

La condition est suffisante d'après (4.1). Si $\alpha = \beta + \Delta\gamma$, on a $H\alpha = H\beta$, donc $H\alpha = \beta$ si $\Delta\beta = 0$; on a alors aussi $\alpha = \beta + \Delta G\alpha$, donc $\Delta(\gamma - G\alpha) = 0$. De plus, on a $G\alpha = G(\beta + \Delta\gamma)$, donc $G\alpha = G\Delta\gamma$ d'après le lemme 4.1 ; la dernière assertion résulte de là et de $\gamma = H\gamma + G\Delta\gamma$.

Lemme 3 **Lemme 4.3.** *Sur un espace de* RIEMANN *compact V, soit F une application de l'ensemble des formes différentielles sur V dans lui-même qui soit additive et permutable avec Δ (c'est-à-dire qu'on a $F(\alpha + \beta) = F(\alpha) + F(\beta)$, $F\Delta\alpha = \Delta F\alpha$ quelles que soient α, β). Alors F est permutable avec H et G. En particulier, G est permutable avec d et δ.*

On a en effet $F\alpha = F(H\alpha + \Delta G\alpha)$, ce qui s'écrit, en appliquant les hypothèses faites sur F, $F\alpha = FH\alpha + \Delta FG\alpha$. Mais, aussi en vertu de l'hyopothèse faite sur F, on a $\Delta(FH\alpha) = F\Delta H\alpha = 0$ Le lemme 4.2 appliqué à $F\alpha$ montre qu'on a $FH\alpha = H(F\alpha)$, c'est-à-dire que F et H sont permutables, et aussi que $FG\alpha = H(FG\alpha) + G(F\alpha)$. Mais, comme F et H sont permutables, on a $H(FG\alpha) = FHG\alpha = 0$, donc $FG\alpha = GF\alpha$, ce qui achève la démonstration.

Lemme 4 **Lemme 4.4.** *Pour qu'on ait $\alpha = \beta + d\eta + \delta\omega$, avec $\Delta\beta = 0$, il faut et il suffit qu'on ait*

$$\beta = H\alpha, \quad d(\eta - \delta G\alpha) = 0, \quad \delta(\omega - dG\alpha) = 0$$

Si de plus on a $\delta\eta = 0$, on a $\eta = H\eta + \delta G\alpha$; de même, si $d\omega = 0$, on a $\omega = H\omega + dG\alpha$.

La condition est suffisante d'après (4.1). Réciproquement, si l'on a $\alpha = \beta + d\eta + \delta\omega$, on a, en appliquant H aux deux membres, $H\alpha = H\beta$, donc $H\alpha = \beta$ si $\Delta\beta = 0$ d'après le lemme 4.1. Appliquant aux deux membres de la même relation l'opérateur $d\delta G$, qui d'après le lemme 4.3 n'est autre que $Gd\delta$, on obtient, si $\beta = H\alpha$:

$$d\delta G\alpha = Gd\delta d\eta = G\Delta d\eta = (\mathbf{1} - H)d\eta = d\eta;$$

et de même $\delta dG\alpha = \delta\omega$ en appliquant $\delta dG = G\delta d$ aux deux membres. Enfin on a, si $\delta\eta = 0$:

$$G\Delta\eta = G\delta d\eta = G\delta(d\delta G\alpha) = G\Delta\delta G\alpha = (\mathbf{1} - H)\delta G\alpha = \delta G\alpha,$$

68 d'où la dernière assertion sur η en vertu de (4.1) ; l'assertion analogue au sujet de ω se démontre de même.

n° 2 4.2. Sur un tore muni d'un ds^2 invariant par translation, on peut écrire les opérateurs H, G explicitement sans avoir recours à la théorie générale des formes harmoniques. En effet, un tel tore, s'il est de dimension (réelle) m, peut toujours s'identifier au quotient E/D d'un espace euclidien E de dimension m par un sous-groupe discret D de E de rang m. Soit $< x, y >$ le produit scalaire des vecteurs x, y dans E ; supposons choisi un système de coordonnées tel qu'on ait $< x, x > = \sum_i x_i^2$. Par abus de langage, on identifiera toute fonction et toute forme différentielle sur E/D avec son image transposée sur E. Toute fonction sur E/D sera ainsi identifiée avec une fonction sur E admettant pour périodes tous les vecteurs $d \in D$; une telle fonction se développe, comme il est bien connu, en série de FOURIER [1]

$$f = \sum_{s \in D'} a(s)\mathbf{e}(< s, x >) \tag{4.2}$$

1. Ici, comme dans tout ce qui suit, on a posé $\mathbf{e}(t) = e^{2\pi i t}$.

où D' est le groupe des $s \in E$ tels que $< s, d >$ soit entier quel que soit $d \in D$. Les coeffients $a(s)$ sont donnés par les formules de FOURIER

$$a(s) = \mathfrak{M}_{E/D}\big(f(x)\mathbf{e}(- < s, x >)\big) = \int_{E/D} f(x)\mathbf{e}(- < s, x >)dx$$

où $\mathfrak{M}$ désigne la valeur moyenne sur le tore, prise au moyen de l'élément de volume invariant $dx_1 \dots dx_m$. Les fonctions que nous considérons étant toujours implicitement supposés de classe C^∞, leurs séries de FOURIER sont absolument et uniformément convergentes ainsi que toutes celles qu'on en déduit par différentiation terme à terme.

Raisonnant comme au §§3.3 et 3.4, on voit que les dx_i sont images transposées de formes différentielles de degré 1 sur E/D, invariantes par translation, formes qu'on notera encore dx_i d'après les conventions ci-dessus. Dans ces conditions, le ds^2 donné sur E/D s'écrira $\sum_i dx_i^2$. Toute forme différentielle sur E/D s'écrira alors comme somme de termes $f dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}$, où f est développable en série de FOURIER.

Les opérateurs d, δ, Δ, étant de nature locale, s'exprimeront dans E/D exactement comme dans E ; en particulier, on aura (DE RHAM [10, §26]):

$$\Delta(f dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}) = -\left(\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}\right) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}$$

Définissons alors des opérateurs H, G comme suit. Pour une fonction f donnée par 69
sa série FOURIER (4.2), on posera

$$Hf = a(0) = \mathfrak{M}_{E/D}(f), \quad Gf = (2\pi)^{-2} \sum_{\substack{s \in D' \\ s \neq 0}} < s, s >^{-1} a(s)\mathbf{e}(< s, x >)$$

où il est immédiat que la série qui définit Gf est uniformément convergente et indéfiniment différentiable terme à terme s'il en est ainsi de la série (4.2), comme nous le supposons. On posera aussi

$$H(f dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}) = (Hf)dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p},$$
$$G(f dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}) = (Gf)dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p},$$

et on étend la définition de H, G à toutes les formes à partir de là par linéarité. La vérification des relation (4.1) est immédiate (en ce qui concerne les relations $\delta H = H\delta = 0$, on peut, au lieu de les vérifier directement, les déduire des relations $dH = Hd = 0$ et $*H = H*$). On notera que H est indépendant du choix du ds^2 sur le tore, pourvu que celui-ci soit invariant par translation.

Par conséquent, les appplications que nous ferons de ce qui précède aux tores complexes (en particulier dans la démonstration du théorème 4.10 ci-dessous, et surtout au §6) sont essentiellement indépendantes de la théorie globale des formes harmoniques ; elles reposent en définitive sur les résultats locaux établis dans les chapitres précédents et sur la théorie élémentaire des séries de FOURIER.

En vue de leur utilisation au §6, nous formulerons sous forme de lemme une partie des résultats qu'on vient d'obtenir :

Lemme 4.5. *Sur un tore muni d'un ds^2 invariant par translation, les formes harmoniques sont les formes invariantes par translation ; elles constituent un anneau gradué qui est engendré par* 1 *et par ses éléments de degré 1.* Lemme 5

4.3. Bien entendu, les opérateurs H et G s'étendent par linéarité aux formes différentielles à valeurs complexes. n° 3

Th. 1 **Théorème 4.6.** *Sur une variété kählérienne compacte, les opérateurs H et G associés à la structure riemannienne sous-jacente à la structure kählérienne de la variété sont permutables avec tous les opérateurs de l'algèbre engendrée par $*, d, L$ et les $P_{a,b}$; en particulier, ils sont bihomogènes de bidegré $(0,0)$ et sont permutables avec $C, \Lambda, d', d'', \delta, \delta', \delta''$.*

70 C'est une conséquence immédiate du lemme 4.3 ci-dessus et du corollaire 2.12.

Cor. 1 **Corollaire 4.7.** *Sur une variété kählérienne compacte, on a $d^C H = 0$, $\delta^C H = 0$, $d'H = d''H = 0$, $\delta' H = \delta'' H = 0$.*

En effet, $dH = 0$ entraîne $d^C H^C = 0$; H étant permutable avec C, on a $H^C = H$. De même $\delta^C H = 0$. Le reste suit de là immédiatement.

Cor. 2 **Corollaire 4.8.** *Sur une variété kählérienne compacte, les lemmes 4.1 et 4.4 restent valables si l'on y remplace d, δ soit par $d', 2\delta'$, soit par $d'', 2\delta''$.*

Rappelons qu'on a $\Delta = 2d'\delta' + 2\delta' d'$ (formule (2.10) du th. 2.11). Tenant compte alors du th. 4.6 ci-dessus et de son cor. 4.7, on voit que la démonstration des lemmes 4.1 et 4.4 s'applique telle quelle si on y remplace d, δ par $d', 2\delta'$ ou par $d'', 2\delta''$.

Cor. 3 **Corollaire 4.9.** *Soit η une forme de bidegré $(p, 0)$ sur une variété kählérienne compacte. Alors les trois propriétés suivantes sont équivalentes : (i) η est fermée ; (ii) η est holomorphe ; (iii) η est harmonique.*

Ces propriétés s'écrivent respectivement $d\eta = 0, d''\eta = 0, \Delta\eta = 0$. On a déjà remarqué (au §2.3) que (i) entraîne (ii) sur toute variété quasi-complexe intégrable. Sur toute variété kählérienne, compacte ou non, δ'' est de bidegré $(0, -1)$, de sorte qu'on a, pour toute forme η de bidegré $(p, 0)$, $\delta''\eta = 0$, d'où $\Delta\eta = 2\delta'' d''\eta$ d'après le th. 2.11 ; par suite, dans ces conditions, (ii) entraîne (iii). Enfin, (iii) entraîne (i) d'après le lemme 4.1 si la variété est compacte.

L'exemple de l'espace hermitien montre que la conclusion du corollaire 4.9 n'est pas valable pour une variété kählérienne non compacte ; déjà pour $p = 0$ il existe sur un tel espace des fonctions harmoniques qui ne sont ni constantes ni holomorphes. D'autre part, il peut exister, sur une variété compacte à structure complexe, des formes holomorphes non fermées. Par exemple, soit G le groupe « triangulaire restreint » sur $\mathbf{C}$, formé des matrices $Z = \|z_{\mu\nu}\|$ $(\mu, \nu = 1, \ldots, n)$ sur $\mathbf{C}$ telles que $z_{\mu\mu} = 1$ pour $1 \leq \mu \leq n$ et $z_{\mu\nu} = 0$ pour $1 \leq \nu < \mu \leq N$; soit g le groupe formé des matrices de G dont tous les éléments sont des entiers du corps $\mathbf{Q}(\sqrt{-1})$; c'est un sous-groupe discret de G, de sorte que G est un revêtement de G/g, et on voit facilement que G/g est compact ; d'après le §3.3, on peut définir sur G/g une structure complexe, quotient par g de celle de G. Les coefficients $\zeta_{\mu\nu}$ de la matrice
70 $Z^{-1}dZ$ sont les formes différentielles invariantes à gauche sur G ; ce sont des formes holomorphes de bidegré $(1, 0)$; raisonnant comme au §3, on voit immédiatement qu'on peut les considérer comme images transposées, par l'application canonique de G sur G/g, de formes holomorphes $\zeta'_{\mu\nu}$ sur G/g. De plus, dès que $n \geq 3$, G n'est pas commutatif ; d'après la théorie des groupes de Lie, il s'ensuit que les formes $\zeta_{\mu\nu}$ ne sont pas toutes fermées ; donc il y a au moins une forme non fermée parmi les $\zeta'_{\mu\nu}$. D'après le cor. 4.9 G/g est donc un exemple d'une variété compacte à structure complexe qui ne peut être muni d'une structure kählérienne.

n° 4 4.4. Avant d'aller plus loin dans l'étude des variétés kählériennes compactes, nous nous servirons des résultats que précèdent pour montrer que, dans la prop. 2.6, l'hypothèse d'analyticité de la forme ω est superflue.

Théorème 4.10. *Soit V une variété à structure complexe. Soit ω une forme différentielle définie dans un voisinage U d'un point x de V et telle que $d'\omega = 0$ dans U. Alors il y a un voisinage U' de x dans U où ω peut s'écrire sous la forme $\omega = d'\eta + \bar{\zeta}$, ζ étant une forme holomorphe dans U'.* Th. 2

Le théorème étant de nature purement locale, il suffit de le démontrer sur une variété complexe arbitrairement choisie, par exemple sur un tore kählérien. Supposons donc que V soit un tel tore, et que U soit un voisinage ouvert de $x \in V$; soit φ une fonction (indéfiniment différentiable) sur V, à support contenu dans U, et égale à 1 dans un voisinage U_0 de x (DE RHAM [10, §2, lemme]) ; soit ω_1 la forme égale à $\varphi\omega$ dans U et à 0 dans $V - U$. On aura $\omega_1 = \omega_2 + d'\alpha$, avec $\omega_2 = H\omega_1 + 2\delta' d' G\omega_1$ et $\alpha = 2\delta' G\omega_1$. On a alors $d'\omega_2 = d'\omega_1$ et $\delta'\omega_2 = 0$, et par suite $\Delta\omega_2 = 2\delta' d'\omega_1$, donc en particulier $\Delta\omega_2 = 0$ dans U_0 puisque ω_1 coïncide avec ω dans U_0 et y satisfait donc à $d'\omega_1 = 0$. D'après DE RHAM [10, §34], ou simplement d'après la théorie classique des fonctions harmoniques dans l'espace euclidien, on en conclut que ω_2 est analytique au sens réel dans U_0 ; comme dans U_0 on a $d'\omega_2 = 0$, on peut donc appliquer à ω_2 la prop. 2.6, d'où la conclusion.

Corollaire 4.11. *Les hypothèses étant celles du théorème 4.10, supposons de plus que ω soit bihomogène de bidegré (a, b) avec $a \geq 1$; alors il y a un voisinage de x où ω peut s'écrire $\omega = d'\eta$, η étant bihomogène de bidegré $(a-1, b)$.* Cor. 1

Ecrivons en effet $\omega = d'\eta + \bar{\zeta}$, ζ étant holomorphe ; on conclut immédiatement de là que $\omega = d'(P_{a-1,b}\eta)$. 72

Corollaire 4.12. *Sur une variété complexe V, soit Ω une forme différentielle réelle fermée, bihomogène de bidegré $(1, 1)$. Alors tout point x de V a un voisinage dans lequel on peut écrire $\Omega = id'd''\Phi$, Φ étant une fonction à valeurs réelles.* Cor. 2

En effet, puisque $d\Omega = 0$, il y un voisinage de x où on peut écrire $\Omega = d\omega$, ω étant une forme réelle de degré 1. Posons $\alpha = P_{1,0}\omega$, d'où $\bar{\alpha} = P_{0,1}\omega$, $\omega = \alpha + \bar{\alpha}$, et par suite

$$\Omega = d(\alpha + \bar{\alpha}) = d'\alpha + (d''\alpha + d'\bar{\alpha}) + d''\bar{\alpha}.$$

Les trois termes du dernier membre sont respectivement de bidegrés $(2, 0)$, $(1, 1)$ et $(0, 2)$; comme Ω est de bidegré $(1, 1)$, ils sont donc respectivement égaux à $0, \Omega, 0$. Comme $d'\alpha = 0$, le corollaire 4.11 montre qu'il y a un voisinage de x où on peut écrire $\alpha = d'\varphi$; on a donc, en vertu de la relation $d''d' = -d'd''$:

$$\Omega = d''\alpha + d'\bar{\alpha} = d'd''(\bar{\varphi} - \varphi).$$

Donc Ω est bien de la forme annoncée, avec $\Phi = i(\varphi - \bar{\varphi})$.

4.5. Nous allons maintenant appliquer nos résultats généraux à l'étude des propriétés homologiques des variétés kählériennes compactes. n° 5

On étendra d'une manière évidente les définitions posées dans DE RHAM [10, §18], aux formes différentielles à valeurs complexes. On écrira $\alpha \sim \alpha'$ quand les formes α, α' sont homologues, c'est-à-dire quand il existe β tel que $\alpha - \alpha' = d\beta$. On notera $Cl(\alpha)$ la classe de cohomologie d'une forme fermée α, c'est-à-dire l'ensemble des formes qui lui sont homologues. L'espace vectoriel sur $\mathbf{C}$ des classes de cohomologie sur la variété V sera noté $\mathscr{H}(V)$; il est somme directe des espaces $\mathscr{H}^p(V)$ formés respectivement par les classes homog ènes de degré p ; la dimension de $\mathscr{H}^p(V)$ sera noté $h^p(V)$; au lieu de $\mathscr{H}^p(V), h^p(V)$, on écrira souvent $\mathscr{H}^p, h^p$. Si $\mathbf{a} = Cl(\alpha)$, on notera $\bar{\mathbf{a}}$ la classe $Cl(\bar{\alpha})$. Si $\mathbf{a} = \bar{\mathbf{a}}$, on a $\mathbf{a} = Cl((\alpha + \bar{\alpha})/2)$; donc $\mathbf{a} = \bar{\mathbf{a}}$ est nécessaire et suffisant pour que $\mathbf{a}$ contienne une forme réelle ; on dit en ce cas que la classe $\mathbf{a}$ est réelle. Si $\mathbf{a} = Cl(\alpha), \mathbf{b} = Cl(\beta)$, on posera $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = Cl(\alpha \wedge \beta)$; cette loi de composition est le cas particulier, relatif aux coefficients complexes, du « cup-product » des topologues professionnels.

Lemme 6 **Lemme 4.13.** *Soit α une forme fermée sur un espace de* RIEMANN *compact V. Alors $H\alpha \sim \alpha$; et $H\alpha$ est l'unique forme harmonique homologue à α. Si α' est aussi une forme fermée sur V, les relations $\alpha \sim \alpha'$, $H\alpha = H\alpha'$ sont équivalentes.*

73 On a $\alpha = H\alpha + d\delta G\alpha + \delta dG\alpha$; comme G et d sont permutables, le dernier terme est nul si $d\alpha = 0$; on a donc bien alors $\alpha \sim H\alpha$. Si $\alpha = \beta + d\gamma$ avec β hamronique, alors, d'après le lemme 4.1 on a $\beta = H\alpha$. On conclut de ce qui précède que, si α' est aussi fermée, $\alpha \sim \alpha'$ est équivalent à $H\alpha \sim H\alpha'$, puis que cette dernière relation entraîne $H\alpha = H\alpha'$.

Soit $\mathbf{a}$ une classe de cohomologie sur une variété riemannienne compacte ; d'après le lemme 4.13, quel que soit $\alpha \in \mathbf{a}$, $H\alpha$ sera l'unique forme harmonique de classe $\mathbf{a}$; cette forme sera désignée par $H\mathbf{a}$. L'application $\mathbf{a} \mapsto H\mathbf{a}$ est un isomorphisme de l'espace vectoriel $\mathscr{H}(V)$ sur l'espace des formes harmoniques sur V. En général le produit de deux formes harmoniques n'est pas harmonique ; mais, si V est telle que ce soit toujours le cas (par exemple si V est un tore à ds^2 invariant par translation), alors $\mathbf{a} \mapsto H\mathbf{a}$ est aussi un isomorphisme pour la loi de composition $\wedge$.

Soit V une variété *à structure quasi-complexe intégrable* ; on dira qu'une classe de cohomologie réelle de degré 2 sur V est *de type kählérien* si elle contient une forme fermée, bihomogène de bidegré $(1, 1)$, positive non-dégénérée en tout point de V. On dira que V est *de type kählérien* s'il existe sur V une classe de cohomologie de type kählérien, ou, ce qui revient au même, si on peut munir V d'une structure kählérienne compatible avec sa structure quasi-complexe ; comme le montrent les exemples du §4.3, il existe des variétés compactes à structure complexe qui ne sont pas de type kählérien.

Sur une variété compacte V de type kählérien, on conviendra de dire qu'une classe de cohomologie est *bihomogène de bidegré* (a, b) si elle contient une forme bihomogène de ce bidegré ; on désignera par $\mathscr{H}^{a,b}(V)$, ou simplement par $\mathscr{H}^{a,b}$, l'espace vectoriel sur $\mathbf{C}$ des classes bihomogènes de bidegré (a, b), et par $h^{a,b}(V)$ ou simplement $h^{a,b}$ la dimension de cet espace. Les formes holomorphes sur une telle variété V seront dites *formes de première espèce* ; d'après le corollaire 4.9, une telle forme est nécessairement fermée ; et, d'après ce même corollaire et le lemme 4.13, toute classe bihomogène de bidegré $(p, 0)$ contient une forme de première espèce et une seule ; on peut donc identifier canoniquement $\mathscr{H}^{p,0}(V)$ avec l'espace vectoriel des formes de première espèce de degré p sur V, et $h^{p,0}(V)$ ets la dimension de ce dernier espace. Il est clair que les formes de première espèce sur V constituent un anneau ; il s'ensuit que la somme directe des $\mathscr{H}^{p,0}(V)$ est une sous-algèbre de $\mathscr{H}(V)$, considéré comme algèbre sur $\mathbf{C}$ pour le produit $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$.

Th. 3 **Théorème 4.14.** *L'espace de cohomologie $\mathscr{H}(V)$ d'une variété compacte V de type kählérien est somme directe des espaces $\mathscr{H}^{a,b}(V)$. Dans toute classe de cohomologie*
74 *$\mathbf{a}$ sur V, il y a au moins une forme α telle que $d^C\alpha = 0$, forme qu'on peut choisir réelle si $\mathbf{a}$ est réelle ; si α est une telle forme, les formes $P_{a,b}\alpha$ sont fermées, et les classes $Cl(P_{a,b}\alpha)$ sont les composantes de $\mathbf{a}$ dans la décomposition de $\mathscr{H}(V)$ suivant les $\mathscr{H}^{a,b}(V)$.*

Munissons V d'une structure kählérienne compatible avec sa structure quasi-complexe. Soit $\mathbf{a} \in \mathscr{H}(V)$; alors la forme $H\mathbf{a}$ appartiendra à $\mathbf{a}$ et satisfera à $d^C(H\mathbf{a}) = 0$ (cor. 4.7) ; si $\mathbf{a}$ est réelle, $H\mathbf{a}$ sera réelle. Soit α une forme de classe $\mathbf{a}$ telle que $d^C\alpha = 0$; comme on a aussi $d\alpha = 0$, on aura $d'\alpha = 0, d''\alpha = 0$; si les $\alpha_{a,b} = P_{a,b}\alpha$ sont les composantes bihomogènes de α, les formes $d'\alpha_{a,b}$ et $d''\alpha_{a,b}$ seront respectivement celles de $d'\alpha$ et de $d''\alpha$ et seront donc toutes nulles, ce qui donne $d\alpha_{a,b} = 0$ quels que soient a, b ; donc $\mathbf{a}$ est somme des classes bihomogènes $Cl(\alpha_{a,b})$. De plus, H étant permutable avec $P_{a,b}$, les composantes bihomogènes de $H\alpha$ sont les formes $H(\alpha_{a,b})$; si donc $\mathbf{a} = 0$, d'où $H\alpha = 0$ (lemme 4.13), on aura $H(\alpha_{a,b}) = 0$ quels que soient a, b, donc (lemme 4.13) $Cl(\alpha_{a,b}) = 0$. Ceci montre que la décomposition de $\mathscr{H}(V)$ en somme des $\mathscr{H}^{a,b}(V)$ est directe.

Si $\mathbf{a}$ est une classe de cohomologie, on notera $P_{a,b}\mathbf{a}$ ses composants suivant $\mathscr{H}^{a,b}$; si donc α est une forme de classe $\mathbf{a}$ telle que $d^C\alpha = 0$, on aura $P_{a,b}\mathbf{a} = Cl(P_{a,b}\alpha)$; on posera de même, dans ce cas, $C\mathbf{a} = Cl(C\alpha)$; il reviendrait au même de définir l'opérateur C sur $\mathscr{H}(V)$ au moyen de la formule (1.4). Ici encore, C est un opérateur *réel*, et on a $C^2 = w$, w étant l'opérateur tel que $w\mathbf{a} = (-1)^p\mathbf{a}$ chaque fois que $\mathbf{a}$ est une classe de degré p. On observera qu'un espace vectoriel sur $\mathbf{R}$, de dimension finie, ne peut admettre d'endomorphisme de carré -1 que si sa dimension est paire ; en effet, au moyen d'un tel endomorphisme φ, on définira sur cet espace une structure d'espace vectoriel sur $\mathbf{C}$ en posant $(\xi + i\eta)x = \xi x + \eta\varphi x$ quels que soient $\xi \in \mathbf{R}, \eta \in \mathbf{R}$. Cette remarque, appliquée aux espaces des classes de cohomologie réelles de degré p impair sur V, montre que ceux-ci sont de dimension paire sur $\mathbf{R}$; comme cette dimension n'est autre que la dimension $h^p(V)$ de $\mathscr{H}^p(V)$ comme espace vectoriel sur $\mathbf{C}$, on voit donc que $h^p(V)$ est pair chaque fois que p est impair. C'est là aussi une conséquence directe du théorème 4.14, qui montre que l'on a, quel que soit p

$$h^p(V) = \sum_{a+b=p} h^{a,b}(V) \tag{4.3}$$

pourvu qu'on remarque qu'on a évidemment $h^{b,a} = h^{a,b}$ quels que soient a, b.

Théorème 4.15. *Sur une variété compacte V de type kählérien, l'opérateur C est un automorphisme de l'espace $\mathscr{H}(V)$ considéré comme algèbre par rapport à la loi de composition $\wedge$.* Th. 4

Soient en effet, $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ deux classes de cohomologie ; soient $\alpha \in \mathbf{a}, \beta \in \mathbf{b}$ tels que 75
$d^C\alpha = 0, d^C\beta = 0$. On aura alors $C\mathbf{a} = Cl(C\alpha), C\mathbf{b} = Cl(C\beta)$, et par suite

$$(C\mathbf{a}) \wedge (C\mathbf{b}) = Cl(C\alpha \wedge C\beta) = Cl(C(\alpha \wedge \beta)) = C(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})$$

puisque $d^C(\alpha \wedge \beta) = 0$.

4.6. Soit $\mathbf{u}$ une classe de cohomologie de type kählérien sur une variété compacte V à structure quasi-complexe intégrable. On conviendra de définir un opérateur L sur $\mathscr{H}(V)$ en posant $L\mathbf{a} = \mathbf{u} \wedge \mathbf{a}$. On dira qu'une classe de cohomologie $\mathbf{a}$ de degré p est *primitive relativement à* $\mathbf{u}$ si on a $p \leq n$ et $L^{n-p+1}\mathbf{a} = 0$. n° 6

Théorème 4.16. *Soient V une variété compacte de type kählérien de dimension complexe n, et $\mathbf{u}$ une classe de cohomologie de type kählérien sur V. Alors toute classe de cohomologie $\mathbf{a}$ de degré p sur V peut se mettre, d'une manière et d'une seule, sous la forme* Th. 5

$$\mathbf{a} = \sum_{r \geq (p-n)^+} L^r \mathbf{a}_r, \tag{4.4}$$

où les $\mathbf{a}_r$ sont des classes primitives relativement à $\mathbf{u}$, de degrés respectifs $p - 2r$.

Munissons V d'une structure kählérienne dont la forme fondamentale soit de classe $\mathbf{u}$. La possibilité de mettre $\mathbf{a}$ sous la forme (4.4) découle immédiatement du résultat analogue pour les formes harmoniques, c'est-à-dire du corollaire 2.13, ainsi que la caractérisation des multicovecteurs primitifs donnée par le corollaire 1.6. Pour démontrer l'unicité, supposons (4.4) vérifiée avec $\mathbf{a} = 0$. Posons $\alpha_r = H\mathbf{a}_r$; on a alors $\sum L^r\alpha_r \sim 0$, et aussi, puisque les classes $\mathbf{a}_r$ sont primitives de degrés respectifs $p-2r$, $L^{n-p+2r+1}\alpha_r \sim 0$. Puisque Δ et L sont permutables, les premiers membres de ces relations sont des formes harmoniques ; étant homologues à 0, ils doivent donc s'annuler. Mais alors les résultats des §§1 et 2 qu'on vient de citer montrent d'abord que les α_r sont primitives, puis qu'elles sont nulles.

Cor. **Corollaire 4.17.** *Les hypothèses étant celles du th. 4.16, l'opérateur L^{n-p} détermine, pour $p < n$, un isomorphisme de $\mathscr{H}^p(V)$ sur $\mathscr{H}^{2n-p}(V)$.*

Il suffit, pour le voir, d'écrire (4.4) en y substituant $2n-p$ à p.

D'après la définition des classes primitives, les composantes bihomogènes d'une classe primitive sont encore primitives. Les hypothèses étant celles du théorème
76 4.16, convenons de désigner par $\mathscr{P}^{a,b}(V,\mathbf{u})$, ou simplement par $\mathscr{P}^{a,b}$, l'espace des classes de cohomologie primitives bihomogènes de bidegré (a,b) et par $p^{a,b}(V,\mathbf{u})$ ou $p^{a,b}$ sa dimension sur $\mathbf{C}$. Le théorème 4.16 exprime que $\mathscr{H}(V)$ est somme directe des espace $L^r(\mathscr{P}^{a,b})$ pour $a+b+r \leq n$, et que $\mathscr{H}^{a,b}(V)$ est somme directe des espaces $L^s(\mathscr{P}^{a-s,b-s})$ pour $s \geq (a+b-n)^+$, $s \leq a$, $s \leq b$; en même temps, il montre que l'application L^r de $\mathscr{P}^{a,b}$ sur $L^r(\mathscr{P}^{a,b})$, pour $a+b+r \leq n$, est *bijective*. On conclut aussitôt de là que le noyau de l'application L de $\mathscr{H}^{a,b}$ sur $L(\mathscr{H}^{a,b})$ est $L^{a+b-n}(\mathscr{P}^{n-b,n-a})$, et se réduit donc à 0 si $a+b < n$; on voit en même temps que $\mathscr{H}^{a+1,b+1}$ est somme directe de $L(\mathscr{H}^{a,b})$ et de $\mathscr{P}^{a+1,b+1}$. En particulier, l'application L de $\mathscr{H}^{a,b}$ dans $\mathscr{H}^{a+1,b+1}$ est injective pour $a+b<n$, de sorte qu'on a $h^{a,b} \leq h^{a+,b+1}$ chaque fois que $a+b<n$, et par suite aussi $h^p \leq h^{p+2}$ chaque fois que $p < n$; plus précisément, on a $h^{a+,b+1} = h^{a,b} + p^{a+1,b+1}$ pour $a+b<n$.

L'espace $\mathscr{H}(V)$ étant somme directe des espaces $L^r(\mathscr{P}^{a,b})$ pour $a+b+r \leq n$, on définira des opérateurs $*$ et Λ sur $\mathscr{H}(V)$ en posant, chaque fois que $\mathbf{a} \in \mathscr{P}^{a,b}(V,\mathbf{u})$ et que $a+b=p, p+r \leq n$:

$$*(L^r\mathbf{a}) = (-1)^{\frac{p(p+1)}{2}} i^{a-b} \frac{r!}{(n-p-r)!} L^{n-p-r}\mathbf{a},$$
$$\Lambda(L^r\mathbf{a}) = r(n-p-r+1)L^{r-1}\mathbf{a}.$$

Bien entendu, ces opérateur, de même que L, dépendent du choix de la classe $\mathbf{u}$, tandis que $P_{a,b}$ et C dépendent seulement de la structure quasi-complexe de V.

Th. 6 **Théorème 4.18.** *Soient V une variété de type kählérien, $\mathbf{u}$ une classe de type kählérien sur V, et Ω une forme de classe $\mathbf{u}$ définissant sur V une structure kählérienne. Les opérateurs $L, \Lambda, *$ étant définis au moyen de $\mathbf{u}$ sur $\mathscr{H}(V)$ et au moyen de Ω sur l'ensemble des formes différentielles sur V, l'application $\mathbf{a} \mapsto H\mathbf{a}$ de $\mathscr{H}(V)$ sur l'ensemble des formes harmoniques sur V est un isomorphisme lorsque ces deux ensembles sont considérés comme espaces vectoriels à opérateurs par rapport aux opérateurs $P_{a,b}, C, L, \Lambda, *, w$; cet isomorphisme applique les classes primitives relativement à $\mathbf{u}$ sur les formes harmoniques primitives.*

C'est une conséquence immédiate des résultats précédents et de ceux du §1. On en conclut que toutes les relations entre ces opérateurs qui ont été obtenues au §1 et
77 §2 restent valables pour les opérateurs analogues qu'on vient de définir sur $\mathscr{H}(V)$.

Cor. **Corollaire 4.19.** *L'opérateur $*$ induit sur $\mathscr{H}^{a,b}(V)$ un isomorphisme de $\mathscr{H}^{a,b}(V)$ sur $\mathscr{H}^{n-b,n-a}(V)$; et on a*

$$h^{a,b} = h^{b,a} = h^{n-b,n-a} = h^{n-a,n-b}.$$

4.7. Si V est une variété compacte orientée de dimension réelle m, toute forme α de degré m est fermée sur V, et le théorème de Stokes (de Rham, [10, §5]) montre que $\alpha \sim 0$ entraîne $\int \alpha = 0$, l'intégrale étant prise sur V ; la réciproque est d'ailleurs vraie si V est connexe. Si $\mathbf{a}$ est une classe de cohomologie de dimension m, on notera $I(\mathbf{a})$ la valeur commune des intégrales $\int \alpha$ pour $\alpha \in \mathbf{a}$. Si $\mathbf{a}$ est une classe de cohomologie de degré $\neq m$, on posera $I(\mathbf{a}) = 0$ par définition ; et on étend I à partir de là, par linéarité, à tout l'espace $\mathscr{H}(V)$. On écrit souvent $I(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ au lieu de $I(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})$. Si V est à structure quasi-complexe, il est immédiat que $\int C\alpha = \int \alpha$ quelle que soit la forme α de degré m, d'où on conclut que $I(C\mathbf{a}) = I(\mathbf{a})$ sur une variété de type kählérien. n° 7

Théorème 4.20. *Les hypothèse étant celles du théorème 4.18, on a* Th. 7

$$I(\mathbf{a}, *\mathbf{b}) = I(\mathbf{b}, *\mathbf{a}); \quad I(\mathbf{a}, *\bar{\mathbf{a}}) > 0 \text{ pour } \mathbf{a} \neq 0.$$

D'après la définition de I, on a $I(\mathbf{a}, *\mathbf{b}) = 0$ chaque fois que $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ sont homogènes et ne sont pas de même degré, de sorte qu'il suffit de faire la démonstration pour des classes $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ homogènes de même degré. Posons $\alpha = H\mathbf{a}, \beta = H\mathbf{b}$; d'après le théorème 4.18, on aura $*\alpha = H(*\alpha), *\beta = H(*\beta)$. Le théorème résulte alors de ce qu'on a

$$\alpha \wedge *\beta = \beta \wedge *\alpha; \quad \alpha \wedge *\bar{\alpha} \geq 0$$

quelles que soient les formes α, β de même degré, et que $\alpha \wedge *\bar{\alpha}$ ne peut s'annuler partout que si $\alpha = 0$ (de Rham, [10, §24]).

Corollaire 4.21. *Avec les mêmes hypothèses, soient $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ deux classes de cohomologie de même degré p, données par leurs expressions canoniques* Cor.

$$\mathbf{a} = \sum_{r \geq (p-n)^+} L^r \mathbf{a}_r, \quad \mathbf{b} = \sum_{r \geq (p-n)^+} L^r \mathbf{b}_r,$$

où, pour chaque r, $\mathbf{a}_r$ et $\mathbf{b}_r$ sont des classes primitives de degré $p - 2r$; posons

$$A(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sum_{r \geq (p-n)^+} (-1)^{\frac{p(p+1)}{2}+r} \mu_r I(\mathbf{u}^{n-p+2r} \wedge \mathbf{a}_r \wedge \mathbf{b}_r),$$

les μ_r étant des constantes > 0. Alors $A(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ est une forme bilinéaire sur $\mathscr{H}^p(V)$, et l'on a 78

$$A(\mathbf{b}, \mathbf{a}) = (-1)^p A(\mathbf{a}, \mathbf{b}), \qquad A(C\mathbf{a}, C\mathbf{b}) = A(\mathbf{a}, \mathbf{b}),$$
$$A(\mathbf{a}, C\mathbf{b}) = A(\mathbf{b}, C\mathbf{a}), \qquad A(\mathbf{a}, C\bar{\mathbf{a}}) > 0 \text{ pour } \mathbf{a} \neq 0$$

La première relation est évidente ; la seconde résulte du théorème 4.15. D'autre part, il résulte immédiatement de la définition de $*$ qu'on a :

$$A(\mathbf{a}, C\mathbf{b}) = \sum_r \frac{(n-p+r)!}{r!} \mu_r I(L^r \mathbf{a}_r, *L^r \mathbf{b}_r),$$

d'où les deux dernières relations en vertu du théorème 4.20.

Enfin chaque fois qu'on a une variété compacte V de dimension réelle paire $2n$, on peut considérer la forme bilinéaire $I(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ sur $\mathscr{H}^p(V)$, qui est symétrique ou alternée suivant que n est pair ou impair. Cette forme étant réelle quand $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ sont réelles, on peut, comme il est bien connu, choisir pour $\mathscr{H}^n(V)$, quand n est pair, une base $(\mathbf{a}_\mu)$ de formes réelles telles que $I(\mathbf{a}_\mu, \mathbf{a}_\nu) = 0$ pour $\mu \neq \nu$; si on désigne alors par m' (resp. m'') le nombre de valeurs de μ pour lesquelles $I(\mathbf{a}_\mu, \mathbf{a}_\mu)$ est > 0 (resp. < 0), m' et m'' sont indépendants de ce choix d'une base d'après la loi d'inertie ; on dit que la forme bilinéaire symétrique $I(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ est de type (m', m'') et a *l'indice d'inertie* $m' - m''$.

Théorème 4.22 (« Théorème de Hodge »)**.** *Soit V une variété de type kählérien,*
Th. 8 *de dimension complexe paire n. Alors la forme bilinéaire symétrique $I(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ sur $\mathscr{H}^n(V)$ est non-dégénérée et a pour indice d'inertie :*

$$i(V) = \sum_{a,b} (-1)^a h^{a,b}(V) = \sum_{a \equiv b(2)} (-1)^a h^{a,b}(V)$$

En effet, $\mathscr{H}^n(V)$ est somme directe des espaces $L^r(\mathscr{P}^{a,b})$, avec $a + b + 2r = n$; et, pour $\mathbf{a} \in L^r(\mathscr{P}^{a,b})$, $a + b + 2r = n$, on a, d'après la définition de $*$, $*\mathbf{a} = i^\nu \mathbf{a}$, avec

$$\nu = (a + b)(a + b + 1) + a - b = n^2 + 2a - 4r(n - r),$$

et cela quelle que soit la parité de n ; pour n pair, on a donc alors $*\mathbf{a} = (-1)^a \mathbf{a}$. Supposant dorénavant n pair, désignons par $\mathscr{H}'$ (resp. $\mathscr{H}''$) la somme des espaces $L^r(\mathscr{P}^{a,b})$ pour $a + b + 2r = n, a \equiv 0 \pmod 2$ (resp. pour $a + b + 2r = n, a \equiv 1$
79 $\pmod 2$)). Si $\mathbf{a}' \in \mathscr{H}', \mathbf{a}'' \in \mathscr{H}''$, on a $*\mathbf{a}' = \mathbf{a}'$, $*\mathbf{a}'' = -\mathbf{a}''$; le théorème 4.20, joint au fait que $I(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ est symétrique sur $\mathscr{H}^n(V)$, montre qu'on a alors $I(\mathbf{a}', \mathbf{a}'') = 0$; il montre aussi que, si de plus $\mathbf{a}'$ et $\mathbf{a}''$ sont réelles et $\neq 0$, $I(\mathbf{a}', \mathbf{a}') > 0$ et $I(\mathbf{a}'', \mathbf{a}'') < 0$. L'espace $\mathscr{H}^n(V)$ étant somme directe de $\mathscr{H}'$ et $\mathscr{H}''$, et ceux-ci étant leurs propre imaginaires conjugués, on peut prendre pour $\mathscr{H}^n(V)$ une base réelle formée d'une base de $\mathscr{H}'$ et d'une base de $\mathscr{H}''$; si donc m', m'' sont les dimensions de $\mathscr{H}', \mathscr{H}''$, $I(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ est de type (m', m''). Comme $m' + m''$ est la dimension de $\mathscr{H}^n(V)$, la forme $I(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ est non-dégénérée (ce qui est d'ailleurs aussi une conséquence bien connue de la « dualité de Poincaré »). De plus, m' est donné par la formule

$$\begin{aligned} m' &= \sum_{\substack{a \equiv b \equiv 0(2) \\ a+b \leq n}} p^{a,b} = \sum_{\substack{a \equiv b \equiv 0(2) \\ a+b \leq n}} (h^{a,b} - h^{a-1,b-1}) = \\ &= \sum_{\substack{a \equiv b \equiv 0(2) \\ a+b \leq n}} h^{a,b} - \sum_{\substack{a \equiv b \equiv 1(2) \\ a+b \leq n-2}} h^{a,b}. \end{aligned}$$

On a une formule analogue pour m'', avec $a \equiv b \equiv 1(2)$ remplaçant $a \equiv b \equiv 0(2)$, et vice versa, dans les sommations. Compte tenu du théorème 4.18, la formule pour m'' peut aussi s'écrire

$$m'' = \sum_{\substack{a \equiv b \equiv 1(2) \\ a+b \geq n}} h^{a,b} - \sum_{\substack{a \equiv b \equiv 0(2) \\ a+b \geq n+2}} h^{a,b},$$

d'où la formule du théorème 4.22.

On observera que les résultats des §§4.5, 4.6, 4.7 ci-dessus fournissent un certain nombre de conditions *nécessaires* pour qu'une variété compacte à structure complexe soit de type kählérien. Par exemple, d'après le corollaire 4.17, il faut pour cela qu'il y ait une classe $\mathbf{u}$ de degré 2 telle que l'application $\mathbf{a} \mapsto \mathbf{u}^{n-p} \wedge \mathbf{a}$ détermine un isomorphisme de $\mathscr{H}^p$ sur $\mathscr{H}^{2n-p}$ chaque fois que $p < n$, n étant la dimension complexe de la variété ; c'est même là une condition purement topologique, qui ne fait pas intervenir la structure complexe. On a aussi signalé au passage le fait que, sur une telle variété, h^p est pair pour tout p impair. D'autres conditions, faisant intervenir la structure complexe, résultent par exemple des th. 4.14 et 4.15, et du corollaire 4.19.

n° 8 4.8. Jusqu'ici, nous avons fait usage exclusivement de la cohomologie à coefficients réels ou complexes ; mais, surtout dans les applications à la géométrie algébrique de la théorie exposée ici, la cohomologie entière et la cohomologie rationelle jouent 80
un rôle important. Rappelons brièvement comment on peut introduire ces notions classiques sans quitter le point de vue où nous nous sommes placés jusqu'ici (pour un exposé rapide, conçu dans un esprit un peu différent, le lecteur pourra se reporter à mon article *Sur les théorèmes de de Rham* [13, II, 1952a, p. 17]). Soit V une variété de dimension (réelle) m. La notion de classe de cohomologie s'étend d'elle-même au courants sur V (DE RHAM, [10, §§18 et 23]) ; cette extension ne modifie pas les espaces de cohomologie, puisque tout courant fermé est homologue à une forme différentielle et que toute forme homologue à 0 en tant que courant l'est aussi en tant que forme ([10, §18]). Les chaînes peuvent être considérées comme des courants d'une espèce particulière ([10, §6]) ; et un raisonnement analogue à celui qu'on vient de rappeler montre que la cohomologie définie au moyen des chaînes ne diffère pas de celle qui est définie au moyen des courants ou au moyen des formes ([10, §23]). Tout cela s'étend trivialement aux formes et courants à valeurs complexes et aux chaînes à coefficients complexes. On dira qu'une classe de cohomologie est *entière* (resp. *rationnelle*) si elle contient un courant qui soit une chaîne à coefficients entiers (resp. rationnels). On démontre que le produit $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ de deux classes entières est une classe entière ; autrement dit, les classes entières forment un sous-anneau de l'anneau de cohomologie $\mathscr{H}(V)$; il en est donc de même des classes rationnelles. On dira qu'un opérateur sur $\mathscr{H}(V)$ est *rationnel* s'il transforme toute classe rationnelle en une classe rationnelle. Par exemple, si $\mathbf{u}$ est une classe rationnelle, l'opérateur $\mathbf{a} \mapsto \mathbf{u} \wedge \mathbf{a}$ est rationnel.

A partir de maintenant, bornons-nous au cas où V est compacte. Il est immédiat alors que toute chaîne peut s'écrire comme somme finie $\sum_\nu \xi_\nu C_\nu$, où les C_ν sont des chaînes à coefficients entiers et où les coefficients ξ_ν sont linéairement indépendants sur le corps $\mathbf{Q}$ des rationnels ; pour qu'une telle chaîne soit fermée, il faut et il suffit que chacune des chaînes C_ν le soit. Donc l'espace $\mathscr{H}(V)$ est engendré pas les classes rationnelles. On voit de même que, si des classes rationnelles sont linéairement indépendantes sur $\mathbf{Q}$, elles le sont aussi sur $\mathbf{R}$ et sur $\mathbf{C}$. Il s'ensuit que les classes rationnelles de degré p forment, quel que soit p, un espace vectoriel de dimension $h^p(V)$ sur $\mathbf{Q}$, et qu'une base de cet espace est aussi une base de $\mathscr{H}^p(V)$ sur $\mathbf{C}$. On démontre de plus que les classes entières de degré p forment un sous-groupe discret de $\mathscr{H}^p(V)$, groupe qui est donc libre de rang $h^p(V)$.

Si α est une forme différentielle fermée de degré p, on appelle *période* de α l'intégrale de α sur une chaîne fermée entière de dimension p ; en particulier, si α 81
est de degré m, et si V est orienté, l'intégrale de α sur V est une période de V. On démontre que, pour qu'une forme fermée soit de classe entière, il faut et il suffit que toutes ses périodes soient entières ; par exemple, si V est orienté et si $\mathbf{a}$ est une classe entière de degré m, $I(\mathbf{a})$ est entier. Il résulte, comme de ce qui précède que, si φ est une application (indéfiniment différentiable, comme toujours) d'une variété compacte W dans la variété compacte V, et si α est une forme fermée de de classe entière sur V, son image transposée $\varphi^*\alpha$ est de classe entière sur W. Des résultats analogues sont valables bien entendu pour les classes rationnelles.

On appellera *variété de* HODGE toute variété compacte à structure quasi-complexe intégrable sur laquelle il existe une classe de cohomologie *rationnelle* de type kählérien. Toute variété compacte V de type kählérien pour laquelle on a $h^2(V) = 1$ est une variété de HODGE ; en effet, soit $\mathbf{u}$ une classe de type kählérien sur V ; comme $h^2(V) = 1$, toute classe rélle de degré 2 s'écrira $t\mathbf{u}$ avec $t \in \mathbf{R}$, et est donc de type kählérien pour $t > 0$; si donc $\mathbf{u}'$ est une classe rationnelle non nulle de degré 2, $\mathbf{u}'$ ou

$-\mathbf{u}'$ sera rationnelle de type kählérien. En particulier, l'espace projectif complexe $\mathbf{P}^n$ est une variété de HODGE ; il est bien connu en effet qu'on a $h^2(\mathbf{P}^n) = 1$; cela résulte par exemple de la décomposition « cellulaire » de $\mathbf{P}^n$ au moyen d'une suite décroissante de sous-variétés linéaires de dimensions respectives $n-1, n-2, \ldots, 0$. D'après ce qu'on a vu au §3, il s'ensuit que toute variété compacte à structure complexe qui admet une application holomorphe et partout localement biregulière dans $\mathbf{P}^n$ est une variété de HODGE ; il en est ainsi par exemple de toute sous-variété algébrique de $\mathbf{P}^n$ sans point multiple. Réciproquement, d'après un important théorème de KODAIRA [8], toute variété de HODGE à structure complexe est isomorphe à une sous-variété d'un espace projectif. Si on tient compte des résultats précédemment cités ([9] et la fin du §3.5), il s'ensuit que *toute variété de* HODGE *est isomorphe à une sous-variété algébrique sans point multiple d'un espace projectif complexe.*

Au sujet des variétés de HODGE, nous avons le théorème suivant, conséquence immédiate des résultats de ce chapitre.

Th. 9 **Théorème 4.23.** *Soient V une variété de* HODGE *et* $\mathbf{u}$ *une classe de cohomologie rationnelle de type kählérien sur V ; on suppose définis au moyen de* $\mathbf{u}$ *les opérateurs*
82 *L et Λ sur $\mathscr{H}(V)$, ainsi que les espaces $\mathscr{P}^p$ de classes primitives de degré p pour $0 \leq p \leq n$. Alors les opérateurs L, Λ et les projecteurs associés à la décomposition de $\mathscr{H}(V)$ en somme directe des espaces $L^r(\mathscr{P}^p)$ pour $0 \leq p+r \leq n$ sont rationnels ; et la forme bilinéaire $A(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ définie dans le corollaire 4.21 est à valeurs rationnelles pour $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ rationnelles pourvu que les μ_r aient été pris rationnels.*

Il est clair que L^r est un opérateur rationnel quel que soit r. Comme $\mathscr{P}^p$ est le noyau de l'application L^{n-p+1} de $\mathscr{H}^p$ dans $\mathscr{H}^{2n-p+2}$, c'est un sous-espace rationnel de $\mathscr{H}^p$ (c'est-à-dire qu'il est engendré par des classes rationnelles) ; il en est donc de même des espaces $L^r(\mathscr{P}^p)$. Comme $\mathscr{H}(V)$ est somme directe de ceux-ci d'après le th. 4.16, on peut donc choisir une base de $\mathscr{H}(V)$ formée de classes rationnelles dont chacune est dans l'un de ces espaces ; il s'ensuit que les composantes, suivant ceux-ci, de toute classe rationnelle sont rationnelles. Comme L^r est un opérateur rationnel et induit sur l'espace rationnel $\mathscr{P}^p$ un isomorphisme de celui-ci sur $L^r(\mathscr{P}^p)$ pour $p + r \leq n$, l'isomorphisme de $L^r(\mathscr{P}^p)$ sur $\mathscr{P}^p$ réciproque de ce dernier est aussi rationnel ; il résulte alors immédiatement de la définition de Λ que Λ est rationnel sur chacun des espaces $L^r(\mathscr{P}^p)$; il l'est donc aussi sur $\mathscr{H}(V)$. Enfin l'assertion relative à $A(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ est une conséquence immédiate de ce qui précède et du fait que $I(\mathbf{a})$ est rationnel si la classe $\mathbf{a}$ est rationnelle.

En particulier, considérons l'espace $E = \mathscr{H}^{2p+1}(V, \mathbf{R})$ des classes de cohomologie *réelles* de degré impair $2p+1$, avec $0 \leq p < n$; soit G le sous-groupe de E formé des classes *entières*, qui est de rang égal à la dimension $h^{2p+1}(V)$ de E sur $\mathbf{R}$. Puisque l'opérateur induit par C sur E satisfait à la relation $C^2 = -\mathbf{1}$, où $\mathbf{1}$ est l'automorphisme identique, on peut définir sur E une structure d'espace vectoriel sur $\mathbf{C}$ en posant $i\mathbf{a} = C\mathbf{a}$ quel que soit $\mathbf{a} \in E$. Alors E/G est un tore complexe ; et, dans le langage qui sera défini au §6, on peut exprimer les résultats du th. 4.23 et du corollaire 4.21 relatifs à E en disant que $A(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ est la partie réelle d'une forme de RIEMANN non-dégénérée pour E/G, de sorte que E/G est une variété abélienne. Pour $p = 0$, la variété abélienne ainsi définie s'appelle la *variété de* PICARD de V ; pour $p = n-1$, c'est la *variété d'*ALBANESE de V.

83

5. FONCTIONS DE TRANSITIONS ET DIVISEURS

n° 1 5.1. Si $(X_\iota)_{\iota \in I}$ est un recouvrement d'un ensemble E, on conviendra d'écrire $X_J = \bigcap_{\iota \in J} X_\iota$ pour toute partie J de I ; si $J = \{\iota_1, \ldots, \iota_m\}$, on écrira aussi $X_{\iota_1 \ldots \iota_m}$ au lieu de X_J. L'ensemble N des parties finies J de I telles que X_J ne soit pas vide s'appelle le *nerf* du recouvrement (X_ι). Si G est un groupe, on appelle *système de fonctions de transition*, relatif au recouvrement (X_ι) de E et au groupe G, un ensemble $(f_{\iota\varkappa})_{\{\iota\varkappa\}\in N}$ d'applications qui, à tout couple $(\iota,\varkappa)$ tel que $\{\iota,\varkappa\}\in N$, fait correspondre une application $f_{\iota\varkappa}$ de $X_{\iota\varkappa}$ dans G de telle sorte que $f_{\iota\lambda}$ coïncide avec $f_{\iota\varkappa}f_{\varkappa\lambda}$ dans $X_{\iota\varkappa\lambda}$ chaque fois que $\{\iota,\varkappa,\lambda\}\in N$. Cette définition, si on prend $\iota=\varkappa=\lambda$, implique qu'on a $f_{\iota\iota}=e$ quel que soit ι, e étant l'élément neutre de G (plus précisément, $f_{\iota\iota}$ est l'application constante qui applique X_ι sur e) ; en prenant $\iota=\lambda$, on voit alors qu'on a $f_{\varkappa\iota}=f_{\iota\varkappa}^{-1}$ chaque fois que $\{\iota,\varkappa\}\in N$. On obtient un système de fonctions de transition en posant $f_{\iota\varkappa}=e$ chaque fois que $\{\iota,\varkappa\}\in N$. Si, pour chaque ι, g_ι est une application de X_ι dans G, et que $(f_{\iota\varkappa})$ soit un système de fonctions de transition, le système $(f'_{\iota\varkappa})$ défini par $f'_{\iota\varkappa}=g_\iota f_{\iota\varkappa}g_\iota^{-1}$ en est un autre. Si G est un groupe commutatif, on peut considérer les systèmes de fonctions de transition du recouvrement (X_ι), à valeurs dans G, comme formant un groupe commutatif en prenant $(f_{\iota\varkappa}f'_{\iota\varkappa})$ comme produit des systèmes $(f_{\iota\varkappa}),(f'_{\iota\varkappa})$.

Soit $(Y_\lambda)_{\lambda\in L}$ un recouvrement de E plus fin que (X_ι) ; cela veut dire qu'il existe une application φ de L dans I telle que $Y_\lambda\subset X_{\varphi(\lambda)}$ quel que soit λ. Tout système de fonctions de transition $(f_{\iota\varkappa})$ relatif au recouvrement (X_ι) détermine alors un système analogue $(f_{\varphi(\lambda)\varphi(\mu)})$ relatif au recouvrement (Y_λ) ; celui-ci est dit *dérivé* du premier au moyen de φ.

Le plus souvent, on prendra pour (X_ι) un recouvrement ouvert d'une variété V, pour G un groupe de Lie, et on imposera aux fonctions de transition $f_{\iota\varkappa}$ d'être 84
différentiables, et éventuellement holomorphes si V et G sont munis d'une structure complexe.

On peut encore présenter la définition des systèmes de fonctions de transition comme suit. Soit de nouveau (X_ι) un recouvrement d'un ensemble E ; à chaque couple $(\iota,\varkappa)$ tel que $\{\iota,\varkappa\}$ appartienne au nerf du recouvrement, faisons correspondre une application $f_{\iota\varkappa}$ de $X_{\iota\varkappa}$ dans le groupe G. Soit Z la partie du produit $I\times E\times G$ formée des éléments (ι,x,s) de ce produit tels que $x\in X_\iota$; et considérons dans Z la relation R suivante entre éléments $\xi=(\iota,x,s)$ et $\eta=(\varkappa,y,t)$ de Z :

$$\text{(R)}\qquad x=y,\quad t=f_{\varkappa\iota}(x)s$$

Pour que ce soit là une relation d'équivalence dans Z, il faut et il suffit que $(f_{\iota\varkappa})$ soit un système de fonctions de transition. Lorsqu'il en est ainsi, le quotient Z/R de Z par cette relation d'équivalence R s'appelle le *système fibré principal de base* E défini par le système $(f_{\iota\varkappa})$. Par passage au quotient, la projection de Z sur E détermine une application π de Z/R sur E qui s'appelle la *projection canonique* de Z/R sur E.

Supposons en particulier que E soit un espace topologique, G un groupe topologique, (X_ι) un recouvrement ouvert, et que les $f_{\iota\varkappa}$ soient continues ; I étant muni de la topologie discrète, Z est alors une partie ouverte de $I\times E\times G$, et, pour chaque ι, l'ensemble Z_ι des points de Z ayant la projection ι sur I est une partie ouverte de Z, homéomorphe à $X_\iota\times G$. De plus, la relation R est ouverte (Bourbaki, [3, Chap. I, §9, n° 6]), ce qui signifie que le saturé Ω' par R de tout ouvert Ω dans Z est ouvert ; Ω étant réunion des ouverts $\Omega_\iota=\Omega\cap Z_\iota$, il suffit de montrer que le saturé Ω'_ι est ouvert, et, pour cela, de faire voir que chacun des ensembles $\Omega'_{\iota\varkappa}=\Omega'_\iota\cap Z_\varkappa$ est ouvert. Or $\Omega'_{\iota\varkappa}$ n'est autre que l'image de

$$\Omega_\iota\cap(\{\iota\}\times X_{\iota\varkappa}\times G)$$

par l'application $(\iota,x,s)\mapsto(\varkappa,x,f_{\varkappa\iota}(x)s)$ de $\{\iota\}\times X_{\iota\varkappa}\times G$ sur $\{\varkappa\}\times X_{\iota\varkappa}\times G$; ces derniers ensembles étant ouvert, dans Z_ι et dans $Z_\varkappa$ respectivement, et l'application en question étant évidemment un homéomorphisme, le résultat s'ensuit.

Dans les conditions ci-dessus, le système fibré principal Z/R, muni de la topologie quotient de celle de Z par R, s'appellera *l'espace fibré principal* définie sur l'espace de base E par le système $(f_{\iota\varkappa})$. Comme la relation R est ouverte, l'application canonique de Z sur Z/R induit sur chaque Z_ι (d'après [3, I, §9, prop.6] un
85 homéomorphisme de Z_ι sur son image dans Z/R, et celle-ci est une partie ouverte de Z/R ; cela entraîne que Z/R est séparé si E et G sont séparés.

Lemme 1 **Lemme 5.1.** *Soit (X_ι) un recouvrement d'un espace séparé E, connexe et simplement connexe, par des ouverts connexes (X_ι) ; soit G un groupe ; soit $f_{\iota\varkappa}$ un système de fonctions de transition constantes à valeurs dans G, relatif au recouvrement (X_ι). Alors il y a des éléments g_ι de G, tels que l'on ait $f_{\iota\varkappa} = g_\iota g_\varkappa^{-1}$ dans $X_{\iota\varkappa}$ chaque fois que $X_{\iota\varkappa} \neq \varnothing$.*

G étant muni de la topologie discrète, considérons l'espace fibré principal Z/R, et sa projection canonique π sur E ; $\pi^{-1}(X_\iota)$ n'est pas autre chose que l'image de Z_ι dans Z/R et est donc réunion des images $Y_{\iota,s}$ dans Z/R des ensembles $\{\iota\}\times X_\iota\times\{s\}$ pour $s \in G$, ensembles qui sont ouverts dans Z puisque G est discret. De plus, d'après de ce qu'on a vu, l'application canonique de $\{\iota\} \times X_\iota \times \{s\}$ sur $Y_{\iota,s}$ est un homéomorphisme. Convenons de dire qu'une partie Y de Z/R est (X_ι)-connexe si elle contient tout ensemble $Y_{\iota,s}$ qui a avec elle une intersection non vide ; il est clair que toute intersection de parties (X_ι)-connexes de Z/R est (X_ι)-connexe. Si une partie Y de Z/R est (X_ι)-connexe, $\pi^{-1}(X_\iota) \cap Y$ est réunion de ceux des $Y_{\iota,s}$ qui sont contenus dans Y ; il s'ensuit que Y, muni de l'application de Y dans E induite sur Y par π, est un revêtement de E. Supposons que Y soit réunion de deux ouverts disjoints Y', Y'' ; si un ensamble $Y_{\iota,s}$ est contenu dans Y, il est réunion des ouverts disjoints $Y_{\iota,s} \cap Y', Y_{\iota,s} \cap Y''$; comme il est homéomorphe à X_ι, donc connexe par hypothèse, l'un de ces derniers ensembles est donc vide ; autrement dit, $Y_{\iota,s}$ est contenu dans l'un des ensembles Y', Y'' et disjoint de l'autre ; il s'ensuit que Y' et Y'' sont (X_ι)-connexes. Il résulte immédiatement de là que, si $y_0 \in Z/R$, l'intersection Y_0 de toutes les parties (X_ι)-connexes de Z/R qui contiennent y_0 est un revêtement connexe de E. Mais on a supposé E simplement connexe ; cela veut dire, par définition, que la projection sur E de tout revêtement connexe de E est un homéomorphisme ; donc π induit sur Y_0 un homéomorphisme de Y_0 sur E. Par suite, l'ensemble $\pi^{-1}(X_\iota) \cap Y_0$, qui est, comme on a vu, réunion de ceux des $Y_{\iota,s}$ qui sont contenus dans Y_0, se réduit à un seul de ces ensembles ; désignons celui-ci par Y_{ι,g_ι}. Alors, si $x \in X_{\iota\varkappa}$, Y_0 contient les images dans Z/R des points (ι, x, g_ι) et $(\varkappa, x, g_\varkappa)$ de Z ; comme Y_0 n'a qu'un point se projetant en x, ces images doivent coïncider, c'est-à-dire qu'on a $g_\varkappa = f_{\varkappa\iota}(x)g_\iota$, c'est-à-dire $f_{\varkappa\iota}(x) = g_\varkappa g_\iota^{-1}$.

n° 2 5.2. Etant donnés une variété V de dimension réelle m, et un recouvrement (X_ι)
86 de V, on sait qu'il existe toujours un recouvrement ouvert (U_λ) de V, plus fin que (X_ι), localement fini et (différentiablement) *simple*, ce qui signifie que toute intersection non vide $U_{\lambda_1\dots\lambda_m}$ est (différentiablement) homéomorphe à un ouvert convexe de $\mathbf{R}^m$ (pour une démonstration cf. [13, II, 1952a, §1]). Si (U_λ) est un tel recouvrement, on peut établir un isomorphisme entre les « cocycles » de son nerf N et les classes de cohomologie sur V ; dans le cas des classes de degré 2, qui nous importe surtout ici, cet isomorphisme se définit comme suit. Soit (p_λ) une partition de l'unité subordonnée au recouvrement (U_λ) ([10, p. 4 et p. 6]). Soit α une forme fermée de degré 2 sur V. En vertu de l'hypothèse faite sur le recouvrement (U_λ), on peut, dans chaque U_λ, écrire $\alpha = d\beta_\lambda$, où β_λ désigne une forme de degré 1 dans U_λ (cf. p. ex. [10, p. 98]) ; chaque fois que $\{\lambda, \mu\} \in N$, on a alors $d\beta_\lambda = d\beta_\mu$ dans $U_{\lambda\mu}$, c'est-à-dire que $\beta_\mu - \beta_\lambda$ est une forme fermée dans $U_{\lambda\mu}$; on peut donc, en vertu des hypothèses, l'écrire $\beta_\mu - \beta_\lambda = df_{\lambda\mu}$, où $f_{\lambda\mu}$ est une fonction dans $U_{\lambda\mu}$. Mais alors,

chaque fois que $\{\lambda, \mu, \nu\} \in N$, on a $d(f_{\mu\nu} - f_{\lambda\nu} + f_{\lambda\mu}) = 0$ dans $U_{\lambda\mu\nu}$; ce dernier ensemble étant connexe, on peut donc poser :

$$a_{\lambda\mu\nu} = f_{\mu\nu} - f_{\lambda\nu} + f_{\lambda\mu}, \tag{5.1}$$

où $a_{\lambda\mu\nu}$ désigne une constante, cette relation étant vérifié en tout point de $U_{\lambda\mu\nu}$. On peut évidemment supposer que les $f_{\lambda\mu}$ ont été choisis de telle sorte qu'on ait $f_{\mu\lambda} = -f_{\lambda\mu}$ chaque fois que $\{\lambda, \mu\} \in N$, donc en particulier $f_{\lambda\lambda} = 0$ quel que soit λ ; alors $(a_{\lambda\mu\nu})$ est alterné dans les indices λ, μ, ν. Il est immédiat que $(a_{\lambda\mu\nu})$ est un *cocycle* du nerf N, ce qui veut dire qu'on a, chaque fois que $\{\lambda, \mu, \nu, \rho\} \in N$:

$$a_{\mu\nu\rho} - a_{\lambda\nu\rho} + a_{\lambda\mu\rho} - a_{\lambda\mu\nu} = 0$$

Réciproquement, supposons donné un tel cocycle $(a_{\lambda\mu\nu})$. Pour tout couple (λ, μ) tel que $\{\lambda, \mu\} \in N$, posons $f_{\lambda\mu} = \sum_\rho a_{\lambda\mu\rho} p_\rho$, la sommation étant étendue à tous les ρ tels que $\{\rho, \lambda, \mu\} \in N$; puis, pour tout λ, posons $\beta_\lambda = -\sum_\rho p_\rho df_{\lambda\rho}$, la sommation étant étendue à tous les ρ tel que $\{\rho, \lambda\} \in N$; on vérifie immédiatement qu'on a, en tout point de $U_{\lambda\mu\nu}$ (si cet ensemble n'est pas vide) la relation (5.1), puis, en tout point de $U_{\lambda\mu}$ (si cet ensemble n'est pas vide) la relation $df_{\lambda\mu} = \beta_\mu - \beta_\lambda$. Il s'ensuit que $d\beta_\lambda$ et $d\beta_\mu$ coïncident dans $U_{\lambda\mu}$ quels que soient λ, μ, donc qu'il y a une forme fermée α de degré 2 sur V qui coïncide avec $d\beta_\lambda$ dans U_λ quel que soit λ.

Si $\alpha \sim 0$, il y a β de degré 1 sur V tel que $\alpha = d\beta$, donc, avec les notations ci-dessus, $d(\beta_\lambda - \beta) = 0$ dans U_λ quel que soit λ, ce qui permet d'écrire $\beta_\lambda = \beta + dg_\lambda$ dans U_λ ; on en conclut que, pour $\{\lambda, \mu\} \in N$, $f_{\lambda\mu} - g_\mu + g_\lambda$ est une constante $b_{\lambda\mu}$ dans $U_{\lambda\mu}$; si on a pris les $f_{\lambda\mu}$ alternées en λ, μ, comme nous le supposons, il en est 87
de même des $b_{\lambda\mu}$. La relation (5.1) donne alors, pour $\{\lambda, \mu, \nu\} \in N$:

$$a_{\lambda\mu\nu} = b_{\mu\nu} - b_{\lambda\nu} + b_{\lambda\mu},$$

ce qu'on exprime en disant que le cocycle $(a_{\lambda\mu\nu})$ est le *cobord* de la « cochaîne » $(b_{\lambda\mu})$; un cocycle est dit *homologue à* 0 si c'est le cobord d'une cochaîne. Réciproquement, supposons qu'il en soit ainsi ; posons $f'_{\lambda\mu} = f_{\lambda\mu} - b_{\lambda\mu}$ dans $U_{\lambda\mu}$ et $f'_{\lambda\mu} = 0$ en dehors de $U_{\lambda\mu}$, puis $g'_\lambda = -\sum_\rho p_\rho f'_{\lambda\rho}$, la sommation étant de nouveau étendue aux ρ tels que $\{\rho, \lambda\} \in N$; on vérifie que g'_λ est différentiable dans U_λ, puis, comme précédemment, que l'on a $f'_{\lambda\mu} = g'_\mu - g'_\lambda$ dans $U_{\lambda\mu}$, ce qui entraîne que $\beta_\lambda - dg'_\lambda$ et $\beta_\mu - dg'_\mu$ coïncident dans $U_{\lambda\mu}$, donc qu'il y a une forme β' qui coïncide avec $\beta_\lambda - dg'_\lambda$ dans U_λ quel que soit λ. Mais alors on a $\alpha = d\beta'$ dans chaque U_λ, donc sur V, et α est homologue à 0. Donc, pour que α soit homologue à 0, il faut et il suffit que le cocycle $(a_{\lambda\mu\nu})$ le soit. On a ainsi établi un isomorphisme (canonique, si le recouvrement (U_λ) est donné) entre le groupe de cohomologie de degré 2 sur V et le groupe des classes de cocycles $(a_{\lambda\mu\nu})$ du nerf N à coefficients complexes. Il est clair d'ailleurs qu'aux formes réelles correspondent des classes de cocycles contenant des cocycles réels. On démontre de plus (v. p. ex. [13, II, 1952a]), que, pour qu'une classe de cohomologie sur V soit entière (resp. rationnelle), il faut et il suffit qu'il lui corresponde une classe de cocycles de N contenant des cocycles à valeurs entières (resp. rationnelles).

Nous aurons à nous servir aussi des résultats analogues pour le degré 1, qui sont plus simples. Soit α uns forme de degré 1 sur V ; dans chaque U_λ, on pourra écrire $\alpha = df_\lambda$, f_λ étant une fonction dans U_λ ; on a alors $f_\mu - f_\lambda = a_{\lambda\mu}$ dans $U_{\lambda\mu}$ pour $\{\lambda, \mu\} \in N$, les $a_{\lambda\mu}$ étant des constantes qui satisfont à $a_{\lambda\nu} = a_{\lambda\mu} + a_{\mu\nu}$, ou encore à $a_{\lambda\mu} - a_{\lambda\nu} + a_{\mu\nu} = 0$ chaque fois que $\{\lambda, \mu, \nu\} \in N$. On exprime ces relations en disant que $(a_{\lambda\mu})$ est un *cocycle de* N ; il revient au même de dire que c'est un système de fonctions de transition constantes pour le recouvrement (U_λ), à valeurs dans le groupe additif $\mathbf{C}$. Réciproquement, un tel cocycle étant donné, posons $f_\lambda = -\sum_\rho a_{\lambda\rho} p_\rho$, la sommation étant étendue aux ρ tels que $\{\rho, \lambda\} \in N$;

dans $U_{\lambda\mu}$, on aura $a_{\lambda\mu} = f_\mu - f_\lambda$, d'où $df_\lambda = df_\mu$, de sorte qu'il y aura une forme fermée α de degré 1 sur V qui coïncide avec df_λ dans U_λ quel que soit λ. Si $\alpha = df$, $f_\lambda - f$ sera égale à une constante b_λ dans U_λ, et on aura $a_{\lambda\mu} = b_\mu - b_\lambda$, ce qu'on exprime en disant que $(a_{\lambda\mu})$ est le cobord de la cochaîne (b_λ) et est homologue à 0. Réciproquement, s'il en est ainsi, $f_\lambda - b_\lambda$ et $f_\mu - b_\mu$ coïncident dans $U_{\lambda\mu}$, et il y a donc une fonction f coïncidant avec $f_\lambda - b_\lambda$ dans U_λ quel que soit λ, ce qui donne $\alpha = df$. Il y a donc de nouveau un isomorphisme entre les classes de cohomologie de
88 degré 1 sur V et les classes de cocycles $(a_{\lambda\mu})$ du nerf N. Le lemme 5.1 montre que, si V est simplement connexe, tout cocycle $(a_{\lambda\mu})$ de N est homologue à 0 ; on a donc (comme il est bien connu) $\mathscr{H}^1(V) = 0$ pour toute variété simplement connexe.

n° 3 5.3. On aura à considérer aussi des systèmes de fonctions de transition à valeurs dans le groupe multiplicatif $\mathbf{C}^*$ des nombres complexes $\neq 0$, les fonctions étant différentiables, et éventuellement holomorphes si V est à structure complexe.

Soit F une fonction (différentiable, comme toujours) à valeurs dans $\mathbf{C}^*$, sur un ouvert simplement connexe U dans une variété V. Alors $\omega = dF/F$ est une forme fermé de degré 1 sur U et peut donc s'écrire $\omega = df$, f étant une fonction dans U ; on aura $d(e^{-f}F) = 0$, de sorte qu'en adjoutant à f une constante convenable on pourra faire en sorte que $F = e^f$; on écrira alors $f = \log(F)$, cette fonction n'étant définie bien entendu qu'à une constante additive près de la forme $2\pi in$ avec n entier. Au lieu de dF/F, on peut donc écrire $d\log(F)$.

Soit maintenant $(F_{\lambda\mu})$ un système de fonctions de transition à valeurs dans $\mathbf{C}^*$, pour un recouvrement simple (U_λ) d'une variété V ; soit N le nerf de (U_λ). Posons, pour $\{\lambda, \mu\} \in N$:

$$\omega_{\lambda\mu} = \frac{1}{2\pi i} d\log(F_{\lambda\mu})$$

De même qu'au §5.2, on pourra choisir, pour chaque λ, une forme η_λ de degré 1, définie dans U_λ, de sorte qu'on ait $\omega_{\lambda\mu} = \eta_\mu - \eta_\lambda$ dans $U_{\lambda\mu}$; il suffira pour cela, par exemple, de prendre $\eta_\lambda = \sum_\rho p_\rho \omega_{\lambda\rho}$, la sommation étant étendue aux ρ tels que $\{\rho, \lambda\} \in N$, et $\omega_{\lambda\rho}$ étant pris par exemple égal à 0 en dehors de $U_{\lambda\mu}$. Tout système de formes (η_λ), définies respectivement dans les U_λ, et satisfaisant aux relations $\eta_\mu - \eta_\lambda = \omega_{\lambda\mu}$ dans $U_{\lambda\mu}$, s'appellera une *connexion* pour le système de fonctions de transition $(F_{\lambda\mu})$; toute autre connexion, pour le même système, sera évidemment de la forme $(\eta_\lambda + \beta)$, où β est une forme quelconque de degré 1 sur V. Si (η_λ) est une connexion pour $(F_{\lambda\mu})$, $d\eta_\lambda$ coïncidera avec $d\eta_\mu$ dans $U_{\lambda\mu}$ quesl que soient λ, μ, et il y aura donc une forme α de degré 2 sur V qui coïncide avec $d\eta_\lambda$ dans U_λ quel que soit λ ; cette forme s'appelle la *forme de courbure* de la connexion (η_λ) ; il résulte de ce qui précède que la classe de cohomologie $\mathbf{a} = Cl(\alpha)$ est déterminé d'une manière unique par le système $(F_{\lambda\mu})$.

Avec les mêmes notations que ci-dessus, soit $f_{\lambda\mu}$, pour chaque couple (λ, μ) tel
89 que $\{\lambda, \mu\} \in N$, l'une des fonctions $(2\pi i)^{-1}\log(F_{\lambda\mu})$ dans $U_{\lambda\mu}$; il est clair qu'on peut faire ce choix de façon que $f_{\lambda\mu}$ soit alternée par rapport à λ, μ. Si on exprime que $(F_{\lambda\mu})$ est un système de fonctions de transition, on obtient des relations

$$f_{\mu\nu} - f_{\lambda\nu} + f_{\lambda\mu} = a_{\lambda\mu\nu} \tag{5.2}$$

où les seconds membres sont des constantes entières ; $(a_{\lambda\mu\nu})$ est donc un cocycle à valeurs entières. Si (η_λ) est, comme plus haut, une connexion pour le système $(F_{\lambda\mu})$, on aura $df_{\lambda\mu} = \eta_\mu - \eta_\lambda$ dans $U_{\lambda\mu}$ pour $\{\lambda, \mu\} \in N$; si donc α est la forme de courbure de la connexion (η_λ), il résulte du §5.2 que $\mathbf{a} = Cl(\alpha)$ est la classe de cohomologie correspondant à celle du cocycle $(a_{\lambda\mu\nu})$ et que c'est donc une classe entière.

Réciproquement, soit α une forme fermée de degré 2, de classe entière sur V ; d'après le §5.2, il y aura un cocycle $(a_{\lambda\mu\nu})$ de N à valeurs entières, dont la classe correspondra à celle de α. Comme au §5.2, on pourra donc construire des fonctions $f_{\lambda\mu}$, définies respectivement dans les $U_{\lambda\mu}$, satisfaisant à (5.2), puis des formes η_λ, définies respectivement dans les U_λ, telles que $df_{\lambda\mu} = \eta_\mu - \eta_\lambda$; la forme α' qui coïncide avec $d\eta_\lambda$ dans U_λ quel que soit λ sera alors homologue à α et pourra donc s'écrire $\alpha + d\beta$, de sorte qu'en ramplaçant η_λ par $\eta_\lambda - \beta$ pour chaque λ, on pourra faire en sorte que $d\eta_\lambda = \alpha$. Dans ces conditions, il est clair que les fonctions $F_{\lambda\mu} = \mathbf{e}(f_{\lambda\mu})$ forment un système de fonctions de transition à valeurs dans $\mathbf{C}^*$, pour le recouvrement (U_λ), que η_λ est une connexion pour ce système, et que α est la forme de courbure de celle-ci. On notera que, pour un cocycle donné $(a_{\lambda\mu\nu})$. on peut prendre α, les $f_{\lambda\mu}$ et les η_λ à valeurs réelles, et que $(F_{\lambda\mu})$ est alors à valeurs dans le groupe multiplicatif $\mathbf{E} = \mathbf{e}(\mathbf{R})$ des nombres complexes de valeur absolu 1.

Enfin soit (X_ι) un recouvrement ouvert de V, simple ou non ; soit $(F_{\iota\varkappa})$ un système de fonctions de transition pour (X_ι), à valeurs dans $\mathbf{C}^*$. S'il existe un système de formes (η_ι), définies respectivement dans les X_ι, telles que l'on ait

$$\eta_\varkappa - \eta_\iota = \frac{1}{2\pi i} F_{\iota\varkappa}^{-1} dF_{\iota\varkappa} \tag{5.3}$$

dans $X_{\iota\varkappa}$ chaque fois que $X_{\iota\varkappa}$ n'est pas vide, on dira encore que c'est là une connexion attachée à $(F_{\iota\varkappa})$ et que la forme α qui, dans ces conditions, coïncide avec $d\eta_\iota$ dans X_ι quel que soit ι est la forme de courbure de cette connexion. Il y aura un recouvrement simple (U_λ) plus fin que (X_ι), donc tel que $U_\lambda \subset X_{\varphi(\lambda)}$ quel que soit λ, pour φ choisi convenablement ; alors $(F_{\varphi(\lambda)\varphi(\mu)})$ sera un système 90
de fonctions de transition pour (U_λ), $(\eta_{\varphi(\lambda)})$ sera une connexion pour ce système, et α sera la forme de courbure de celle-ci ; il résulte donc de ce qui précède que α sera encore de classe entière.

Nous avons ainsi, entre autres résultats, démontré le lemme suivant :

Lemme 5.2. *Pour qu'une forme fermée de degré 2 sur une variété V soit de classe entière, il faut et il suffit que ce soit la forme de courbure d'une connexion attaché à un système de fonctions de transition à valeurs dans $\mathbf{C}^*$.* Lemme 2

On peut facilement tirer de là, pour les classes d'homologie de degré 2 et les applications différentiables, un résultat élémentaire bien connu en théorie de l'homologie, d'après lequel l'image transposée, par une application continue, d'une classe entière est une classe entière. Soit en effet φ une application (différentiable, comme toujours) d'une variété V dans une variété W ; soit α une forme fermée de degré 2, de classe entière sur W. Il y aura un recouvrement ouvert (X_ι) de W, un système de fonctions de transition $(F_{\iota\varkappa})$ à valeurs dans $\mathbf{C}^*$, relatif à ce recouvrement, et une connexion (η_ι) pour ce système, tels que α soit la forme de courbure de la connexion (η_ι). Mais alors les $\varphi^{-1}(X_\iota)$ forment un recouvrement ouvert de V ; les $(F_{\iota\varkappa} \circ \varphi)$ forment un système de fonctions de transition pour celui-ci ; et $\varphi^*\alpha$ est la forme de courbure de la connexion $(\varphi^*\eta_\iota)$ pour ce système.

5.4. Le cas qui nous intéresse est celui des variétés à structure complexe. Sur une telle variété V, considérons une forme réelle fermée α, de bidegré $(1,1)$; d'après le cor. 4.12, tout point de V a un voisinage dans lequel on peut mettre α sous la forme $\alpha = (2\pi i)^{-1} d'd''\Phi$, où Φ est une fonction à valeurs réelles ; autrement dit, il y aura un recouvrement ouvert (X_ι) de V tel que, dans chacun des X_ι, α puisse s'écrire sous cette forme. Soit (U_λ) un recouvrement simple de V, de nerf N, plus fin que (X_ι) ; il y aura des fonctions Φ_λ à valeurs réelles, définies respectivement dans les U_λ, telles qu'on ait $\alpha = (2\pi i)^{-1} d'd''\Phi_\lambda$ dans U_λ. On peut alors appliquer n° 4 à la fonction $\Phi_\mu - \Phi_\lambda$, dans $U_{\lambda\mu}$, le cor. 2.4, qui montre qu'elle est, dans $U_{\lambda\mu}$, la partie réelle d'une fonction holomorphe bien déterminé à une constante additive purement imaginaire près. Il revient au même de dire qu'on peut, dans chaque $U_{\lambda\mu}$ non vide, déterminer une fonction holomorphe $f_{\lambda\mu}$ de telle sorte que l'on ait :

$$\Phi_\mu - \Phi_\lambda = -2\pi i(f_{\lambda\mu} - \bar{f}_{\lambda\mu}); \tag{5.4}$$

les $f_{\lambda\mu}$ sont bien déterminées à des constantes réelles près, ce qui implique que $f_{\mu\lambda}$
91 ne peut différer de $-f_{\lambda\mu}$ que par une telle constante ; par un choix convenable des $f_{\lambda\mu}$, on peut donc faire en sorte que l'on ait toujours $f_{\mu\lambda} = -f_{\lambda\mu}$.

Posons $\eta_\lambda = -(2\pi i)^{-1} d'\Phi_\lambda$; η_λ sera une forme de bidegré $(1,0)$ dans U_λ ; on aura $\alpha = d\eta_\lambda$ dans U_λ, et $\eta_\mu - \eta_\lambda = df_{\lambda\mu}$ dans $U_{\lambda\mu}$ puisqu'on a $d'' f_{\lambda\mu} = 0$ et $d' \bar{f}_{\lambda\mu} = 0$. Si on pose, pour $\{\lambda, \mu, \nu\} \in N$:

$$a_{\lambda\mu\nu} = f_{\mu\nu} - f_{\lambda\nu} + f_{\lambda\mu},$$

$a_{\lambda\mu\nu}$ sera une fonction holomorphe dans $U_{\lambda\mu\nu}$, à valeurs réelles en vertu de (5.4), donc constante (d'après le cor. 2.4), et $(a_{\lambda\mu\nu})$ sera un cocycle de N à valeurs réelles, correspondant, d'après ce qu'on vient de voir, à la forme α. Tout autre cocycle réel $(a'_{\lambda\mu\nu})$ de même classe ne différera de celui-là que par un cobord, c'est-à-dire par un cocycle de la forme $b_{\mu\nu} - b_{\lambda\nu} + b_{\lambda\mu}$, les $b_{\lambda\mu}$ étant réels ; en remplaçant les $f_{\lambda\mu}$ par les fonctions $f'_{\lambda\mu} = f_{\lambda\mu} + b_{\lambda\mu}$ qui satisfont aussi aux conditions qu'on a imposées aux $f_{\lambda\mu}$, le cocycle $(a_{\lambda\mu\nu})$ sera remplacé par $(a'_{\lambda\mu\nu})$. Autrement dit, on peut, par un choix convenable de $f_{\lambda\mu}$, faire en sorte que $(a_{\lambda\mu\nu})$ soit l'un quelconque des cocycles dont la classe correspond à celle de α.

Supposons en particulier que α soit de classe entière ; alors, par un choix convenable des $f_{\lambda\mu}$ satisfaisant à (5.4), on peut faire en sorte que les $a_{\lambda\mu\nu}$ soient entiers. Mais alors les fonctions holomorphes $F_{\lambda\mu} = \mathbf{e}(f_{\lambda\mu})$ forment un système de fonctions de transition à valeurs dans $\mathbf{C}^*$. En tenant compte du lemme 5.2, on a donc démontré ce qui suit :

Prop. 1 **Proposition 5.3.** *Pour qu'une forme fermée α de bidegré $(1,1)$, sur une variété complexe V, soit de classe entière. il faut et il suffit que ce soit la forme de courbure d'une connexion attachée à un système de fonctions de transition holomorphes à valeurs dans $\mathbf{C}^*$.*

Sur une variété kählérienne compacte, on a un résultat plus précis :

Th. 1 **Théorème 5.4.** *Soit $\mathbf{a}$ une classe de cohomologie de degré 2 sur une variété compacte de type kählérien. Pour que $\mathbf{a}$ soit une classe entière de bidegré $(1,1)$, il faut et il suffit que ce soit la classe de courbure d'un système $(F_{\iota\varkappa})$ de fonctions de transition holomorphes à valeurs dans $\mathbf{C}^*$. De plus, s'il en est ainsi, toute forme α de bidegré $(1,1)$ et de classe $\mathbf{a}$ est la forme de courbure d'une connexion (η_ι) de bidegré $(1,0)$ attachée au système $(F_{\iota\varkappa})$.*

La nécessité de la condition résulte de la prop. 5.3. Réciproquement, soit $(F_{\iota\varkappa})$
92 un système de fonctions de transition holomorphes, à valeurs dans $\mathbf{C}^*$, attaché à un recouvrement ouvert (X_ι) d'une variété kählérienne compacte V ; supposons que ce système possède une connexion (η_ι), c'est-à-dire que les η_ι satuisfassent aux relations (5.3) dans les $X_{\iota\varkappa}$. Les seconds membres de ces relations étant de bidegré $(1,0)$, elles restent satisfaites si on remplace, pour chaque ι, η_ι par $P_{1,0}(\eta_\iota)$; on peut donc supposer que la connexion (η_ι) est de bidegré $(1,0)$, c'est-à-dire formée de formes de ce bidegré. Soit α sa forme de courbure ; on aura alors $P_{0,2}(\alpha) = 0$, de sorte qu'on pourra écrire $\alpha = \alpha' + \alpha''$, où α', α'' sont de bidegré $(2,0)$ et $(1,1)$ respectivement. D'après le th. 4.6, les formes $H\alpha', H\alpha''$ ont ces mêmes bidegrés.

Mais, comme la classe $\mathbf{a}$ de α est entière et a fortiori réelle en vertu du lemme 5.2, la forme $H\alpha = H\alpha' + H\alpha''$, qui est la forme harmonique de classe $\mathbf{a}$, est réelle ; ses composantes bihomogènes de bidegrés $(2,0)$ et $(0,2)$ sont donc imaginaires conjuguées l'une de l'autre ; comme l'une est $H\alpha'$ et l'autre 0, on a donc $H\alpha' = 0$, de sorte que $H\alpha$ est de bidegré $(1,1)$. On a donc démontré que $\mathbf{a}$ est de bidegré $(1,1)$. Soit maintenant α_1 une forme de bidegré $(1,1)$ et de classe $\mathbf{a}$; on va montrer que c'est la forme de courbure d'une connexion $(\eta_\iota + \beta)$ attachée à $(F_{\iota\varkappa})$ avec β de bidegré $(1,0)$, ou, ce qui revient au même, qu'on peut trouver une forme β de bidegré $(1,0)$ sur V, telle que $d\beta = \alpha_1 - \alpha$. Or, comme $\alpha_1 - \alpha$ est homologue à 0, on peut l'écrire sous la $d(\beta' + \beta'')$, où β', β'' sont de bidegré $(1,0)$ et $(0,1)$, respectivement ; et, si on écrit que la composante de bidegré $(0,2)$ de cette forme est 0, on obtient $d''\beta'' = 0$. Dans la relation $d\beta'' = d\Delta G\beta''$, qui se déduit immédiatement de $\beta'' = H\beta'' + \delta F\beta''$, remplaçons Δ par $2d''\delta'' + 2\delta''d''$ (th. 2.11) ; puis observons que $d''G\beta'' = 0$ puisque $d''\beta'' = 0$ et que G est permutable avec d'' (th. 4.6) ; et enfin remplaçons dd'' par $-dd'$. Il vient $d\beta'' = d\gamma$, avec $\gamma = -2d'\delta''G\beta''$. Mais, en vertu des propriétés d'homogénéité des opérateurs d', δ'', G, la forme γ est de bidegré $(1,0)$. En prenant $\beta = \beta' + \gamma$, on satisfera aux conditions qu'on s'est imposées.

Corollaire 5.5. *Soit (U_λ) un recouvrement simple de nerf N d'une variété compacte V de type kählérien ; soit $(F_{\lambda\mu})$ un système de fonctions de transition holomorphes, à valeurs dans $\mathbf{C}^*$, attaché à ce recouvrement. On suppose que la classe de courbure du système $(F_{\lambda\mu})$ est 0. Alors il y a un système $(e_{\lambda\mu})$ de fonctions de transition constantes à valeurs dans $\mathbf{E}$ (*groupe multiplicatif des nombres complexes de valeurs absolue 1*), et un système (φ_λ) de fonctions holomorphes partout $\neq 0$, définies respectivement dans les U_λ, tels que l'on ait $F_{\lambda\mu} = e_{\lambda\mu}\varphi_\lambda\varphi_\mu^{-1}$ dans $U_{\lambda\mu}$ chaque fois que $\{\lambda,\mu\} \in N$. De plus, les φ_λ sont déterminés par là d'une manière unique à des facteurs constants près.* Cor.

Appliquons le th. 5.4 ; il montre qu'il y a une connexion (η_λ) attachée à $(F_{\lambda\varkappa})$ et telle que les η_λ soient fermées et de bidegré $(1,0)$; on pourra donc les écrire sous 93
la forme $\eta_\lambda = d\psi_\lambda$, et les ψ_λ seront des fonctions holomorphes. Par définition d'une connexion, cela veut dire que les fonctions

$$c_{\lambda\mu} = F_{\lambda\mu}\mathbf{e}(\psi_\lambda - \psi_\mu)$$

sont constantes ; il est clair de plus qu'elles forment un système de fonctions de transition à valeurs dans $\mathbf{C}^*$; ce système, et le système de fonctions $(\mathbf{e}(-\psi_\lambda))$, satisfont déjà à toutes les conditions de l'énoncé, sauf à celle qui exige que le premier soit à valeurs dans $\mathbf{E}$; on va les modifier de manière à satisfaire aussi à cette condition. Pour cela, observons que $(\log|c_{\lambda\mu}|)$ est un système de fonctions de transition à valeurs dans le groupe additif $\mathbf{R}$; autrement dit, c'est un cocycle réel de N ; soit $\mathbf{a}$ sa classe ; d'après les résultats du §5.2, si α est une forme réelle de classe $\mathbf{a}$, il y aura des fonctions g_λ à valeurs réelles, respectivement définies dans les U_λ, telles que $dg_\lambda = \alpha$ dans U_λ et $g_\lambda - g_\mu = \log|c_{\lambda\mu}|$ dans $U_{\lambda\mu}$. Supposons V munie d'une structure kählérienne, et prenons pour α la forme harmonique de classe $\mathbf{a}$; on aura alors $d'\alpha = 0$, donc $d'd''g_\lambda = 0$ dans U_λ ; d'après le cor. 2.4, g_λ sera donc, dans U_λ, la partie réelle d'une fonction holomorphe θ_λ, et $\theta_\mu - \theta_\lambda$ sera une constante dans $U_{\lambda\mu}$; la partie réelle de celle-ci étant $\log|c_{\lambda\mu}|$, on pourra donc écrire, dans $U_{\lambda\mu}$:

$$\theta_\mu - \theta_\lambda = \log|c_{\lambda\mu}| + 2\pi i a_{\lambda\mu},$$

avec $a_{\lambda\mu}$ réels. Pour satisfaire aux conditions du corollaire, il suffira alors de poser:

$$e_{\lambda\mu} = \mathbf{e}(-a_{\lambda\mu})c_{\lambda\mu}|c_{\lambda\mu}|^{-1} \quad , \quad \varphi_\lambda = \mathbf{e}(-\psi_\lambda - \frac{1}{2\pi i}\theta_\lambda).$$

Quant à l'unicité des φ_λ, tout revient à montrer que, si $F_{\lambda\mu} = 1$ chaque fois que $\{\lambda,\mu\} \in N$, les φ_λ sont constants. Or, s'il en est ainsi, on a $|\varphi_\lambda| = |\varphi_\mu|$ dans $U_{\lambda\mu}$

pour $\{\lambda, \mu\} \in N$; il y a donc une fonction Φ sur V qui coïncide avec $\log|\varphi_\lambda|^2$ dans U_λ quel que soit λ ; d'après le cor. 2.4 et le cor. 2.10, on a donc $\Delta\Phi = 0$, et par suite $d\Phi = 0$. Sur U_λ, $\log|\varphi_\lambda|^2$ est donc constante ; d'après le cor. 2.4, cela implique que les φ_λ elles-mêmes sont constantes.

nº 5 94 5.5. Il est souvent commode, lorsqu'on applique le lemme 5.2, de se servir en même temps du résultat suivant :

Prop. 2 **Proposition 5.6.** *Soit $(F_{\iota\varkappa})$ un système de fonctions de transition holomorphes, à valeurs dans $\mathbf{C}^*$, attaché à un recouvrement ouvert (X_ι) d'une variété à structure complexe. Soit (Φ_ι) un système de fonctions à valeurs réelles, définies respectivement dans les X_ι, tel que l'on ait dans $X_{\iota\varkappa}$, chaque fois que $X_{\iota\varkappa}$ n'est pas vide:*

$$\Phi_\varkappa - \Phi_\iota = \log|F_{\iota\varkappa}|^2.$$

Alors le système de formes (η_ι), avec $\eta_\iota = (2\pi i)^{-1} d'\Phi_\iota$, est une connexion pour $(F_{\iota\varkappa})$, et sa forme de courbure est donnée par $\alpha = -(2\pi i)^{-1} d'd''\Phi_\iota$ dans X_ι quel que soit ι.

Il suffit, pour le voir, d'écrire la relation ci-dessus sous la forme

$$\Phi_\varkappa - \Phi_\iota = \log F_{\iota\varkappa} + \log \bar{F}_{\iota\varkappa}$$

et d'appliquer d' aux deux membres.

Cor. 1 **Corollaire 5.7.** *Si Ω est la forme de bidegré $(1,1)$ sur l'espace projectif $\mathbf{P}^n$ qui a été définie au §3.5, $(2\pi)^{-1}\Omega$ est une forme de classe entière.*

En effet, avec les notations du §3.5, les ouverts U_ν forment un recouvrement de $\mathbf{P}^n$; les fonctions $F_{\mu\nu} = x_\nu^{-1} x_\mu$ forment un système de fonctions de transition pour ce recouvrement ; alors, en prenant

$$\Phi_\nu = \log\left(\sum_{\mu=0}^{n} |x_\nu^{-1} x_\mu|^2\right),$$

la prop. 5.6 s'applique, et on en conclut que $(2\pi)^{-1}\Omega$ est la forme de courbure d'une connexion du système $(F_{\mu\nu})$.

Cor. 2 **Corollaire 5.8.** *Toute variété compacte à structure complexe admettant une application holomorphe et partout localement birégulière dans un espace projectif complexe est une variété de* HODGE.

En effet, si V est une telle variété, et φ l'application en question, la forme $(2\pi)^{-1}\varphi^*\Omega$, où Ω est définie comme au corollaire 5.7, est de classe entière sur V ; comme on a montré au §3 que c'est la forme fondamentale d'une structure kählérienne de V, le résultat s'ensuit. Rappelons qu'on l'avait déjà obtenu autrement au §4.8 ; mais ici on obtient en même temps la construction explicite d'une forme fondamentale de classe entière.

Cor. 3 **Corollaire 5.9.** *Soit V une variété à structure complexe. Il y a sur V une classe de*
95 *cohomologie entière* **a** *de degré 2, telle que, si Ω est l'une quelconque des formes de bidegré $(1,1)$ qu'on peut définir sur V par application du cor. 2.5, la forme $(2\pi)^{-1}\Omega$ soit de classe* **a**.

On notera qu'il existe toujours de telles formes, car V est orientable (2.1), de sorte que, si n est sa dimension complexe, on peut toujours, par exemple au moyen d'une partition de l'unité, y construire des formes de degré $2n$, réelles et partout > 0. Soit (X_ι) un recouvrement de V par des ouverts X_ι dont chacun admette une carte sur un ouvert de $\mathbf{C}^n$ au moyen de coordonnées complexes locales $(z_{\iota 1}, \dots, z_{\iota n})$. Dans $X_{\iota\varkappa}$, on pourra écrire

$$dz_{\varkappa 1} \wedge \cdots \wedge dz_{\varkappa n} = J_{\iota\varkappa} dz_{\iota 1} \wedge \cdots \wedge dz_{\iota n},$$

où $J_{\iota\varkappa}$ est une fonction holomorphe partout $\neq 0$, à savoir le jacobien des $z_{\varkappa i}$ par rapport aux $z_{\iota i}$. Il est immédiat que $(J_{\iota\varkappa})$ est un système de fonctions de transition à valeurs dans $\mathbf{C}^*$. Dans ces conditions, le corollaire résulte immédiatement de l'application de la prop. 5.6 à ce système.

La classe $\mathbf{a}$ définie sur une variété complexe V au moyen du corollaire ci-dessus est connue sous le nom de *classe de* CHERN de degré 2 de la variété V. Si V est l'espace projectif $\mathbf{P}^n$, et qu'on désigne cette fois par Ω_0 la forme définie au §3.5, un calcul facile montre que la classe de CHERN est celle de la forme $-(2\pi)^{-1}(n+1)\Omega_0$.

Corollaire 5.10. *Soient V une variété analytique complexe possédant une structure de* BERGMANN *(§3.9), et G un groupe d'automorphismes analytiques complexes de V satisfaisant à la condition (D_0) du §3.9. Alors, si V/G est compacte, c'est une variété de* HODGE. Cor. 4

Il résulte en effet du cor. 3.12 et du cor. 5.9 ci-dessus que la classe de la forme fondamentale définie sur V/G par passage au quotient à partir de la structure de BERGMANN sur V n'est autre que la classe de CHERN de V/G, au facteur $(2\pi)^{-1}$ près ; à ce facteur près, la forme fondamentale en question est donc bien de classe entière.

5.6. Soit D un diviseur sur une variété complexe V. Par définition d'un diviseur (v. n° 6
§A.5), et d'après les résultats rappelés plus haut au §5.2, il existe un recouvrement simple (U_λ) de V tel que, dans chaque U_λ, on puisse écrire $D = \mathrm{div}(\varphi_\lambda)$, φ_λ étant une fonction méromorphe dans U_λ. Alors φ_λ et φ_μ induisent sur $U_{\lambda\mu}$ des fonctions ayant même diviseur, quand $U_{\lambda\mu}$ n'est pas vide, de sorte que $F_{\lambda\mu} = \varphi_\lambda^{-1}\varphi_\mu$ est holomorphe et partout $\neq 0$ dans $U_{\lambda\mu}$; il est immédiat dans ces conditions que $(F_{\lambda\mu})$ est un système de fonctions de transition holomorphes à valeurs dans $\mathbf{C}^*$.
Si on remplace les φ_λ par d'autres fonctions φ'_λ satisfaisant encore à $D = \mathrm{div}(\varphi'_\lambda)$ 96
dans U_λ, on aura $\varphi'_\lambda = \varphi_\lambda g_\lambda$, les g_λ étant des fonctions holomorphes partout $\neq 0$ dans les U_λ ; le système des $F_{\lambda\mu}$ sera alors remplacé par le système des fonctions $F'_{\lambda\mu} = g_\lambda^{-1} F_{\lambda\mu} g_\mu$. Si (η_λ) est une connexion pour le système $(F_{\lambda\mu})$, on définira une connexion (η'_λ) pour $(F'_{\lambda\mu})$ en posant

$$\eta'_\lambda = \eta_\lambda + (2\pi i)^{-1} d\log(g_\lambda).$$

Celle-ci a même forme de courbure que la précédente ; donc les systèmes $(F_{\lambda\mu})$, $(F'_{\lambda\mu})$ ont même classe de courbure. Celle-ci ne change pas non plus, comme on a vu au §5.3, si on remplace (U_λ) par un recouvrement plus fin. Si on observe de plus qu'il y a toujours un recouvrement simple plus fin que deux recouvrements donnés, on en conclut que la classe de courbure du système $(F_{\lambda\mu})$ ne dépend, ni du choix des φ_λ, ni du choix du recouvrement (U_λ), mais seulement du diviseur D ; on la notera $\mathbf{a}(D)$; il résulte du lemme 5.2 que c'est une classe entière, et il résulte du th. 5.4 que, si V est compacte de type kählérien, c'est une classe de bidegré $(1,1)$.

Si par exemple on prend pour D l'hyperplan $\sum_{\nu=0}^n a_\nu x_\nu = 0$ dans l'espace projectif $\mathbf{P}^n$, on pourra l'écrire, dans chaque ensemble U_μ du recouvrement de $\mathbf{P}^n$ défini au §3.5, sous la forme $D = \mathrm{div}(\sum_\nu a_\nu x_\nu / x_\mu)$; il détermine donc le système de fonctions de transition $F_{\lambda\mu} = x_\mu^{-1} x_\lambda$, qui est celui même qu'on a considéré dans la démonstration du cor. 5.7 ci-dessus ; la classe $\mathbf{a}(D)$ est donc la classe de la forme $(2\pi)^{-1}\Omega$ qui apparaît dans ce corollaire.

n° 7 5.7. Supposons désormais la variété V *connexe*, et désignons par $\tilde{V}$ son revêtement universel, muni de la structire analytique complexe image réciproque de celle de V par la projection canonique π de $\tilde{V}$ sur V (§3.3). Soit G le groupe fondamental de V, considéré comme groupe d'automorphisme de $\tilde{V}$, de sorte que $V = \tilde{V}/G$; on notera $\sigma\tilde{u}$ le transformé par $\sigma \in G$ d'un point $\tilde{u}$ de $\tilde{V}$. Si $\tilde{u}$ est un point de $\tilde{V}$, et $u = \pi(\tilde{u})$ sa projection sur V, π détermine un isomorphisme d'un voisinage $\tilde{U}$ de $\tilde{u}$ sur son image U dans V, au sens des structures complexes ; par suite (avec les notations de l'Appendice A.2) π détermine des isomorphismes de l'anneau $A_{\tilde{u}}(\tilde{V})$, du corps $K_{\tilde{u}}(\tilde{V})$, et du groupe des germes de diviseur en $\tilde{u}$ sur $\tilde{V}$ sur l'anneau $A_u(V)$, le corps $K_u(V)$, et le groupe des germes de diviseur en u sur V, respectivement ; le dernier de ces isomorphismes sera encore appelé *projection.*

Une fonction méromorphe $\tilde{\varphi}$ non partout nulle sur $\tilde{V}$ sera dite *multiplicative*[2] si,
97 quels que soient les points $\tilde{u}, \tilde{u}'$ sur $\tilde{V}$ ayant même projection u sur V, les germes déterminés en $\tilde{u}$ et en $\tilde{u}'$ par $\mathrm{div}(\tilde{\varphi})$ ont même projection sur V ; cette projection est donc un germe de diviseur D_u en u sur V qui, pour une fonction multiplicative donnée $\tilde{\varphi}$, ne dépend que de u ; il est immédiat, en vertu des isomorphismes locaux déterminés par π sur les ouverts suffisamment petits dans $\tilde{V}$, que l'application $u \mapsto D_u$ détermine un diviseur sur V ; celui-ci s'appellera *le diviseur de* $\tilde{\varphi}$ *relativement à* V, ou parfois, par abus de langage et quand aucune confusion n'est possible, le diviseur de $\tilde{\varphi}$, et se notera $\mathrm{div}_V(\tilde{\varphi})$ ou parfois $\mathrm{div}(\tilde{\varphi})$.

Si f est une fonction méromorphe sur $\tilde{V}$, et si $\sigma \in G$, on écrirera fréquemment f^σ au lieu de $f \circ \sigma$; c'est la fonction méromorphe définie par $f^\sigma(\tilde{u}) = f(\sigma\tilde{u})$ (cf. Appendice A.7). Pour que la fonction méromorphe $\tilde{\varphi}$ non partout nulle sur $\tilde{V}$ soit multiplicative, il faut et il suffit que $\tilde{\varphi}^\sigma$ ait même diviseur que $\tilde{\varphi}$ quel que soit $\sigma \in G$, ou autrement dit que le diviseur de $\tilde{\varphi}$ sur $\tilde{V}$ soit invariant par G ; il résulte alors de ce qui précède que ce diviseur n'est autre que $\pi^{-1}(\mathrm{div}_V(\tilde{\varphi}))$. La même condition peut encore s'exprimer en disant que la fonction $f_\sigma = \tilde{\varphi}^\sigma\tilde{\varphi}^{-1}$ est holomorphe et partout $\neq 0$ sur $\tilde{V}$ quel que soit $\sigma \in G$; il est immédiat qu'on a alors $f_{\sigma\tau} = (f_\sigma)^\tau f_\tau$ quels que soient σ, τ dans G. En particulier, si les f_σ sont des constantes, l'application $\sigma \mapsto f_\sigma$ est une représentation de G dans $\mathbf{C}^*$; on dit dans ce cas que $\tilde{\varphi}$ est *à multiplicateurs constants*, les f_σ étant ses « multiplicateurs ».

Si en particulier $\tilde{\varphi}$ est une fonction multiplicative holomorphe à multiplicateurs constants, partout $\neq 0$ sur $\tilde{V}$, $(2\pi i)^{-1} d\log\tilde{\varphi}$ est une forme holomorphe invariante par G ; c'est donc l'image transposée $\pi^*\zeta$ par π d'une forme fermée ζ holomorphe sur V. Réciproquement, si ζ est une forme fermée de degré 1, holomorphe sur V, $\pi^*\zeta$ sera (puisque $\tilde{V}$ est simplement connexe ; cf. §5.2 ci-dessus) la différentielle d'une fonction holomorphe $\tilde{f}$ sur $\tilde{V}$, qui prend le nom d'*intégrale de première espèce* (relative à V, ou, par abus de langage, sur V) lorsque V est compacte de type kählérien. La fonction $\mathbf{e}(f)$ est alors multiplicative à multiplicateurs constants, holomorphe et partout $\neq 0$ sur $\tilde{V}$. Une fonction méromorphe multiplicative θ sur $\tilde{V}$, telle que $\theta^\sigma\theta^{-1}$ soit, pour tout $\sigma \in G$, multiplicative à multiplicateurs constants, s'appelle une *fonction thêta* sur $\tilde{V}$ (relative à V, ou au groupe G) ; ce nom est parfois réservé aux fonctions holomorphes ayant ces propriétés.

n° 8 5.8.

Prop. 3 **Proposition 5.11.** *Soient V une variété connexe à structure complexe, $\tilde{V}$ son revêtement universel, θ uns fonction thêta sur $\tilde{V}$, on suppose que l'espace vectoriel sur $\mathbf{C}$ engendré par les formes $d\log(\theta^\sigma\theta^{-1})$, quand σ parcourt le groupe fondamental G de V, est de dimension finie sur $\mathbf{C}$. Alors, si $D = \mathrm{div}_V(\theta)$, la classe $\mathbf{a}(D)$ est dans*

2. On réserve parfois ce nom aux fonctions à multiplicateurs constants.

le sous-anneau de $\mathscr{H}(V)$ engendré par $\mathscr{H}^1(V)$; si de plus θ est à multiplicateurs constants, on a $\mathbf{a}(D) = 0$.

Pour $\sigma \in G$, posons $F_\sigma = \theta^\sigma\theta^{-1}$; par l'hypothèse, on a : 98

$$\frac{1}{2\pi i} d \log F_\sigma = \pi^* \zeta_\sigma, \tag{5.5}$$

ζ_σ étant une forme fermée holomorphe sur V ; et les ζ_σ peuvent toutes s'écrire comme combinaisons linéaires à coefficients constants d'un nombre fini d'entre elles $\zeta_1, \dots, \zeta_d$, qu'on peut choisir linéairement indépendantes. Soit (U_λ) un recouvrement simple de V. Pour chaque λ, $\pi^{-1}(U_\lambda)$ est un revêtement de U_λ ; U_λ étant simplement connexe, π induit donc sur chaque composante connexe de $\pi^{-1}(U_\lambda)$ un isomorphisme de cette composante sur U_λ. Choisissons, our chaque λ, une composante $\tilde{U}_\lambda$ de $\pi^{-1}(U_\lambda)$; soit φ_λ la fonction méromorphe dans U_λ qui se déduit de la fonction induite par θ sur $\tilde{U}_\lambda$ au moyen de l'isomorphisme $\tilde{U}_\lambda$ sur U_λ induit par π ; autrement dit, on a, dans $\tilde{U}_\lambda$, $\theta = \varphi_\lambda \circ \pi$. On a alors $D = \operatorname{div}(\varphi_\lambda)$ dans U_λ, de sorte que les fonctions $F_{\lambda\mu} = \varphi_\lambda^{-1}\varphi_\mu$ forment, au sens du §5.6, un système de fonctions de transition holomorphes, à valeurs dans $\mathbf{C}^*$, attaché au diviseur D. Chaque fois que $U_{\lambda\mu}$ n'est pas vide, il y aura une composante connexe $\tilde{U}$ de $\pi^{-1}(U_{\lambda\mu})$ qui sera contenue dans $\tilde{U}_\mu$, et un élément σ de G tel que $\tilde{U}$ soit contenue dans $\sigma\tilde{U}_\lambda$. Pour $\tilde{u} \in \sigma^{-1}\tilde{U}$ et $u = \pi(\tilde{u})$, on aura $\theta(\tilde{u}) = \varphi_\lambda(u), \theta(\sigma\tilde{u}) = \varphi_\mu(u)$ et $\theta(\sigma\tilde{u}) = F_\sigma(\tilde{u})\theta(\tilde{u})$, donc $F_{\lambda\mu}(u) = F_\sigma(\tilde{u})$, d'où, d'après (5.5) et d'après ce qu'on a vu au sujet des ζ_σ :

$$\frac{1}{2\pi i} d \log F_{\lambda\mu} = \sum_{i=1}^{d} c_{\lambda\mu i}\zeta_i,$$

où les $c_{\lambda\mu i}$ sont des constantes. Comme $(F_{\lambda\mu})$ est un système de fonctions de transition à valeurs dans $\mathbf{C}^*$, on conclut aussitôt de là que, pour chaque i, $(c_{\lambda\mu i})$ est un tel système, à valeurs dans le groupe additif $\mathbf{C}$; autrement dit, c'est un cocycle du nerf de (U_λ). D'après ce qu'on a vu au §5.2, on peut donc, pour chaque i, déterminer un système $(f_{\lambda i})$ de fonctions, respectivement définies dans les U_λ, telles que l'on ait $c_{\lambda\mu i} = f_{\mu i} - f_{\lambda i}$ dans $U_{\lambda\mu}$; et il y a sur V une forme fermée β, qui coïncide avec $df_{\lambda i}$ dans U_λ quel que soit λ. Alors $(\sum f_{\lambda i}\zeta_i)$ est une connexion pour $(F_{\lambda\mu})$; sa forme de courbure, qui est de classe $\mathbf{a}(D)$ par définition, est $\sum \beta_i \wedge \zeta_i$. Cela démontre la première partie de la proposition. Si θ est à multiplicateurs constants, on a $\zeta_\sigma = 0$ pour tout $\sigma \in G$, donc (0) est une connexion pour $(F_{\lambda\mu})$, ce qui démontre bien $\mathbf{a}(D) = 0$.

On observera que, d'après la formule (5.5), l'hypothèse faite sur θ dans l'énoncé de la prop. 5.11 est vérifié d'elle-mêmes si l'espace des formes fermées holomorphes sur V est de dimension finie, donc en particulier si V est compacte de type kählérien, 99
puisqu'en ce cas cet espace est isomorphe à $\mathscr{H}^{1,0}(V)$. Dans ce cas, on a des résultats plus précis :

Théorème 5.12. *Soient V une variété compacte connexe de type kählérien et D un diviseur sur V. Alors, pour que D soit le diviseur relativement à V d'une fonction thêta sur le revêtement universel $\tilde{V}$ de V, il faut et il suffit que* $\mathbf{a}(D)$ *soit dans le sous-anneau de $\mathscr{H}(V)$ engendré par $\mathscr{H}^1(V)$.* Th. 2

La condition est nécessaire d'après la prop. 5.11 ; on va démontrer la réciproque. Soit $(\zeta_1, \dots, \zeta_q)$ une base pour l'espace vectoriel des formes de première espèce de degré 1 sur V ; $\mathscr{H}^1(V)$ étant somme directe de $\mathscr{H}^{1,0}(V)$ et $\mathscr{H}^{0,1}(V)$ d'après le th. 4.14, les classes des formes $\zeta_i, \bar{\zeta}_i$ constituent une base pour $\mathscr{H}^1(V)$. L'hypothèse sur $\mathbf{a}(D)$ équivaut donc à dire que $\mathbf{a}(D)$ contient une forme α qui est combinaison linéaire à coefficients constants des formes $\zeta_i \wedge \zeta_j, \zeta_i \wedge \bar{\zeta}_j, \bar{\zeta}_i \wedge \bar{\zeta}_j$; dans cette expression de α, soient $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ les sommes de ces trois sortes de termes, qui sont des formes fermées de bidegrés respectif $(2,0), (1,1), (0,2)$. D'après la définition de $\mathbf{a}(D)$ au §5.6 et le th. 5.4, $\mathbf{a}(D)$ est de bidegré $(1,1)$; d'après le th. 4.14, α_0 et α_2 sont donc homologues à 0. Autrement dit, on peut choisir dans la classe $\mathbf{a}(D)$ une forme α qui soit combinaisons linéaire des $\zeta_i \wedge \bar{\zeta}_j$ et puisse donc s'écrire sous la forme $\sum_{i=1}^{q} \zeta_i \wedge \bar{\zeta'}_i$, les ζ'_i étant des formes de première espèce. Sur $\tilde{V}$, on pourra écrire

$$\pi^*\zeta_i = df_i, \pi^*\zeta'_i = df'_i$$

(f_i et f'_i étant donc des « intégrales de première espèce »), d'où $\pi^*\alpha = d'd''\Phi$ avec

$$\Phi = \sum_{i=1}^{q} f_i \bar{f}'_i.$$

Soit (U_λ) un recouvrement simple de V, assez fin pour que, dans chaque U_λ, on puisse écrire $D = \operatorname{div}(\varphi_\lambda)$, φ_λ étant méromorphe dans U_λ ; soit $F_{\lambda\mu} = \varphi_\lambda^{-1}\varphi_\mu$ dans $U_{\lambda\mu}$ lorsque $U_{\lambda\mu}$ n'est pas vide. D'après le th. 5.4, il y a une connexion (η_λ) de bidegré $(1,0)$ attachée au système $(F_{\lambda\mu})$ et ayant pour forme de courbure la forme α définie ci-dessus.

Comme dans la démonstration de la prop. 5.11, choisissons pour chaque λ une composante connexe $\tilde{U}_\lambda$ de $\pi^{-1}(U_\lambda)$; alors $(\sigma\tilde{U}_\lambda)$, où σ parcourt G et λ l'ensemble d'indices du recouvrement (U_λ), est un recouvrement simple de $\tilde{V}$. Soit Φ_λ la fonction dans U_λ telle que l'on ait $\Phi = \Phi_\lambda \circ \pi$ dans $\tilde{U}_\lambda$. Dans U_λ, on aura donc $d\eta_\lambda = d'd''\Phi_\lambda$, c'est-à-dire que $\eta_\lambda + d'\Phi_\lambda$ est une forme fermée dans U_λ ; il y a donc, dans U_λ, une fonction g_λ telle que $dg_\lambda = \eta_\lambda + d'\Phi_\lambda$; comme dg_λ est de bide-
100 gré $(1,0)$, g_λ est holomorphe. Si alors on remplace les φ_λ, respectivement, par les fonctions $\varphi_\lambda\mathbf{e}(-g_\lambda)$, on voit immédiatement que les fonctions $F_{\lambda\mu}$ sont remplacées par d'autres admettant la connexion $(-d'\Phi_\lambda)$. On peut donc supposer qu'on a, par un choix convenable des φ_λ, fait en sorte qu'il en soit ainsi ; alors

$$\frac{1}{2\pi i} d\log F_{\lambda\mu}$$

coïncidera avec $d'\Phi_\lambda - d'\Phi_\mu$ dans $U_{\lambda\mu}$. Comme dans la démonstration de la prop. 5.11, soient $\tilde{U}$ la composante connexe de $\pi^{-1}(U_{\lambda\mu})$ qui est contenue dans $\tilde{U}_\mu$, et σ l'élément de G tel que $\sigma\tilde{U}_\lambda$ contienne $\tilde{U}$; pour $\tilde{u} \in \sigma^{-1}\tilde{U}$ et $u = \pi(\tilde{u})$, on aura $\Phi(\tilde{u}) = \Phi_\lambda(u)$, $\Phi(\sigma\tilde{u}) = \Phi_\mu(u)$, et par suite :

$$\pi^*(d'\Phi_\lambda - d'\Phi_\mu) = d'\Phi - d'\Phi^\sigma = \sum_i (\bar{f}'_i - \bar{f}'^{\sigma}_i) df_i.$$

Mais les coefficients des df_i dans le dernier membre sont des constantes. On aura donc finalement :

$$\frac{1}{2\pi i} d\log F_{\lambda\mu} = \sum_{i=1}^{q} c_{\lambda\mu i}\zeta_i,$$

les $c_{\lambda\mu i}$ étant des constantes. Il revient au même de dire que si l'on pose, dans $\sigma\tilde{U}_\lambda$, $\tilde{\varphi}_{\sigma\lambda} = \varphi_\lambda \circ \pi$, et dans $\sigma\tilde{U}_\lambda \cap \tau\tilde{U}_\mu$, chaque fois que cette ensemble n'est pas vide :

$$\gamma_{\sigma\lambda,\tau\mu} = \tilde{\varphi}_{\sigma\lambda}^{-1}\tilde{\varphi}_{\tau\mu}\mathbf{e}(-\sum_i c_{\lambda\mu i} f_i),$$

les $\gamma_{\sigma\lambda,\tau\mu}$ sont des constantes. Posons alors :

$$\Gamma_{\sigma\lambda,\tau\mu} = (\gamma_{\sigma\lambda,\tau\mu}; c_{\lambda\mu 1}, \ldots, c_{\lambda\mu q});$$

c'est là un élément du groupe $\mathbf{C}^* \times \mathbf{C}^q$, produit de $\mathbf{C}^*$ et du groupe additif $\mathbf{C}^q$ des vecteurs dans l'espace numérique de dimension q sur $\mathbf{C}$. Il est immédiat que $(\Gamma_{\sigma\lambda,\tau\mu})$ forme un système de fonctions de transition constantes à valeurs dans ce groupe $\mathbf{C}^* \times \mathbf{C}^q$, relatif au recouvrement simple $(\sigma\tilde{U}_\lambda)$ de $\tilde{V}$; on peut alors lui appliquer le lemme 5.1, d'où il résulte qu'il y a des éléments

$$\Gamma_{\alpha\lambda} = (\gamma_{\sigma\lambda}; c_{\sigma\lambda 1}, \ldots, c_{\sigma\lambda q})$$

de $\mathbf{C}^* \times \mathbf{C}^q$ tels que l'on ait $\Gamma_{\sigma\lambda,\tau\mu} = \Gamma_{\sigma\lambda}\Gamma_{\tau\mu}^{-1}$ chaque fois que $\sigma\tilde{U}_\lambda \cap \tau\tilde{U}_\mu$ n'est pas 101
vide. Mais cela revient à dire que, si on pose

$$\theta_{\sigma\lambda} = \gamma_{\sigma\lambda}\tilde{\varphi}_{\sigma\lambda}\mathbf{e}\Big(\sum_i c_{\sigma\lambda i} f_i\Big)$$

dans $\sigma\tilde{U}_\lambda$, les fonctions $\theta_{\sigma\lambda}$, $\theta_{\tau\mu}$ coïncident dans $\sigma\tilde{U}_\lambda \cap \tau\tilde{U}_\mu$ chaque fois que cet ensemble n'est pas vide. Il y a donc une fonction méromorphe θ sur $\tilde{V}$ qui coïncide avec $\theta_{\sigma\lambda}$ dans $\sigma\tilde{U}_\lambda$ quels que soient σ, λ. Il est immédiat que cette fonction a les propriétés énoncées dans le théorème.

Corollaire 5.13. *Soient V une variété analytique compacte connexe de type käh-* Cor.
lérien et D un diviseur sur V. Alors, pour que D soit le diviseur d'une fonction multiplicative à multiplicateurs constants, il faut que $\mathbf{a}(D) = 0$. Réciproquement, si $\mathbf{a}(D) = 0$, D est le diviseur d'une fonction multiplicative à multiplicateurs constants de valeur absolue 1, qui est déterminée par là à un facteur constant près ; si en même temps D est positif, on a $D = 0$.

La première assertion est contenue dans la prop. 5.11. Supposons qu'on ait $\mathbf{a}(D) = 0$. Soit encore (U_λ) un recouvrement simple assez fin pour qu'on ait, dans chaque U_λ, $D = \operatorname{div}(\varphi_\lambda)$; appliquant le corollaire 5.5, aux fonctions $F_{\lambda\mu} = \varphi_\lambda^{-1}\varphi_\mu$, on voit qu'on pourra les écrire sous la forme $e_{\lambda\mu}\psi_\lambda\psi_\mu^{-1}$, où les $e_{\lambda\mu}$ sont de valeur absolue 1 et les ψ_λ sont holomorphes et partout $\neq 0$ dans les U_λ ; en remplaçant donc les φ_λ par les fonctions $\varphi_\lambda\psi_\lambda$, on pourra faire en sorte que les $F_{\lambda\mu}$ soient des constantes de valeur absolue 1. Posons $\gamma_{\sigma\lambda,\tau\mu} = F_{\lambda\mu}$ chaque fois que $\sigma\tilde{U}_\lambda \cap \tau\tilde{U}_\mu$ n'est pas vide ; alors $(\gamma_{\sigma\lambda,\tau\mu})$ forme un système de fonctions de transition constantes, relatif au recouvrement simple $\sigma\tilde{U}_\lambda$ de $\tilde{V}$, à valeurs dans le groupe multiplicatif $\mathbf{E}$ des nombres complexes de valeur absolue 1. On pourra donc, par application du lemme 5.1, l'écrire sous la forme $(\gamma_{\sigma\lambda}\gamma_{\tau\mu}^{-1})$, les $\gamma_{\sigma\lambda}$ étant des éléments de $\mathbf{E}$. Si alors on pose $\theta_{\sigma\lambda} = \gamma_{\sigma\lambda}(\varphi_\lambda \circ \pi)$ dans $\sigma\tilde{U}_\lambda$, on voit qu'il y a une fonction θ sur $\tilde{V}$ qui coïncide avec $\theta_{\sigma\lambda}$ dans $\sigma\tilde{U}_\lambda$ quels que soient σ, λ, et que c'est une fonction multiplicative de diviseur D sur V, à multiplicateurs dans $\mathbf{E}$. Pour démontrer l'unicité ainsi que la dernière assertion du corollaire, il suffit évidemment de faire voir que, si θ est holomorphe à multiplicateurs constants de valeur absolue 1, c'est une constante. Or, si θ est une telle fonction, $|\theta|$ est invariante par le groupe G opérant sur $\tilde{V}$ et peut donc être considéré comme fonction sur V. Si elle n'est pas constante sur V, soient M sa borne supérieure, u un point frontière de l'ensemble des points de V où $|\theta| = M$, et $\tilde{u}$ un point de $\tilde{V}$ tel que $\pi(\tilde{u}) = u$; alors, au voisinage de $\tilde{u}$, θ est une fonction holomorphe non constante telle que $|\theta|$ admette un maximum en $\tilde{u}$, ce
qui est impossible. Si $|\theta|$ est constante, le principe du maximum (ou, si l'on préfère, 102
le cor. 2.4) montre de même que θ est constante au voisinage de tout point de $\tilde{V}$, donc sur $\tilde{V}$.

Il peut arriver en particulier que la variété compacte V de type kählérien soit telle que $\mathscr{H}^{1,1}(V)$ soit contenu dans le sous-anneau de $\mathscr{H}(V)$ engendré par $\mathscr{H}^1(V)$; le th. 5.12 montre que, sur une telle variété, tout diviseur D est le diviseur d'une fonction thêta. Si de plus θ est une fonction thêta de diviseur D, et qu'on désigne par θ_0 une fonction thêta de diviseur D^-, on aura $\theta = \theta_1/\theta_0$, où $\theta_1 = \theta_0\theta$ admet le diviseur D^+ ; toute fonction thêta est donc alors quotient de deux fonctions thêta holomorphes. Il en est ainsi, en particulier, de toute fonction méromorphe sur V (ou, plus exactement, de l'image transposée sur $\tilde{V}$ de toute fonction méromorphe sur V). Dans le monoïde multiplicatif des fonctions thêta holomorphes sur V, on pourra définir d'une manière évidente les notions de divisibilité, de fonctions étrangères, etc. On peut dire alors que toute fonction thêta sur $\tilde{V}$ peut s'exprimer comme quotient de deux fonctions thêta holomorphes étrangères l'une à l'autre, qui sont bien déterminées à des facteurs inversibles près.

103

6. Tores complexes, fonctions thêta, variétés abéliennes

n° 1 6.1. Comme il est bien connu, l'anneau de cohomologie d'un tore est engendré par les classes de degré 1 ; cela résulte d'ailleurs de ce qu'on a vu au §4.2 (v. en particulier le lemme 4.5). Les résultats de la fin du chapitre précédent sont donc applicables aux tores complexes ; on se propose maintenant de les expliciter dans ce cas et d'en développer les conséquences.

Considérons d'abord un tore réel de dimension m. Il peut se mettre sous la forme E/G, où E est un espace vectoriel de dimension m sur $\mathbf{R}$ et G un sous-groupe discret de rang m de E ; E n'est autre que le revêtement universel du tore, et G son groupe fondamental. On peut aussi, d'une manière évidente, identifier E avec l'espace vectoriel des vecteurs tangents au tore E/G en l'un quelconque de ses points ; on identifie ainsi l'espace des p-covecteurs sur E avec l'espace des formes différentielles de degré p invariantes par translations sur E/G ; le premier de ces espaces s'identifie, canoniquement aussi, avec l'espace des formes multilinéaires alternées sur le produit $E \times \cdots \times E$ de p facteurs égaux à E (cf. Bourbaki [2, III, §§ 5 et 8]). Comme il y a, d'après le lemme 4.5 du §4.2, une forme invariante par translation et une seule dans chaque classe de cohomologie sur E/G, on peut identifier ainsi $H^p(E/G)$ avec l'espace des p-covecteurs sur E, et $H(E/G)$ avec l'algèbre extérieure construite sur l'espace des covecteurs sur E. Chaque fois qu'il sera question, dans la suite, de correspondences canoniques entre certains des espaces mentionés ci-dessus, il s'agira de celles dont on vient de rappeler la définition.

Soit α une forme différentielle de degré p sur E/G, invariant par translation ; comme au §4, nous identifierons aussi α avec son image transposée dans E par
104 l'application canonique de E sur E/G. Prenons pour base dans E un système minimal $(g_1, \ldots, g_m)$ de générateurs de G ; pour les coordonnées déterminées par ce choix de la base, α pourra s'écrire:

$$\alpha = \sum_{i_1 < \cdots < i_p} a_{i_1 \ldots i_p} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}$$

Pour que α soit de classe entière sur E/G, il faut et il suffit que les $a_{i_1 \ldots i_p}$ soient entiers. Rappelons brièvement la démonstration de ce résultat bien connu. En premier lieu, on vérifie qu'il en est bien ainsi pour $p = m = 1$, c'est-à-dire pour une forme $\alpha = a\,dx$ sur le tore $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ de dimension 1, ce qu'on peut faire, soit au moyen d'un recouvrement simple de ce tore (on obtiendra un tel recouvrement en prenant les images sur $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ de trois intervalles ouverts convenablement choisis sur $\mathbf{R}$), soit en montrant que toute période d'une différentielle de degré 1 sur $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ est un multiple entier de l'intégrale de cette différentielle sur $[0, 1]$. Comme l'application

$$(x_1, \ldots, x_m) \mapsto x_i$$

de E sur $\mathbf{R}$ détermine pour tout i, par passage au quotient, un homomorphisme de E/G sur $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$, on en conclut que, pour tout i, la forme dx_i, image transposée de dx par cet homomorphisme, est de classe entière sur E/G ; il en est donc de même de toute forme $dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}$, et par suite de toute combinaison linéaire de telles formes à coefficients entiers. Réciproquement, quels que soient $i_1, \ldots, i_p$, l'application $(u_1, \dots, u_p) \mapsto \sum_{\nu=1}^{p} u_\nu g_{i_\nu}$ détermine par passage au quotient un homomorphisme du tore $\mathbf{R}^p/\mathbf{Z}^p$ dans E/G ; si on a pris $i_1 < \cdots < i_p$, l'image transposée par cette application de la forme α écrite ci-dessus est $a_{i_1 \dots i_p} du_1 \wedge \cdots \wedge du_p$; si α est de classe entière, il en est de même de cette dernière forme. Or l'intégrale de celle-ci sur $\mathbf{R}^p/\mathbf{Z}^p$ est une période et est égale à $a_{i_1 \dots i_p}$. Plus généralement, on démontre que les périodes d'une forme α de degré p sur E/G sont les combinaisons linéaires à coefficients entiers de celles qu'on obtient en intégrant sur $\mathbf{R}^p/\mathbf{Z}^p$ l'image transposée de α par l'homomorphisme de $\mathbf{R}^p/\mathbf{Z}^p$ dans E/G obtenus par passage au quotient à partir de l'application

$$(u_1, \dots, u_p) \mapsto \sum_{\nu=1}^{p} u_\nu g'_\nu$$

où $g'_1, \dots, g'_p$ sont p éléments quelconques de G. On en conclut que, pour qu'une forme α, invariante par translation, soit de classe entière, il faut et il suffit que la forme multilinéaire alternée sur $E \times \cdots \times E$ qui lui est canoniquement associée soit à valeur entières sur $G \times \cdots \times G$; les valeurs qu'elle prend sur $G \times \cdots \times G$, et leurs 105
combinaisons linéaires à coefficients entiers, sont en effet les périodes de α.

Nous aurons à nous servir des résultats ci-dessus que pour $p = 2$; pour ce cas, nous les énoncerons sous forme de lemme:

Lemme 6.1. *Soit α une forme différentielle de degré 2, invariante par translation sur un tore E/G. Pour que α soit de classe entière, il faut et il suffit que la forme bilinéaire alternée sur $E \times E$ qui lui est canoniquement associée soit à valeurs entières sur $G \times G$.* Lemme 1

En ce qui concerne les formes alternées ayant cette propriété, nous aurons besoin du lemme suivant:

Lemme 6.2. *Soit A une forme bilinéaire alternée sur $E \times E$, à valeurs entières sur $G \times G$. Soit E_0 le sous-espace de E formé des $x \in E$ tels que $A(x, g) = 0$ quel que soit $g \in G$; soit $G_0 = G \cap E_0$. Alors E_0 est le sous-espace de E engendré par G_0 ; A s'annule sur $E \times E_0$ et sur $E_0 \times E$; et il existe une forme bilinéaire B sur $E \times E$, nulle sur $E \times E_0$ et sur $E_0 \times E$, à valeurs entières sur $G \times G$, et telle que $A(x, y) = B(x, y) - B(y, x)$ quels que soient x, y.* Lemme 2

Montrons d'abord qu'il existe B, à valeurs entières sur $G \times G$, telle que $A(x, y) = B(x, y) - B(y, x)$. Pour cela, prenons dans E une base formée d'un système minimal de générateurs de G ; A s'ecrira alors

$$A(x, y) = \sum_{i<j} a_{ij}(x_i y_j - x_j y_i) \tag{6.1}$$

avec des a_{ij} entiers, et on satisfera aux conditions ci-dessus en prenant $B(x, y) = \sum_{i<j} a_{ij} x_i y_j$. Pour la même base, chacune des équations $A(x, g) = 0$ qui définissent E_0 est à coefficients entiers ; il s'ensuit, comme on sait que E_0 est engendré par ses points à coordonnées rationnelles (cf. p. ex. Bourbaki [2, II, §5, n° 3]), donc aussi par ses points à coordonnées entières par rapport à la base en question ; or ceux-ci ne sont autres que les points de G_0. La relation $G_0 = G \cap E_0$ implique, comme on sait, que G_0 admet un supplementaire G_1 dans G (cf. Bourbaki [2, VII, §4,n° 3, cor. du th. 1]), c'est-à-dire que G est somme direct de G_0 et G_1 ; E est alors somme direct de E_0 et de l'espace vectoriel E_1 engendré sur $\mathbf{R}$ par G_1. Soit f l'application canonique de E sur l'espace $E^* = E/E_0$; f induit sur E_1 un isomorphisme de E_1 sur E^* qui applique G_1 sur le groupe $G^* = f(G)$. Alors A détermine, pas passage au quotient, une forme alternée A^* sur $E^* \times E^*$, à valeurs entières sur $G^* \times G^*$, telle que 106

$A(x,y) = A^*(f(x), f(y))$. D'après ce qui précède, il y aura une forme bilinéaire B^* sur $E^* \times E^*$, à valeurs entières sur $G^* \times G^*$, telle que $A^*(u,v) = B^*(u,v) - B^*(v,u)$ quels que soient u, v dans E^*. Alors la forme $B(x,y) = B^*(f(x), f(y))$ aura toutes les propriétés énoncées dans le lemme.

Les hypothèses étant celles du lemme 6.2, toute forme B ayant les propriétés énoncées dans ce lemme sera dite une *forme satellite de A sur $G \times G$*.

Avec les notations du lemme 6.2, la codimension de E_0 dans E s'appelle, comme on sait, le *rang de A*; c'est toujours un nombre pair. On sait que, si A est de rang $2p$, on peut toujours choisir un système minimal $(g_1, \dots, g_m)$ de générateurs de G de telle sorte que, ce système étant pris pour base, A soit donné par une formule:

$$A(x,y) = \sum_{\alpha=1}^{p} e_\alpha (x_\alpha y_{p+\alpha} - y_\alpha x_{p+\alpha}) \tag{6.2}$$

où les e_α sont des entiers non nuls; une telle base de G sera dite *adaptée à A*. On peut même faire en sorte que les e_α soient égaux aux « diviseurs élémentaires » de A sur $G \times G$, mais nous n'aurons pas à faire usage de ceux-ci.

Si A est une forme alterneée sur $E \times E$, donnée par (6.1) pour un certain choix de la base dans E, le bicovecteur canoniquement associé à A sera donné, par rapport à cette base, par $u = \sum_{i<j} a_{ij} x_i \wedge x_j$. Si l'espace est de dimension paire $m = 2n$, on pourra alors écrire:

$$\frac{1}{n!} u^n = P dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{2n},$$

où P est un polynome homogène de degré n dans les a_{ij} qu'on appelle, comme on sait, le *pfaffien* de la matrice $\|a_{ij}\|$, ou encore le pfaffien de A par rapport à la base choisie; pour qu'il s'annule, il faut et il suffit que le rang de A soit $< 2n$. La formule ci-dessus montre que, pour un changement de base de déterminant δ, le pfaffien est multiplié par δ; il s'ensuit que, si G est un sous-groupe discret de rang $2n$ de E, le pfaffien de A a même valeur absolue par rapport à toute base formée d'un système minimal de générateurs de G; cette valeur absolue s'appellera *le pfaffien de A sur $G \times G$* ou *par rapport à G*. Si A est à valeurs entières sur $G \times G$, A sera donnée, par rapport à une base de G adaptée à A, par une formule du type (6.2), et alors un calcul facile montre que le pfaffien de A sur $G \times G$ est $|e_1 e_2 \dots e_n|$ si $p = n$ et 0 si $p < n$. Si E_0 est défini comme dans le lemme 6.2, A définira, par passage au quotient, une forme A^* de rang $2p$ dans l'espace $E^* = E/E_0$ qui est de dimension
107 $2p$; le pfaffien de A^* par rapport au groupe G^*, image de G dans E^*, s'appelera *le pfaffien réduit de A sur $G \times G$* ; il est immédiat que, si A est donné par (6.2) par rapport à une base de G adaptée à A, le pfaffien réduit est égal à $|e_1 \dots e_p|$; il est égal au pfaffien si $p = n$, si $p = 0$, on lui attribuera par convention la valeur 1. C'est donc en tout cas un entier > 0.

n° 2 6.2. A partir de maintenant, on supposera que E est un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbf{C}$, et que G est un sous-groupe discret de rang $2n$ de E; E/G est donc un tore complexe. Dans la correspondance canonique entre formes invariantes par translation sur E/G et formes multilinéaires sur l'espace vectoriel sur $\mathbf{R}$ sous-jacent à E, les formes de bidegré $(1,0)$ sur E/G correspondent aux formes $\mathbf{C}$-linéaires sur E; à la forme $\mathbf{C}$-linéaire z sur E correspond sur E/G la forme dz (ce qui signifie, d'après les conventions du §4.2, la forme sur E/G dont l'image transposée, par la projection canonique de E sur E/G, est dz). D'après les définitions du §5.7, une intégrale de première espèce sur E, relative à E/G, sera donc une constante.

De même, les formes invariantes par translation, de bidegré $(1,1)$, sont celles qui s'écrivent :

$$\Omega = \frac{i}{2} \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} h_{\alpha\beta} dz_\beta \wedge d\bar{z}_\alpha$$

où les z_α désignent les coordonnées par rapport à une base dans E, ou autrement dit forment une base pour l'espace des formes $\mathbf{C}$-linéaires sur E ; une telle forme Ω sera réelle si $h_{\alpha\beta} = \bar{h}_{\beta\alpha}$ quels que soient α, β ; en ce cas, on dira qu'elle est canoniquement associé à la forme hermitienne

$$H(z,w) = \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} h_{\alpha\beta} \bar{z}_\alpha w_\beta$$

sur $E \times E$. Comme on l'a vu au §1.2, la partie imaginaire A de H est alors une forme $\mathbf{R}$-bilinéaire alternée sur $E \times E$, à savoir celle même qui est canoniquement associée à Ω au sens des définitions du §6.1 ci-dessus ; donc, d'après le lemme 6.1, pour que Ω soit de classe entière sur E/G, il faut et il suffit que A soit à valeurs entières sur $G \times G$. Rappelons que, d'après le §1.2, H et A satisfont aux relations :

$$(6.3) \qquad \begin{aligned} H(x,y) &= A(x,iy) + iA(x,y) = -A(ix,y) + iA(x,y) \\ H(x,y) - H(y,x) &= 2iA(x,y), \quad A(ix,iy) = A(x,y) \end{aligned}$$

108

Lemme 6.3. *Soient H une forme hermitienne sur $E \times E$ et A sa partie imaginaire.* Lemme 3
Alors l'ensemble E_0 des points $x \in E$ tels que $A(x,y) = 0$ quel que soit $y \in E$ est aussi l'ensemble des $x \in E$ tels que $H(x,y) = 0$ quel que soit $y \in E$, et est un sous-espace vectoriel de E sur $\mathbf{C}$. Si de plus H est positive, E_0 est l'ensemble des $x \in E$ tels que $H(x,x) = 0$.

La première assertion résulte immédiatement des relations (6.3). Supposons que H soit positive, et qu'on ait $H(x,x) = 0$; on a alors, quel que soit y:

$$H(y + \tau x, y + \tau x) = H(y,y) + \tau H(y,x) + \bar{\tau} H(x,y)$$

Pour que le second membre soit ≥ 0 quel que soit τ, il faut que $H(x,y) = 0$.

L'espace vectoriel E_0 défini dans le lemme 6.3 s'appellera désormais le *noyau* de la forme hermitien H.

Lemme 6.4. *Soit F une forme $\mathbf{R}$-bilinéaire sur $E \times E$, à valeurs dans $\mathbf{C}$; supposons* Lemme 4
que, pour tout $x \in E$, l'application $y \mapsto F(x,y)$ soit $\mathbf{C}$-linéaire, et que la forme $\mathbf{R}$-bilinéaire alternée

$$A(x,y) = F(x,y) - F(y,x)$$

soit à valeurs réelles sur $E \times E$. Alors on a $2iF = H + \Phi$, où H est une forme hermitienne sur $E \times E$ et Φ une forme $\mathbf{C}$-bilinéaire symétrique sur $E \times E$. De plus, H et Φ sont déterminées d'une manière unique par ces conditions, et A est la partie imaginaire de H.

Soient F', F'' la partie réelle et la partie imaginaire de F ; en écrivant que $F(x,y)$ est $\mathbf{C}$-linéaire en y, c'est-à-dire qu'on a $F(x,iy) = iF(x,y)$, on obtient $F'(x,y) = F''(x,iy)$. Puisque A est à valeurs réelles, F'' est symétrique, et l'on a :

$$A(x,y) = F'(x,y) - F'(y,x) = F''(x,iy) - F''(y,ix).$$

Puisque F'' est symétrique, on en conclut aussitôt qu'on a :

$$A(ix,iy) = A(x,y),$$

d'où il s'ensuit (cf. §1.2) que A est la partie imaginaire d'une forme hermitienne H, celle-ci étant définie par la première des relations (6.3) ci-dessus. Il est immédiat

alors que la forme $\Phi = 2iF - H$ est symétrique ; comme $\Phi(x, y)$ est $\mathbf{C}$-linéaire en y,
109 Φ est donc $\mathbf{C}$-bilinéaire. L'unicité de H et Φ résulte de ce qu'une forme $\mathbf{C}$-bilinéaire non nulle ne peut être hermitienne. On notera la formule

$$H(x, x) = -F''(x, x) - F''(ix, ix), \tag{6.4}$$

conséquence immédiate de ce qui précède.

n° 3 6.3. D'après le corrollaire 5.13, si φ est une fonction multiplicative holomorphe à multiplicateurs constants sur E, relativement au groupe G, elle est partout non nulle ; d'après le §5.7, il s'ensuit que $(2\pi i)^{-1} \log \varphi$ est une intégrale de première espèce, c'est-à-dire, d'après ce qui précède, que φ est de la forme $\mathbf{e}(z + c)$, où z est une forme $\mathbf{C}$-linéaire sur E et c une constante.

Soit maintenant θ une fonction thêta sur E, relativement au groupe G. On aura donc, d'après les définitions du §5.7, et d'après ce qui précède :

$$\theta(x + g)\theta(x)^{-1} = \mathbf{e}(L_g(x) + c(g))$$

quels que soient $g \in G$ et $x \in E$, L_g désignant, pour chaque $g \in G$, une forme $\mathbf{C}$-linéaire sur E, et $c(g)$ une constante. On en conclut aussitôt qu'on a, quels que soient $x \in E$ et $g, g' \in G$:

$$L_{g+g'}(x) + c(g + g') \equiv L_g(x + g') + L_{g'}(x) + c(g) + c(g') \pmod 1,$$

ce qui équivaut aux relations :

$$L_{g+g'} = L_g + L_{g'}, \quad c(g + g') - c(g) - c(g') \equiv L_g(g') \pmod 1.$$

La première exprime que $g \mapsto L_g$ est un homomorphisme de G dans l'espace dual de E ; comme G est un groupe libre, on en conclut immédiatement qu'il y a une forme $\mathbf{R}$-linéaire F sur $E \times E$ et une seule, telle que l'on ait $L_g(x) = F(g, x)$ quels que soient $g \in G$ et $x \in E$, et que $F(x, y)$ est $\mathbf{C}$-linéaire en y. On a alors, quels que soient g, g' dans G :

$$c(g + g') - c(g) - c(g') \equiv F(g, g') \pmod 1.$$

Le premier membre étant symétrique en g, g', la forme alternée

$$A(x, y) = F(x, y) - F(y, x)$$

est à valeurs entières sur $G \times G$, et par suite à valeurs réelles sur $E \times E$. D'après le
110 lemme 6.4, on aura donc $2iF = H + \Phi$, où H est hermitienne de partie imaginaire A et Φ est $\mathbf{C}$-bilinéaire symétrique. Mais, si on pose $d(g) = c(g) - F(g, g)/2$, on aura :

$$d(g + g') - d(g) - d(g') \equiv \frac{1}{2} A(g, g') \pmod 1.$$

La partie imaginaire $f(g)$ de $d(g)$ est donc un homomorphisme de G dans $\mathbf{R}$, qu'on peut prolonger à une application $\mathbf{R}$-linéaire f de E dans $\mathbf{R}$; si on pose alors $L(x) = f(ix) + if(x)$, L sera une forme $\mathbf{C}$-linéaire sur E, de partie imaginaire f ; donc $d(g) - L(g)$ sera réel pour tout $g \in G$. Soit B une forme satellite de A sur $G \times G$, c'est-à-dire une forme ayant les propriétés énoncées dans le lemme 6.2, posons :

$$\begin{aligned} d'(g) &= d(g) - L(g) - \frac{1}{2} B(g, g) \\ &= c(g) - L(g) - \frac{1}{2} B(g, g) - \frac{1}{4i} [H(g, g) + \Phi(g, g)]. \end{aligned}$$

On aura, dans ces conditions :

$$d'(g + g') \equiv d'(g) + d'(g') \pmod 1,$$

c'est-à-dire que la fonction $\mathbf{e}[d'(g)]$ est un caractère de G (au sens strict), ou autrement dit un homomoprhisme de G dans le groupe multiplicatif $\mathbf{E}$ des nombres complexes de valeur absolue 1.

La fonction $\psi(g) = \mathbf{e}[d(g)-L(g)]$ sera alors une application de G dans $\mathbf{E}$ telle que $\psi(g)\mathbf{e}[B(g,g)/2]$ soit un caractère de G. Cette propriété est d'ailleurs indépendante du choix de la forme satellite B de A ; en effet, toute autre forme satellite de A peut s'écrire $B+S$, où S est symétrique à valeurs entières sur $G\times G$, et on voit immédiatement qu'alors $\mathbf{e}[S(g,g)/2]$ est un caractère de G. Une application ψ de G dans $\mathbf{E}$ ayant la propriété en question s'appellera un *semi-caractère de* G, attaché à A, ou attaché à la forme hermitienne H dont A est la partie imaginaire.

En définitive, on a démontré ce qui suit :

Proposition 6.5. *Soit θ une fonction thêta relative à un tore complexe E/G. Alors* Prop. 1
il y a une forme hermitienne H, une forme $\mathbf{C}$-bilinéaire symétrique Φ, une forme 111
$\mathbf{C}$-linéaire L, et un semi-caractère ψ de G attaché à H, tels que l'on ait, pour $g\in G, x\in E$:

$$\theta(x+g) = \theta(x)\psi(g)\mathbf{e}\Big[\frac{1}{2i}H(g,x)+\frac{1}{4i}H(g,g)+\frac{1}{2i}\Phi(g,x)+\frac{1}{4i}\Phi(g,g)+L(g)\Big]. \tag{6.5}$$

De plus, H,Φ,L et ψ sont déterminés par ces conditions d'une manière unique ; et la partie imaginaire A de H est à valeurs entières sur $G\times G$.

Une fonction méromorphe θ, non partout nulle sur E, saisfaisant à (6.5), sera appelée une *fonction thêta de type* (H,ψ,Φ,L) relativement à G. Si $\Phi=0$ et $L=0$, on dira que c'est une *fonction thêta réduite de type* (H,ψ) ; une telle fonction est donc une fonction méromorphe, non partout nulle, qui satisfait, pour $g\in G, x\in E$, à la relation

$$\theta(x+g) = \theta(x)\psi(g)\mathbf{e}\Big[\frac{1}{2i}H(g,x)+\frac{1}{4i}H(g,g)\Big]. \tag{6.6}$$

Une fonction sur E, de la forme $P(x) = \Phi(x,x)/4i + L(x) + c$, où Φ est $\mathbf{C}$-bilinéaire symétrique, où L est $\mathbf{C}$-linéaire, et où c est une constante, s'appelle un polynome du second degré sur E ; en effet, pour qu'une fonction puisse s'écrire ainsi, il faut et il suffit que ce soit un polynome du second degré par rapport aux coordonnées de x pour un choix quelconque d'une base de E sur $\mathbf{C}$. Si P est le polynome défini par la formule précédente, $\mathbf{e}[P(x)]$ est une fonction thêta de type $(0,1,\Phi,L)$ relativement à G, et cela quel que soit le sous-groupe discret G de rang $2n$ dans E. Une fonction de la forme $\mathbf{e}[P(x)]$, où P est un polynome du second degré dans E, s'appellera une *fonction thêta triviale*. On a les résultats suivants, dont la vérification est immédiate :

Proposition 6.6. *Toute fonction thêta peut s'exprimer d'une manière et d'une* Prop. 2
seule comme produit d'une fonction thêta reduite θ_0 et d'une fonction thêta triviale θ' égale à 1 en 0 ; si la première est de type (H,ψ,Φ,L), θ_0 est de type (H,ψ) et on a $\theta'(x) = \mathbf{e}[\Phi(x,x)/4i + L(x)]$.

Proposition 6.7. *Si θ est une fonction thêta de type (H,ψ,Φ,L) relative à G, la* Prop. 3
fonction θ_1 défini par $\theta_1(x)=\theta(x+a)$ est une fonction thêta de type (H,ψ_1,Φ,L_1) relativement à G, ψ_1 et L_1 étant donnés par les formules :

$$\psi_1(g) = \psi(g)\mathbf{e}[A(g,a)] \qquad L_1(x) = L(x)+\frac{1}{2i}H(a,x)+\frac{1}{2i}\Phi(a,x)$$

où A désigne la partie imaginaire de H. 112

Corollaire 6.8. *Si θ est une fonction thêta réduite de type (H,ψ), la fonction* Cor.

$$\theta(x+a_1)\theta(x+a_2)\cdots\theta(x+a_{r-1})\theta(x-a_1-\cdots-a_{r-1})$$

est une fonction thêta réduite de type (rH,ψ^r) quels que soient les a_i.

n° 4 6.4. On va maintenant étudier le diviseur d'une fonction thêta, et déterminer la classe de cohomologie qui lui est attachée d'après les définitions du §5.6 ; le résultat est le suivant :

Prop. 4 **Proposition 6.9.** *Soit θ une fonction thêta de type (H,ψ,Φ,L), relative au groupe G ; soit D le diviseur de θ relativement au tore E/G. Alors $\mathbf{a}(D)$ est la classe entière de bidegré $(1,1)$ qui correspond canoniquement à la forme hermitienne H.*

Au moyen de la prop. 6.6, on se ramène immédiatement au cas où θ est réduite de type (H,ψ). On procédera comme au §5.8. Soit (U_λ) un recouvrement simple de E/G ; π étant la projection canonique de E sur E/G, choisissons pour chaque λ une composante connexe $\tilde U_\lambda$ de $\pi^{-1}(U_\lambda)$; si, pour chaque $g\in G$, on note T_g la translation $x\mapsto x+g$ dans E, les ensembles $T_g(\tilde U_\lambda)$ forment un recouvrement simple de E. Si $U_{\lambda\mu}=U_\lambda\cap U_\mu$ n'est pas vide, l'une des composantes connexes de $\pi^{-1}(U_{\lambda\mu})$ sera contenue dans $\tilde U_\mu$, et il y aura un $g_{\lambda\mu}\in G$ tel que cette même composante soit contenue dans $T_{g_{\lambda\mu}}(\tilde U_\lambda)$. Désignons par $z^{(\lambda)}$ l'application de U_λ sur $\tilde U_\lambda$, inverse de l'application de $\tilde U_\lambda$ sur U_λ qui est induite sur $\tilde U_\lambda$ par π ; on pourra aussi considérer $z^{(\lambda)}$ comme application de U_λ dans E. Par définition de $g_{\lambda\mu}$, on aura $z^{(\mu)}-z^{(\lambda)}=g_{\lambda\mu}$ dans $U_{\lambda\mu}$ chaque fois que $U_{\lambda\mu}$ n'est pas vide. Si on pose $\varphi_\lambda=\theta\circ z^{(\lambda)}$, φ_λ sera une fonction méromorphe dans U_λ, et on aura, dans U_λ, $D=\operatorname{div}(\varphi_\lambda)$; les $F_{\lambda\mu}=\varphi_\lambda^{-1}\varphi_\mu$ forment alors un système de fonctions de transition attaché à D au sens du §5.6. Mais on a d'après (6.6) pour $u\in U_{\lambda\mu}$:

$$F_{\lambda\mu}(u)=\theta\big(z^{(\lambda)}(u)\big)^{-1}\theta\big(z^{(\mu)}(u)\big)=c_{\lambda\mu}\mathbf{e}\big[\frac{1}{2i}H(g_{\lambda\mu},z^{(\lambda)}(u))\big],$$

où $c_{\lambda\mu}$ est une constante non nulle. Choisissons une base dans E ; supposons que H s'exprime, au moyen des coordonnées relatives à cette base, par la formule :

$$H(z,w)=\sum_{\alpha,\beta}h_{\alpha\beta}\bar z_\alpha w_\beta.$$

113 Les dz_α forment une base pour l'espace des formes de première espèce sur E/G ; de plus, si on écrit $z^{(\lambda)}=(z_1^{(\lambda)},\dots,z_n^{(\lambda)})$, les $dz_\alpha^{(\lambda)}$ ne sont autres que les formes induites par les dz_α sur U_λ. Comme $g_{\lambda\mu}=z^{(\mu)}-z^{(\lambda)}$, il s'ensuit qu'on a, dans $U_{\lambda\mu}$:

$$\frac{1}{2\pi i}d\log F_{\lambda\mu}=\frac{1}{2i}\sum_{\alpha,\beta}h_{\alpha\beta}(\bar z_\alpha^{(\mu)}-\bar z_\alpha^{(\lambda)})dz_\beta.$$

Par suite, les formes

$$\eta_\lambda=\frac{1}{2i}\sum_{\alpha,\beta}h_{\alpha\beta}(\bar z_\alpha^{(\lambda)})dz_\beta$$

définissent une connexion pour $(F_{\lambda\mu})$. Cette connexion a la courbure :

$$\alpha=\sum_{\alpha,\beta}h_{\alpha\beta}dz_\beta\wedge d\bar z_\alpha$$

qui est bien la forme, invariante par translation, correspondant canoniquement à H.

n° 5 6.5. Pour le cas où D est positif, c'est-à-dire θ partout holomorphe, on a le résultat suivant:

Prop. 5 **Proposition 6.10.** *Soit θ une fonction thêta holomorphe, réduite de type (H, ψ). Alors la forme H est positive, et tout vecteur du noyau de H est une période de θ.*

Il résulte immédiatement de (6.6) que la fonction

$$|\theta(x)|^2\mathbf{e}\big(\frac{i}{2}H(x,x)\big) = |\theta(x)|^2e^{-\pi H(x,x)}$$

est périodique de période g pour tout $g \in G$ et détermine donc, par passage au quotient, une fonction continue sur E/G ; elle est donc bornée. Autrement dit, il y a une constante $C > 0$ telle que l'on ait:

$$|\theta(x)|^2 \leq Ce^{\pi H(x,x)}.$$

Soient a, b deux vecteurs quelconque de E ; on aura, pour $\tau \in \mathbf{C}$:

$$|\theta(\tau a + b)|^2 \leq Ce^{\pi\rho}$$

où ρ est défini par

$$\rho = H(\tau a + b, \tau a + b) = H(a,a)\tau\bar{\tau} + \tau H(b,a) + \bar{\tau}H(a,b) + H(b,b).$$

Supposons qu'on ait $H(a,a) < 0$; alors, quel que soit $\varepsilon > 0$, il y aura $R > 0$ 114
tel que l'on ait $\pi\rho \leq \log\varepsilon$ pour tout τ tel que $|\tau| \geq R$, ce qui montre que que $\theta(\tau a + b)$, qui, pour a et b donnés, est une fonction holomorphe de τ dans tout le plan complexe, est $\leq (C\varepsilon)^{1/2}$ en valeur absolue en dehors du cercle $|\tau| = R$, et par suite dans tout le plan. Comme il en est ainsi quel que soit ε, cette fonction s'annule donc identiquement ; comme il en est ainsi quel que soit b, θ elle-même s'annule identiquement, ce qui est contraire à la définition d'une fonction thêta. On a donc bien $H(a,a) \geq 0$ quel que soit a. Supposons maintenant qu'on ait $H(a,a) = 0$, ce qui, d'après le lemme 6.3, entraîne $H(a,b) = 0$ quel que soit b. Alors les inégalités ci-dessus montrent que la fonction $\theta(\tau a + b)$ est bornée dans tout le plan, donc constante, ce qui implique bien que a est une période de θ

Corollaire 6.11. *Les hypothèses étant celles de la prop. 6.10, soit E_0 le noyau de* Cor. 1
H, et soit $G_0 = G \cap E_0$. Alors le semi-caractère ψ induit la constante 1 sur G_0.

Il suffit pour le voir d'exprimer au moyen de (6.6) que tout $g \in G_0$ est une période de θ.

Corollaire 6.12. *Toute fonction thêta holomorphe et partout $\neq 0$ est une fonction* Cor. 2
thêta triviale.

Soit θ une telle fonction ; d'après la prop. 6.6, on peut l'écrire $\theta = \theta_0\theta'$, avec θ_0 réduite et θ' triviale. Si θ_0 est de type (H, ψ), la prop.6.10, appliquée successivement à θ_0 et à θ_0^{-1}, montre que H est à la fois positive et négative, donc que $H = 0$, puisque tout vecteur de E est une période de θ_0, donc que θ_0 est constante.

Si maintenant on applique le th. 5.12, et qu'on tienne compte des résultats ci-dessus, on obtient le théorème suivant :

Théorème 6.13. *Tout diviseur D sur E/G est le diviseur sur E/G d'une fonction* Th. 1
thêta réduite relative à G, qui est bien déterminée par D à un facteur constant près. Si D est positif, et si (H, ψ) est le type de la fonction thêta réduite de diviseur D, la forme H est positive.

Corollaire 6.14. *Pour que deux diviseurs D, D' soient linéairement équivalents* Cor. 1
sur E/G, il faut et il suffit que les fonctions thêta réduites de diviseurs D, D' soient de même type.

Soient θ, θ' les fonctions thêta en question ; alors θ/θ' est une fonction thêta réduite de diviseur $D - D'$. Si θ, θ' sont de même type, θ/θ' est péridique de période
115 g quel que soit $g \in G$, donc détermine par passage au quotient une fonction méromorphe de diviseur $D - D'$ sur E/G. Réciproquement, si $D - D'$ est le diviseur d'une fonction méromorphe φ sur E/G, et que π désigne comme toujours la projection canonique de E sur E/G, $\varphi \circ \pi$ sera une fonction thêta réduite, de type $(0, 1)$ et de diviseur $D - D'$; d'après le th. 6.13, elle ne peut différer de θ/θ' que par un facteur constant ; donc θ et θ' sont de même type.

Cor. 2 **Corollaire 6.15.** *Soient D, D' deux diviseur positifs sur E/G. Alors, pour qu'on ait $\mathbf{a}(D) = \mathbf{a}(D')$, il faut et il suffit qu'il y ait une translation sur E/G qui transforme D en un diviseur linéairement équivalent à D'.*

Soient θ, θ' des fonctions thêta réduites de diviseurs D, D' ; soient (H, ψ) et (H', ψ') leurs types ; d'après la prop. 6.9, $\mathbf{a}(D) = \mathbf{a}(D')$ équivaut à $H = H'$. D'après le corollaire 6.14 ci-dessus, et la prop. 6.7, la condition énoncée est suffisante. Réciproquement, supposons qu'on ait $H = H'$; soit A la partie imaginaire de H, et soit E_0 son noyau. Au moyen du lemme 6.3, on voit immédiatement que, par passage au quotient, A détermine une forme alternée non dégénérée A^* sur l'espace $E^* = E/E_0$; donc, en posant $G_0 = G \cap E_0$, tout caractère de l'image $G^* = G/G_0$ de G dans E^* peut se mettre sous la forme $\mathbf{e}[A^*(g^*, a^*)]$, avec $a^* \in E^*$; cela revient à dire que tout caractère de G qui prend la valeur 1 sur G_0 est de la forme $\mathbf{e}[A(g, a)]$, avec $a \in E$. Mais le cor. 6.11 montre que $\psi^{-1}\psi'$ prend la valeur 1 sur G_0 ; comme c'est un caractère de G, on peut donc choisir $a \in E$ tel que $\psi^{-1}\psi'$ coïncide avec $\mathbf{e}[A(g, a)]$ sur G. D'après la prop. 6.7, $\theta(x + a)$ est donc de type $(H, \psi', 0, L)$, où L est une forme linéaire. Comme elle a pour diviseur le transformé de D par la translation $-\pi(a)$, ce dernier est donc, d'après la prop. 6.6, le diviseur d'une fonction thêta réduite de type (H, ψ') ; par suite, d'après le corollaire 6.14, il est linéairement équivalent à D'.

Cor. 3 **Corollaire 6.16.** *Soit D un diviseur positif sur E/G ; soit H la forme hermitienne canoniquement associée à $\mathbf{a}(D)$; soit E_0 le noyau de H. Alors l'image de E_0 dans E/G est fermée dans E/G et est un sous-groupe d'indice fini du groupe Γ des tranlations sur E/G qui laissent D invariant.*

Comme la partie imaginaire A de H est à valeurs entières sur $G \times G$, il résulte des lemmes 6.2 et 6.3, que le groupe $G_0 = G \cap E_0$ est discret dans E_0 et de rang égal à la dimension de E_0 sur $\mathbf{R}$, de sorte que l'homomorphisme de E_0 sur son image $\pi(E_0)$ dans E/G induit sur E_0 par la projection canonique π de E sur E/G détermine, par passage au quotient, un isomorphisme du tore complexe E_0/G_0 sur $\pi(E_0)$; $\pi(E_0)$ est donc un sous-groupe fermé de E/G. D'après la prop. 6.10, tout vecteur de E_0 est une période de la fonction thêta réduite de diviseur D ; donc
116 $\pi(E_0)$ est contenu dans le groupe Γ. D'autre part, Γ est contenu dans le groupe Γ' des translations sur E/G qui transforment D en un diviseur linéairement équivalent à D. Or, d'après le corollaire 6.14 ci-dessus, et les prop. 6.6 et 6.7, Γ' est l'image dans E/G de l'ensemble des $a \in E$ tels que $\mathbf{e}[A(g, a)] = 1$ quel que soit $g \in G$. Comme A est à valeurs entières sur $G \times G$, la fonction $\mathbf{e}[A(g, x)]$ est périodique de période g' quel que soit $g' \in G$ et détermine donc par passage au quotient un caractère χ_g de E/G ; Γ' est l'ensemble des éléments de E/G où l'on a $\chi_g = 1$ quel que soit $g \in G$; c'est donc un sous-groupe fermé de E/G. On sait, dans ces conditions, que la composante connexe Γ_0 de 0 dans Γ' est d'indice fini dans Γ' et est l'image dans E/G d'une sous-variété $\mathbf{R}$-linéaire E'_0 de E. De plus, E'_0 est l'ensemble des $a \in E$ tels que l'on ait $A(g, \lambda a) \equiv 0 \pmod 1$ quel que soit $\lambda \in \mathbf{R}$.

Il est clair que cet ensemble n'est autre que E_0. On a donc $\Gamma_0 = \pi(E_0)$; comme ce groupe est d'indice fini dans Γ', il l'est à plus forte raison dans Γ.

Corollaire 6.17. *Soit φ une fonction méromorphe dans E/G ; soit $D = \operatorname{div}(\varphi)$.* Cor. 4
Soit H la forme hermitienne canoniquement associée à la classe $\mathbf{a}(D^+) = \mathbf{a}(D^-)$; soit E_0 le noyau de H. Alors l'image de E_0 dans E/G est un sous-groupe d'indice fini du groupe des translations qui laissent φ invariante.

D'après le corollaire 6.16, cette image est d'indice fini dans le groupe des translations qui laissent D^+ et D^- invariant. D'autre part, si θ est une fonction thêta réduite de diviseur D^-, $\theta\varphi$ sera une fonction thêta réduite de diviseur D^+ ; d'après la prop. 6.10, tout $a \in E_0$ est une période pour l'une et l'autre de ces fonctions. La conclusion s'ensuit immédiatement.

6.6. Si E/G est un tore complexe, toute forme hermitienne positive H sur $E \times E$ nº 6
dont la partie imaginaire est à valeurs entières sur $G \times G$ s'appellera une *forme de* RIEMANN pour E/G.

Proposition 6.18. *Soit E/G un tore complexe admettant une forme de* RIEMANN Prop. 6
non dégénérée H, de partie imaginaire A. Soit $(g_1, \dots, g_{2n})$ une base de G adaptée à A, soit

$$A\left(\sum_{\nu=1}^{2n} \xi_\nu g_\nu, \sum_{\nu=1}^{2n} \eta_\nu g_\nu\right) = \sum_{\alpha=1}^{n} e_\alpha(\xi_\alpha \eta_{n+\alpha} - \eta_\alpha \xi_{n+\alpha}), \tag{6.7}$$

pour des ξ_ν, η_ν réels, l'expression de A par rapport à cette base de E sur $\mathbf{C}$; et si l'on pose

$$g_{n+\beta} = \sum_{\alpha=1}^{n} p_{\alpha\beta} g_\alpha \quad (1 \leq \beta \leq n), \tag{6.8}$$

$Z = \|e_\alpha p_{\alpha\beta}\|$ est une matrice symétrique dont la partie imaginaire est la ma- 117
trice d'une forme quadratique non dégénérée positive. Réciproquement, soit $Z = \|z_{\alpha\beta}\|$ une matrice symétrique dont la partie imaginaire soit la matrice d'une forme quadratique non dégénérée positive ; soient $(e_1, \dots, e_n)$ des entiers non nuls ; soit $(g_a, \dots, g_n)$ une base d'un espace vectoriel E sur $\mathbf{C}$; soit G le groupe engendré par $g_1, \dots, g_n$ et par les vecteurs

$$g_{n+\beta} = \sum_{\alpha=1}^{n} e_\alpha^{-1} z_{\alpha\beta} g_\alpha \quad (1 \leq \beta \leq n).$$

Alors G est un sous-groupe discret de E, et la forme bilinéaire définie par (6.7) est la partie imaginaire d'une forme de RIEMANN *non dégénérée pour E/G.*

Par définition d'une base adaptée à A, les e_α sont entiers ; ils sont $\neq 0$ parce que H et par suite A sont non dégénérées. Soient E', E'' les sous-espaces de E engendrés respectivement, sur $\mathbf{R}$, par $g_1, \dots, g_n$ et par $g_{n+1}, \dots, g_{2n}$; d'après (6.7), A s'annule sur $E' \times E'$ et sur $E'' \times E''$. Si $g_1, \dots, g_n$ n'étaient pas linéairement indépendants sur $\mathbf{C}$ dans E, il y aurait deux vecteurs x, y non nuls dans E' tels que $x + iy = 0$, c'est-à-dire $y = ix$; on aurait alors, d'après les formules (6.3) :

$$H(x,x) = A(x, ix) = A(x,y) = 0,$$

ce qui est impossible puisque H est positive non dégénérée. On peut donc prendre $(g_1, \dots, g_n)$ pour base de E sur $\mathbf{C}$; pour cette base, H sera donnée par une formule :

$$H\Big(\sum_{\alpha=1}^{n} z_\alpha g_\alpha, \sum_{\alpha=1}^{n} w_\alpha g_\alpha\Big) = \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} h_{\alpha\beta} \bar{z}_\alpha w_\beta$$

avec $h_{\alpha\beta} = \bar{h}_{\beta\alpha}$. Comme la partie imaginaire A de H s'annule sur $E' \times E'$, H est à valeurs réelles dans $E' \times E'$; donc les $h_{\alpha\beta}$ sont réels et forment une matrice symétrique, qui est celle de la forme quadratique non dégénérée positive induite par $H(x,x)$ sur $E' \times E'$. Posons maintenant

$$\Phi\left(\sum_{\alpha=1}^{n} z_\alpha g_\alpha, \sum_{\alpha=1}^{n} w_\alpha g_\alpha\right) = -\sum_{\alpha,\beta=1}^{n} h_{\alpha\beta} z_\alpha w_\beta \tag{6.9}$$

puis $F = (H+\Phi)/2i$. Alors Φ est une forme **C**-bilinéaire symétrique sur $E \times E$; et F est une application **R**-bilinéaire de $E \times E$ dans **C**, s'annulant sur $E' \times E'$, et
118 telle que $F(x,y)$ soit **C**-linéaire en y pour tout $x \in E$. On a donc :

$$F\left(x, \sum_{\alpha=1}^{n} z_\alpha g_\alpha\right) = \sum_{\alpha=1}^{n} F(x, g_\alpha) z_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{n} \big(F(x,g_\alpha) - F(g_\alpha, x)\big) z_\alpha = \sum_{\alpha_1}^{n} A(x, g_\alpha) z_\alpha,$$

et par suite, si les ξ_ν sont réels :

$$F\left(\sum_{\nu=1}^{2n} \xi_\nu g_\nu, \sum_{\alpha=1}^{n} z_\alpha g_\alpha\right) = -\sum_{\alpha=1}^{n} e_\alpha \xi_{n+\alpha} z_\alpha \tag{6.10}$$

puis, d'après (6.8), lorsque les ξ_ν, η_ν sont réels :

$$F\left(\sum_{\nu=1}^{2n} \xi_\nu g_\nu, \sum_{\nu=1}^{2n} \eta_\nu g_\nu\right) = -\sum_{\alpha=1}^{n} e_\alpha \xi_{n+\alpha} \eta_\alpha - \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} e_\alpha p_{\alpha\beta} \xi_{n+\alpha} \eta_{n+\beta} \tag{6.11}$$

Mais A s'annule sur $E'' \times E''$; donc H, et par suite aussi F, sont bilinéaires symétriques sur $E'' \times E''$; d'après (6.11), cela revient à dire que la matrice $\|e_\alpha p_{\alpha\beta}\|$ est symétrique. D'autre part, on a, d'après (6.9) :

$$F\left(\sum_{\alpha=1}^{2n} z_\alpha g_\alpha, \sum_{\alpha=1}^{2n} z_\alpha g_\alpha\right) = \frac{1}{2i} \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} h_{\alpha\beta} (\bar{z}_\alpha - z_\alpha) z_\beta.$$

Comme les $h_{\alpha\beta}$ sont réels, la partie imaginaire du second membre est $-\sum h_{\alpha\beta} z'_\alpha z'_\beta$ si z'_α désigne la partie imaginaire de z_α ; comme $\|h_{\alpha\beta}\|$ est la matrice d'une forme quadratique non dégénérée positive, il s'ensuit que la partie imaginaire de $F(x,x)$ est < 0, pour $x = \sum z_\alpha g_\alpha$, chaque fois que les parties imaginaires des z_α ne sont pas toutes nulles, c'est-à-dire chaque fois que x n'est pas dans E', donc en particulier si x est un vecteur non nul de E''. Si on exprime cette propriété au moyen de l'expression (6.11) pour F, on trouve que la partie imaginaire de $\|e_\alpha p_{\alpha\beta}\|$ est la matrice d'une forme quadratique non dégénérée positive.

Passons à la réciproque. Les vecteurs $g_1, \dots, g_n, ig_1, \dots, ig_n$ forment une base de E sur **R** ; exprimant $g_1, \dots, g_{2n}$ au moyen de cette base, on voit que, pour que ces derniers vecteurs soient linéairement indépendants sur **R**, il faut et il suffit que la partie imaginaire de la matrice $\|e_\alpha^{-1} z_{\alpha\beta}\|$ soit de rang n ; or l'hypothèse faite zur Z assure qu'il en est bien ainsi. Posons $p_{\alpha\beta} = e_\alpha^{-1} z_{\alpha\beta}$; soit F la forme **R**-bilinéaire sur $E \times E$, à valeurs dans **C**, qui est défini par (6.10), ou, ce qui revient au même,
119 par (6.11). D'après (6.10), $F(x,y)$ est **C**-linéaire en y pour tout $x \in E$; d'après (6.11) et (6.7), on a

$$F(x,y) - F(y,x) = A(x,y).$$

On peut donc appliquer à F le lemme 6.4, et écrire $2iF = H + \Phi$, où H est une forme hermitienne de partie imaginaire A, et Φ est une forme **C**-bilinéaire symétrique. De plus, si F'' désigne la partie imaginaire de F, on a, d'après la formule (6.4) :

$$H(x,x) = -F''(x,x) - F''(ix,ix).$$

Mais (6.11), jointe à l'hypothèse faite sur Z, montre que $F''(x,x) < 0$ chaque fois que x n'est pas dans E' ; comme x et ix ne peuvent être dans E' à la fois si $x \neq 0$, il s'ensuit bien que H est non dégénérée positive.

Corollaire 6.19. *Tout tore complexe de dimension complexe 1 admet une forme de* RIEMANN *non dégénérée.* Cor.

Soit E/G un tel tore ; soit (g_1, g_2) un système minimal de générateurs pour G. Comme E est de dimension 1 sur $\mathbf{C}$, on aura $g_2 = zg_1$, avec $z \in \mathbf{C}$; comme g_1, g_2 sont linéairement indépendants sur $\mathbf{C}$, z n'est pas réel. Le corollaire résulte alors de la seconde partie de la prop. 6.18, en y faisant $n = 1$, et $e_1 = 1$ ou bien $e_1 = -1$ suivant que la partie imaginaire de z est positive ou négative.

6.7. Les hypothèses et notations restant celles de la prop. 6.18 et de sa démonstration, soit B la forme satellite de A sur $G \times G$ qui est définie, pour des ξ_ν, η_ν réels, par la formule n° 7

$$B\Big(\sum_{\nu=1}^{2n} \xi_\nu g_\nu, \sum_{\nu=1}^{2n} \eta_\nu g_\nu\Big) = \sum_{\alpha=1}^{n} e_\alpha \xi_{n+\alpha} \eta_{n+\alpha}. \tag{6.12}$$

Soit de plus ψ un semi-caractère de G attaché à H ; cela veut dire, par définition (cf. §6.3), que la fonction

$$\chi(g) = \psi(g)\mathbf{e}\Big(\frac{1}{2}B(g,g)\Big)$$

est un caractère de G ; on pourra écrire, pour $1 \leq \nu \leq 2n$, $\chi(g_\nu) = \mathbf{e}(\lambda_\nu)$, les λ_ν étant réels. Désignons par L la forme $\mathbf{C}$-linéaire sur E définie par

$$L\Big(\sum_{\alpha=1}^{n} z_\alpha g_\alpha\Big) = -\sum_{\alpha=1}^{n} \lambda_\alpha z_\alpha.$$

Alors $\chi(g)$ coïncidera avec $\mathbf{e}(-L(g))$ sur le sous-groupe $G' = G \cap E'$ de G qui est engendré par $g_1, \ldots, g_n$; autrement dit, si on pose 120

$$\chi'(g) = \chi(g)\mathbf{e}(L(g)),$$

χ' est un homomorphisme de G dans $\mathbf{C}^*$ qui prend la valeurs 1 sur G'. On posera $\gamma_\alpha = \chi'(g_{n+\alpha})$, pour $1 \leq \alpha \leq n$.

On va maintenant déterminer toutes les fonctions thêta holomorphes de type (H, ψ, Φ, L). Une telle fonction est une fonction holomorphe, non identiquement nulle, qui satisfait, pour tout $g \in G$, à la relation (6.5), c'est-à-dire ici à la relation

$$\theta(x+g) = \theta(x)\chi'(g)\mathbf{e}\Big(F(g,x) + \frac{1}{2}F(g,g) + \frac{1}{2}B(g,g)\Big).$$

Compte tenu des formules précédentes, et en particulier de (6.10), (6.11) et (6.12), cela revient à dire qu'on a, chaque fois que $g' \in G'$ et que $s_1, \ldots, s_n$ sont entiers :

$$\begin{aligned}&\theta\Big(\sum_{\alpha=1}^{n} z_\alpha g_\alpha + g' + \sum_{\alpha=1}^{n} s_\alpha g_{n+\alpha}\Big) = \\ &= \theta\Big(\sum_{\alpha=1}^{n} z_\alpha g_\alpha\Big) \cdot \prod_{\alpha=1}^{n} \gamma_\alpha^{s_\alpha} \cdot \mathbf{e}\Big(-\sum_{\alpha=1}^{n} e_\alpha s_\alpha z_\alpha - \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{n} e_\alpha p_{\alpha\beta} s_\alpha s_\beta\Big)\end{aligned} \tag{6.13}$$

Cette formule montre que $\theta(\sum z_\alpha g_\alpha)$ est une fonction entière de $z_1, \ldots, z_n$ périodique de période 1 en chacune de ces variables ; elle peut donc se développer en série de FOURIER partout convergente :

$$\theta\Big(\sum_{\alpha=1}^{n} z_\alpha g_\alpha\Big) = \sum_{r_1,\ldots,r_n=-\infty}^{+\infty} C(r_1, \ldots, r_n)\mathbf{e}\Big(\sum_{\alpha=1}^{n} r_\alpha z_\alpha\Big)$$

Remplaçant θ par cette série dans (6.13), et identifiant les séries de FOURIER qui apparaissent dans les deux membres, on trouve, par un calcul immédiat :

$$C(r_\alpha + e_\alpha s_\alpha) = C(r_\alpha) \prod_{\alpha=1}^{n} \gamma_\alpha^{-s_\alpha} \mathbf{e}\Big(\frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} e_\alpha p_{\alpha\beta} s_\alpha s_\beta + \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} p_{\alpha\beta} r_\alpha s_\beta\Big),$$

où on a écrit $C(r_\alpha)$ au lieu de $C(r_1, \ldots, r_n)$ et de même au premier membre. Cette formule fait voir que tous les coefficients $C(r_\alpha)$ sont complètement déterminés par leurs valeurs pour $0 \le r_\alpha < |e_\alpha|$ $(1 \le \alpha \le n)$; les fonctions entières qui satisfont
121 à (6.13) forment donc un espace vectoriel sur $\mathbf{C}$ de dimension au plus égale à $e = |e_1 \cdots e_n|$, c'est-à-dire au pfaffien de A sur $G \times G$ (cf. §6.1). Pour démontrer que cet espace a la dimension e, il suffit alors de montrer que chacune des séries de FOURIER

(6.14)
$$\sum_{r_1,\ldots,r_n=-\infty}^{+\infty} \Big(\prod_{\alpha=1}^{n} \gamma_\alpha^{-s_\alpha}\Big) \mathbf{e}\Big(\sum_{\alpha=1}^{n} (r_\alpha + e_\alpha s_\alpha) z_\alpha + \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} e_\alpha p_{\alpha\beta} s_\alpha s_\beta + \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} p_{\alpha\beta} r_\alpha s_\beta\Big)$$

est partout convergente et définit une solution de (6.13) ; en effet, il est clair que celles de ces séries qu'on obtient en prenant $0 \le r_\alpha < |e_\alpha|$ pour $1 \le \alpha \le n$ sont formellement linéairement indépendantes, et définissent donc des fonctions linéairement indépendantes sur $\mathbf{C}$ pourvu qu'elles convergent. Or on vérifie immédiatement que toute série (6.14) satisfait formellement à (6.13) ; cela résulte même déjà, en réalité, des calculs ci-dessus. Quant à la convergence des séries (6.14), c'est une conséquence du fait que la partie imaginaire de la matrice $\|e_\alpha p_{\alpha\beta}\|$ est celle d'une forme quadratique non dégénérée positive ; en effet, si on désigne par ε la plus petite des valeurs propres de cette dernière forme, on voit facilement que, pour tout δ satisfaisant à $0 < \delta < \pi\varepsilon$, et pour tout compact K dans E, il y aura une constante $C > 0$ telle que la série (6.14) soit majorée terme à terme dans K par la série

$$\sum C e^{-\delta(s_1^2 + \cdots + s_n^2)}$$

dont la convergence est bien connue. Les séries de la forme (6.14) s'appellent « séries thêta ».

De là on déduit aisément le résultat suivant :

Prop. 7 **Proposition 6.20.** *Soient E/G un tore complexe, et H une forme de* RIEMANN *pour E/G. Soient A la partie imaginaire de H et E_0 son noyau. Soient ψ un semi-caractère de G attaché à H, Φ une forme $\mathbf{C}$-bilinéaire symétrique sur $E \times E$, et L une forme $\mathbf{C}$-linéaire sur E. On suppose que ψ induise la constante 1 sur le groupe $G_0 = G \cap E_0$. Alors la constante 0 et les fonctions thêta holomorphes de type (H, ψ, Φ, L) relativement à G forment un espace vectoriel sur $\mathbf{C}$, de dimension égale au pfaffien réduit de A sur $G \times G$.*

Si θ' est une fonction thêta triviale de type $(0, 1, \Phi, L)$, la prop. 6.6 montre que $\theta \mapsto \theta\theta'$ est un isomorphisme de l'espace des fonction thêta holomorphes, réduites de type (H, ψ), sur l'espace des fonction thêta holomorphes de type (H, ψ, Φ, L) ; la dimension de l'espace formé de ces dernières et de la constante 0 ne dépend
122 donc pas de Φ ni de L. Ce qui précède, joint à la prop. 6.18, contient donc déjà la démonstration de notre proposition dans le cas où H est non dégénérée. Le cas général se déduit facilement de là par passage au quotient. Il suffit en effet, d'après ce qu'on vient de voir, de considérer le cas $\Phi = 0, L = 0$. Posons $E^* = E/E_0$; soit H^* la forme hermitienne sur $E^* \times E^*$ qui se déduit de H par passage au quotient ; on vérifie sans peine que la fonction ψ^* sur G^* qui se déduit de ψ par passage au quotient est un semi-caractère de G^* attaché à H^*. D'autre part, d'après la prop.

6.10, toute fonction thêta holomorphe, réduite de type (H, ψ), admet pour périodes tous les vecteurs de E_0 ; pas passage au quotient, elle définit donc une fonction sur E^*, dont on vérifie aussitôt que c'est une fonction thêta holomorphe, réduite de type (H^*, ψ^*) ; et réciproquement une telle fonction définit sur E une fonction thêta de type (H, ψ). Comme H^* est non dégénérée, le résultat s'ensuit d'après ce qu'on a déjà démontré plus haut.

D'après les résultats des §§6.3-6.5, les conditions relatives à H, ψ, Φ et L qui figurent dans l'énoncé de la prop. 6.20 sont nécessaires pour qu'il existe une fonction thêta holomorphe de type (H, ψ, Φ, L). La prop. 6.20 fait voir entre autre que ces conditions sont suffisantes.

Convenons de dire qu'une classe de cohomologie de bidegré $(1,1)$ sur E/G est *positive* si la forme hermitienne H qui lui est canoniquement associée est positive. Compte tenu du th. 6.13, nous avons démontré le résultat suivant:

Théorème 6.21. *Soit* $\mathbf{a}$ *une classe de cohomologie entière de bidegré* $(1,1)$ *sur le tore complexe* E/G. *Pour qu'il y ait sur* E/G *un diviseur positif* D *tel que* $\mathbf{a}(D) = \mathbf{a}$, *il faut et il suffit que* $\mathbf{a}$ *soit positive.* Th. 2

6.8. Soit E/G un tore complexe. Il est clair que, si H et H' sont des formes de n° 8
RIEMANN pour E/G, il en est de même de $H + H'$ et que le noyau de $H + H'$ est l'intersection des noyaux de H et de H'. Il s'ensuit que, parmi les noyaux des formes de RIEMANN de E/G, il y en a un E_0 qui est contenu dans tous les autres ; E_0 sera appelée *le noyau de E relativement au tore E/G* et son image dans E/G sera appelée *le noyau de E/G*. La dimension de l'espace $E^* = E/E_0$ sur $\mathbf{C}$ sera appelée *le rang de E/G*. Une forme de RIEMANN de noyau E_0 pour E/G sera appelé une *forme dominante* pour E/G. Si H est une forme de RIEMANN quelconque pour E/G, son noyau contient E_0, et H détermine donc par passage au quotient une forme H^* sur $E^* \times E^*$; si G^* est l'image de G dans E^*, H^* est une forme de RIEMANN pour E^*/G^* ; pour que H soit une forme dominante pour E/G, il faut et il suffit que H^* soit non dégénérée. Si H est une forme dominante, et H' une forme de RIEMANN quelconque, pour E/G, il y a une constante $\lambda > 0$ telle que 123
$H'(x, x) \leq \lambda H(x, x)$ quel que soit $x \in E$, comme on le voit en passant au quotient suivant E_0.

La prop. 6.18 montre qu'il existe, pour tout n, des tores complexes de dimension complexe n et de rang n. Le corollaire 6.19 de cette proposition montre même que tout tore complexe de dimension complexe 1 est de rang 1 ; en revanche, on verra plus loin que, chaque fois que $n \geq 2$ et $0 \leq r \leq n$, il existe des tores complexes de dimension complexe n et de rang r. Un tore complexe dont le rang est égal à sa dimension s'appellera une *variété abélienne* ; autrement dit, un tore complexe est une variété abélienne s'il possède une forme de RIEMANN non dégénérée. La proposition suivante fait voir que cette notion ne diffère pas de celle de variété de HODGE, appliquée au cas des tores complexes :

Proposition 6.22. *Pour qu'un tore complexe soit une variété abélienne, il faut et il suffit que ce soit une variété de* HODGE. Prop. 8

C'est nécessaire ; car, si H est une forme de RIEMANN non dégénérée pour le tore complexe E/G, la forme Ω de bidegré $(1,1)$, invariante par translation, qui est canoniquement associée à H est de classe entière et détermine sur E/G une structure kählérienne. Réciproquement, soit Ω une forme fermée de bidegrée $(1,1)$, de classe entière, invariante ou non par translation, qui détermine une structure kählérienne sur E/G. Pour un choix quelconque d'une base de E sur $\mathbf{C}$, on pourra l'écrire :

$$\Omega = \frac{i}{2} \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} f_{\alpha\beta} dz_\beta \wedge d\bar{z}_\alpha$$

où les $f_{\alpha\beta}$ sont des fonction sur E/G telles que $\|f_{\alpha\beta}\|$ soit, en tout point de E/G, la matrice d'une forme hermitienne non dégénérée positive. Alors, d'après le §4.2, la forme homologue à Ω, harmonique par rapport à n'importe quel ds^2 invariant par translation, sera donnée par :

$$\Omega_0 = \frac{i}{2} \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} \mathfrak{M}[f_{\alpha\beta}] dz_\beta \wedge d\bar{z}_\alpha$$

où $\mathfrak{M}$ désigne la valeur moyenne prise sur E/G. Il est clair alors que la forme hermitienne H canoniquement associée à Ω_0 est non dégénérée positive ; comme Ω est de classe entière, il en est de même de Ω_0, et par suite H est une forme de Riemann pour E/G

On va maintenant appliquer les notions ci-dessus à l'étude du corps des fonctions
124 méromorphes sur un tore complexe. Le théorème suivant permet de se ramener toujours, dans cette étude, au cas des variétés abéliennes.

Th. 3 **Théorème 6.23.** *Soit E/G un tore complexe ; soit E_0 le noyau de E relativement à E/G ; soit $E^* = E/E_0$; soit G^* l'image de G dans E^*. Alors E^*/G^* est une variété abélienne ; et l'application canonique f de E sur E^* détermine, par passage au quotient, un homomorphisme h de E/G sur E^*/G^* dont le noyau N est le noyau du tore complexe E/G. De plus, toute fonction thêta réduite relative à E/G est de la forme $\theta \circ f$, où θ est une fonction thêta réduite relative à E^*/G^* ; en particulier, l'application $\varphi \mapsto \varphi \circ h$ détermine un isomorphisme du corps des fonctions méromorphes sur E^*/G^* sur le corps des fonction méromorphes sur E/G.*

La première partie du théorème résulte immédiatement de ce qui précède. D'après le th. 6.13, toute fonction thêta réduite relative à E/G est quotient de deux fonctions thêta réduites holomorphes ; comme chacune de celles-ci, d'après la prop. 6.10 et la définition de E_0, admet pour périodes tous les vecteurs de E_0, il s'ensuit bien qu'une telle fonction peut s'écrire $\theta \circ f$, et il est immédiat alors que θ est une fonction thêta réduite relative à E^*/G^*. La dernière assertion résulte de là, puisqu'une fonction méromorphe sur E/G peut se considérer comme une fonction thêta réduite de type $(0, 1)$.

Th. 4 **Théorème 6.24.** *Soit E/G une variété abélienne de dimension complexe n. Alors le corps K des fonction méromorphes sur E/G est un corps de fonctions algébriques de dimension n sur $\mathbf{C}$, c'est-à-dire une extension algébrique finie d'une extension purement transcendante de $\mathbf{C}$ de degré de transcendance n.*

On va montrer d'abord que le degré de transcendance de K sur $\mathbf{C}$ est $\geq n$. En effet, soit H une forme de Riemann non dégénérée pour E/G ; soit ψ un semi-caractère de G attaché à H ; soit θ une fonction thêta holomorphe, réduite de type (H, ψ) ; soit D son diviseur sur E/G. D'après le cor. 6.8, la fonction

$$f(x) = \theta(x + a)\theta(x - a)\theta(x)^{-2}$$

est une fonction méromorphe sur E/G quel que soit $a \in E$. D'après le cor. 6.16, si X et X' sont deux composantes de D, l'ensemble des translations sur E/G qui transforment X en X' est vide ou est une classe suivant un sous-groupe fermé de E/G ; on en conclut aussitôt qu'il y a une infinité de vecteurs $a \in E$ tels que les diviseurs des fonctions $\theta(x + a), \theta(x - a)$ sur E/G n'aient aucune composante commune avec D ; le diviseur de f sera alors de la forme $D' - 2D$, où D' est positif

125 et sans composante commune avec D. Le cor. 6.17, montre alors que les translations sur E/G qui laissent f invariante forment un groups fini.

Supposons f ainsi choisie. En tout point b tel que $\theta(b) \neq 0$, la différentielle df définit un covecteur, qu'on peut, au moyen de la translation qui amène b en 0, identifier avec un covecteur $\delta(b)$ au point 0. Montrons que, parmi les covecteurs $\delta(b)$, il y en a n linéairement indépendants. S'il n'en était pas ainsi, en effet, il y aurait un vecteur $c \neq 0$ dans E tel que, pour tout point b où θ ne s'annule pas, on ait $D_\tau f(b + \tau c) = 0$, où D_τ désigne l'opérateur $d/d\tau$ au point $\tau = 0$. Mais cela entraînerait que f est invariante par la translation $\pi(\tau c)$ quel que soit $\tau \in \mathbf{C}$, contrairement à ce qu'on a établi plus haut. Il y a donc n points $b_1, \ldots, b_n$ où θ ne s'annule pas et tels que les $\delta(b_i)$ soient linéairement indépendants ; il revient au même de dire que les différentielles des fonctions $f(x + b_i)$ sont linéairement indépendants au point 0. Il y a donc, d'après le théorème des fonctions implicites, un voisinage de 0, où ces fonctions sont holomorphes et dont l'image par l'application

$$x \mapsto (f(x + b_1), \ldots, f(x + b_n))$$

contient un ouvert de $\mathbf{C}^n$. Comme un polynome ne peut s'annuler dans un ouvert sans être identiquement nul, il s'ensuit que les n fonctions $f(x + b_i)$ sont algébriquement indépendantes.

Montrons que le degré de transcendance de K ne peut être $> n$, Soient en effet $f, f_1, \ldots, f_n$ $n+1$ fonctions méromorphes sur E/G ; on peut mettre leurs diviseurs sous la forme :

$$\operatorname{div}(f) = D - D_0, \quad \operatorname{div}(f_i) = D_i - D_0,$$

où $D, D_0, \ldots, D_n$ sont des diviseurs positifs. Soit θ_0 une fonction thêta réduite de diviseur D_0 ; soit (H, ψ) son type ; alors les fonction $\theta = f\theta_0, \theta_i = f_i\theta_0$, sont des fonctions thêta de type (H, ψ), de diviseurs respectifs D, D_i. Quel que soit l'entier $\nu \geq 1$, tout monome de degré ν en $\theta, \theta_0, \ldots, \theta_n$ est une fonction thêta réduite de type $(\nu H, \psi^\nu)$; le nombre de ces monomes est égal à :

$$\binom{\nu + n + 1}{n + 1} = \frac{(\nu + n + 1)(\nu + n) \cdots (\nu + 1)}{(n + 1)!}$$

Mais, sie e est le pfaffien réduit de la partie imaginaire A de H, et $2m$ son rang, le pfaffien réduit de νA est $\nu^m e$; la prop. 6.20 montre donc que, parmi les monomes en question, il peut y en avoir au plus $\nu^m e$ qui soient linéairement indépendants sur $\mathbf{C}$. Comme $m \leq n$, il s'ensuit que, dès que ν est assez grand, ces monomes ne peuvent être tous linéairement indépendants. Cela veut dire qu'il y a, dès que ν est 126 assez grand, un polynome homogène P de degré ν, non identiquement nul, tel que $P(\theta, \theta_0, \ldots, \theta_n) = 0$, ou, ce qui revient au même, $P(f, 1, f_1, \ldots, f_n) = 0$.

Supposons maintenant que $f_1, \ldots, f_n$ soient des fonctions méromorphes sur E/G, algébriquement indépendantes sur $\mathbf{C}$; on va montrer que K est de degré fini sur $\mathbf{C}(f_1, \ldots, f_n)$. Pour cela, mettons de nouveau les diviseurs des f_i sous la forme $D_i - D_0$, où $D_0, \ldots, D_n$ sont des diviseurs positifs ; soit θ_0 une fonction thêta réduite de diviseur D_0 ; soit (H, ψ) son type, qui sera aussi le type des fonction thêta holomorphes $\theta_i = f_i\theta_0$. D'après le cor. 6.17, les vecteurs du noyau E_0 de H sont des périodes pour les f_i ; si on pose $E^* = E/E_0$, et que G^* soit l'image de G dans E^*, les f_i s'identifient alors, par passage au quotient, à des fonctions méromorphes sur le tore complexe E^*/G^*, et ne peuvent donc, d'après ce qu'on vient de démontrer, être algébriquement indépendantes si ce tore est de dimension complexe $< n$, c'est-à-dire si $E_0 \neq \{0\}$. Il s'ensuit que H est non dégénérée. Soient maintenant $f'_1, \ldots, f'_r$ des fonctions de K ; mettons leurs diviseurs sous la forme $D'_\rho - D'_0$, où $D'_0, \ldots, D'_r$ sont des diviseurs positifs ; soit (H', ψ') le type de la fonction thêta réduite de diviseur D'_0 ; ce sera aussi le type des fonctions $\theta'_\rho = f'_\rho \theta'_0$. Si M parcourt l'ensemble des monomes de degré ν en $n+1$ indéterminées $X_0, \dots, X_n$, les fonctions $\theta'_\rho M(\theta_0, \dots, \theta_n)$ seront toutes des fonctions thêta réduites de type $(H' + \nu H, \psi' \psi^\nu)$; elles sont au nombre de $r(\nu+n)\cdots(\nu+1)/n!$; comme précédemment, elles ne peuvent être linéairement indépendantes si leur nombres dépasse le pfaffien de la partie imaginaire de $H' + \nu H$ sur $G \times G$. Mais, si A et A' sont les parties imaginaires de H et H', on voit, en prenant pour base un système minimal quelconque de générateurs de G, que le pfaffien de $A' + \nu A$ est un polynome homogène de degré n par rapport aux coefficients de la matrice de la forme $A' + \nu A$, donc un polynome de degré n en ν où le coefficient de ν^n est le pfaffien e de A. Si donc on suppose que $r > n!e$, il y aura une relation linéaire, à coefficients constants non tous nuls, entre les fonctions $\theta'_\rho M(\theta_0, \dots, \theta_n)$ dès que ν est assez grand. Cela revient à dire qu'il y aura, dès que ν est assez grand, une relation linéaire entre les f'_ρ dont les coefficients seront des polynomes de degré $\leq \nu$, non tous nuls, en $f_1, \dots, f_n$. Autrement dit, K est une extension algébrique finie de $\mathbf{C}(f_1, \dots, f_n)$, de degré $\leq n!e$.

nº 9 6.9. Soient $\theta_0, \dots, \theta_N$ des fonctions thêta holomorphes de même type (H, ψ, Φ, L) ; soit E' l'ensemble des points de E où elles ne sont pas toutes nulles ; π désignant comme toujours la projection canonique de E sur E/G, on aura $E' = \pi^{-1}(T')$, où T' est le complémentaire sur E/G de l'intersection des supports des diviseurs
127 $\mathrm{div}_{E/G}(\theta_\nu)$. Considérons l'application de E' dans l'espace projectif complexe $\mathbf{P}^N$ de dimension N qui, à tout $x \in E'$, fait correspondre le point de coordonnées homogènes $(\theta_0(x), \dots, \theta_N(x))$. Il est clair que c'est là une application holomorphe de E' dans $\mathbf{P}^N$, admettant pour périodes tous les vecteurs de G ; par passage au quotient, elle détermine donc une application holomorphe ϑ de T' dans $\mathbf{P}^N$. Si $T' = E/G$, on dira, pas abus de langage, que ϑ est une application *partout définie* de E/G dans $\mathbf{P}^N$, déterminée par $\theta_0, \dots, \theta_N$. On va montrer qu'on peut choisir les θ_ν de manière que ϑ soit partout définie, injective et partout birégulière, ou autrement dit soit un isomorphisme de E/G sur son image dans $\mathbf{P}^N$, celle-ci étant dans ces conditions une sous-variété algébrique de $\mathbf{P}^N$ sans point multiple. On s'appuyera sur les lemmes suivants :

Lemme 5 **Lemme 6.25.** *Soient H une forme de* RIEMANN *non dégénérée pour E/G et ψ un semi-caractère de G attaché à H. Alors il existe une fonction thêta holomorphe réduite de type (H, ψ) dont le diviseur sur E/G n'ait que des composantes de multiplicité 1 et ne soit invariant par aucune translation autre que* 0 *sur E/G.*

Soit V l'espace vectoriel formé de la constante 0 et des fonctions thêta holomorphes de type (H, ψ) relativement à E/G ; d'après la prop. 6.20, V est de dimension égale au pfaffien e de la partie imaginaire A de H sur $G \times G$. Soit θ l'une des fonctions thêta en question ; soit D son diviseur sur E/G ; d'après le cor. 6.16, le groupe Γ des translations qui laissent D invariant est fini ; le groupe $G' = \pi^{-1}(\Gamma)$ est donc discret dans E, et G est d'indice fini dans G', égal à l'ordre ν de Γ. Pour $g' \in G'$, $\theta(x + g')$ est, d'après la prop. 6.7, une fonction thêta pour E/G, dont le type $(H, \psi_1, 0, L_1)$ est donné par cette proposition ; par définition de G', cette fonction a même diviseur D que θ sur E/G ; d'après le cor. 6.12, on a donc $\psi_1 = \psi$, et $\theta(x+g')/\theta(x)$ est une fonction thêta triviale de type $(0, 1, 0, L_1)$, donc de la forme $\mathbf{e}[L_1(x) + c]$, où c est une constante. Autrement dit, θ est aussi une fonction thêta relativement au tore E/G'. Soit (H', ψ', Φ', L') son type relativement à E/G' ; la formule (6.5) montre qu'alors, si ψ_0 est la fonction induite par ψ' sur G, θ est de type (H', ψ_0, Φ', L') relativement à E/G ; donc on a $\Phi' = 0, L' = 0, H' = H$, et ψ' induit ψ sur G ; cela entraîne en particulier que A est à valeurs entières sur $G' \times G'$;

alors, si e' est le pfaffien de A sur $G' \times G'$, on a $e = \nu e'$; donc ν divise e, et par suite G' est contenu dans le groupe $e^{-1}G$ formé des vecteurs $e^{-1}g$ pour $g \in G$. Il n'y a donc pour G' qu'un nombre fini de choix possibles, G et H étant supposés donnés. Pour un choix donné de G', soit ψ'_0 un semi-caractère de G' attaché à H,
induisant ψ sur G, tout autre semi-caractère ψ' ayant ces mêmes propriétés sera 128
de la forme $\psi'_0 \circ \chi$, où χ est un caractère de G' induisant la constante 1 sur G, ou autrement dit un caractère de G'/G ; si G, H, G' et ψ sont donnés, il n'y a donc pour ψ' qu'un nombre fini de choix possibles. Pour un choix donné de G' et ψ', les fonctions thêta holomorphes réduites de type (H, ψ') relativement à E/G' forment, avec la constante 0, un sous-espace vectoriel V' de V, de dimension $e' = e/\nu$, si ν est l'indice de G dans G'. Par suite, les fonctions thêta appartenant à V et dont le diviseur n'est invariant par aucune translation autre que 0 dans E/G forment dans V le complémentaire d'une réunion finie de sous-espaces vectoriels de V de dimension $< e$; cet ensemble est ouvert et dense dans V. Si θ appartient à cet ensemble, il en sera de même de tout $\theta' \in V$ suffisamment voisin de θ au sens de la topologie de V.

La fonction θ étant ainsi choisie, soient D son diviseur sur E/G, D_λ les composantes de D, n_λ leurs multiplicités ; pour chaque λ, soit θ_λ une fonction thêta réduite de diviseur D_λ. D'après le th. 6.13, on aura $\theta = c \prod_\lambda \theta_\lambda^{n_\lambda}$, c étant une constante. Posons :

$$\theta'(x) = c \prod_\lambda \prod_{i=1}^{n_\lambda} \theta_\lambda(x + a_{\lambda i}) \quad ;$$

d'après le corollaire 6.8, θ' sera une fonction thêta de même type (H, ψ) que θ pourvu que les $a_{\lambda i}$ satisfassent, quel que soit λ, à la condition $\sum_i a_{\lambda i} = 0$; donc, lorsqu'il en est ainsi, θ' appartient à l'espace V ; de plus, si on exprime θ' au moyen d'une base de V, il est immédiat que les coefficients seront dans ces conditions des fonctions continues (et même holomorphes) des $a_{\lambda i}$. On en conclut, d'après ce qui précède, que le diviseur D' de θ' sur E/G ne sera invariant pas aucune translation autre que 0 pourvu que les $a_{\lambda i}$ soient pris assez voisins de 0.

Pour chaque λ, soit $(H_\lambda, \psi_\lambda)$ le type de θ_λ ; soit E_λ le noyau de H_λ ; d'après le cor. 6.16, le groupe Γ_λ des translations qui laissent D_λ invariant admet $\pi(E_\lambda)$ pour sous-groupe d'indice fini ; de plus, si pour $\mu \neq \lambda$, D_μ est un translaté de D_λ, on a $\Gamma_\mu = \Gamma_\lambda$, et les translations qui amènent D_λ sur D_μ forment une classe suivant Γ_λ, autre que Γ_λ. De là on conclut immédiatement, en premier lieu, que, si les $a_{\lambda i}$ sont assez voisins de 0, les diviseurs de $\theta_\lambda(x + a_{\lambda i})$ et de $\theta_\mu(x + a_{\mu i})$ sur E/G sont des diviseurs irréductibles distincts chaque fois que $\lambda \neq \mu$, puis que si on prend, pour chaque λ, les $a_{\lambda i}$ suffisamment voisins de 0 et satisfaisant aux conditions

$$\sum_{i=1}^{n_\lambda} a_{\lambda i} = 0; \quad a_{\lambda i} - a_{\lambda j} \notin E \quad (1 \leq i < j \leq n_\lambda),$$

les diviseurs de $\theta_\lambda(x + a_{\lambda i})$ et $\theta_\lambda(x + a_{\lambda j})$ sur E/G sont, pour $i \neq j$, des diviseurs 129
irréductibles distincts. Les $a_{\lambda i}$ étant ainsi choisie, ϑ' aura donc bien les propriétés annoncées dans le lemme.

Lemme 6.26. *Soit θ une fonction thêta holomorphe réduite de type (H, ψ) relative-* Lemme 6
ment à E/G ; soit D son diviseur sur E/G. On suppose que H est non dégénérée et que D n'a que des composantes de multiplicité 1. Pour tout $b \in E$ tel que $\theta(b) = 0$, soit $\delta(b)$ le covecteur au point 0 déduit par translation du covecteur déterminé en b par la différentielle $d\theta$. Alors, parmi les covecteurs $\delta(b)$, il y a n linéairement indépendants.

Supposons qu'il n'en soit pas ainsi. Il y a alors un vecteur $a \neq 0$ dans E tel que l'on ait, en tout point b tel que $\theta(b) = 0, d\theta(b; a) = 0$, où $d\theta(b; a)$ désigne la valeur en a de la forme linéaire sur E déterminée par le covecteur $\delta(b)$. D'après le cor. 6.16, la composante connexe de chacun des groupes de translations sur E/G qui laissent invariante l'une des composantes de D est de la forme $\pi(E')$, où E' est un sous-espace vectoriel de E ; de plus, d'après ce même corollaire, l'intersection de ces groupes est un sous-groupe fini de E/G, puisque H est non dgénérée et que par suite l'intersection des E' se réduit à $\{0\}$. Il y a donc une composante D_0 de D telle que, si $\pi(E_0)$ est la composante connexe du groupe des tranlations qui la laissent invariante, l'espace vectoriel E_0 ne contienne pas a ; dans ces conditions, il y aura un $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $\tau \in \mathbf{C}$ satisfaisant à $0 < |\tau| < \varepsilon$, le transformé D_τ de D_0 par la translation $\pi(\tau a)$ ne coïncide pas avec D_0. Soit maintenant b un point de E tel que $\pi(b)$ soit simple sur D_0 et n'appartienne à aucune composante de D autre que D_0 ; il y a de tels points, d'après le th. A.19. On aura alors $d\theta \neq 0$ en b, et il y aura un vecteur a' tel que $d\theta(b; a') \neq 0$. Prenons une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E, avec $e_1 = a, e_n = a'$; pour cette base, soient $b_1, \ldots, b_n$ les coordonnées de b. D'après le lemme de Weierstrass (Appendice, lemme A.3), on pourra, au voisinage de b, écrire θ sous la forme :

$$\theta(z) = F(z)\,(z_n - b_n - f(z_1, \ldots, z_{n-1}))$$

où F est holomorphe et $\neq 0$ au voisinage de b, et f holomorphe au voisinage de $(b_1, \ldots, b_{n-1})$ dans $\mathbf{C}^{n-1}$. Si on identifie, au moyen de π, un voisinage suffisamment petit de b dans E avec son image par π dans E/G, on peut dire que D_0 coïncide au voisinage de b avec l'ensemble $\theta = 0$, c'est-à-dire avec l'ensemble défini par

$$z_n - b_n = f(z_1, \ldots, z_{n-1}).$$

130 Si maintenant on exprime qu'au voisinage de b on a $d\theta(b'; a) = 0$ pour tout b' tel que $\theta(b') = 0$, on trouve qu'on a $\partial f/\partial z_1 = 0$ au voisinage de b. On en conclut que, pour τ suffisamment petit, le diviseur D_τ déduit de D_0 par la translation $\pi(\tau a)$ contient un voisinage de b sur D_0, ce qui, compte tenu du cor. A.21, contredit ce qu'on a démontré plus haut.

nº 10 6.10. Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le théorème que nous avions en vue.

Th. 5 **Théorème 6.27.** *Soit E/G une variété abélienne, H une forme de* Riemann *non dégénérée pour E/G, et ψ un semi-caractère de G attaché à H. Soit $(\theta_0, \ldots, \theta_N)$ une base pour l'espace des fonctions thêta holomorphes réduites de type $(3H, \psi^3)$ pour E/G. Alors $\theta_0, \ldots, \theta_N$ déterminent une application ϑ partout définie, biunivoque et partout birégulière de E/G sur une sous-variété algébrique sans point multiple V de $\mathbf{P}^N$; de plus, l'application $f \mapsto f \circ \vartheta$ détermine un isomorphisme du corps L des fonctions rationelles sur V sur le corps K des fonctions méromorphes sur E/G.*

Soit θ une fonction thêta de type (H, ψ) ayant les propriétés énoncées dans le lemme 6.25 ; soit D son diviseur. Posons :

$$\varphi(x; a, u, v) = \theta(x + u)\theta(x - a + v)\theta(x + a - u - v) \quad ;$$

il résulte du cor. 6.8, que c'est là, quels que soient a, u, v, une fonction thêta de type $(3H, \psi^3)$, donc combinaison linéaire de $\theta_0, \ldots, \theta_N$ à coefficients constants. Quel que soit a, on peut choisir v tel que $\theta(v) \neq 0$, puis u tel que l'on ait

$$\theta(a + u)\theta(2a - u - v) \neq 0 \quad ;$$

alors φ ne s'annule pas en a ; les fonctions $\theta_0, \ldots, \theta_N$ ne peuvent donc toutes s'y annuler. Cela montre que ϑ est partout définie.

Soient a, b des points de E ayant des images distinctes dans E/G ; en posant $t = \pi(a-n)$, on aura $t \neq 0$; d'après la définition de θ au moyen du lemme 6.25, le transformé D_t de D par la translation t ne coïncidera donc pas avec D. Comme D et D_t on même nombre de composantes, et que celles-ci sont toutes de multiplicité 1, il s'ensuit qu'il y a au moins une composante de D qui n'est pas une composante de D_t ; l'ensemble des points de cette composante qui appartienne au suupport de D_t est donc rare sur elle (Appendice cor. A.21), de sorte qu'on peut choisir $v \in E$
tel que $\pi(v)$ soit sur cette composante et ne soit pas sur $|D_t|$. Autrement dit, on 131
aura $\theta(v) = 0, \theta(v-a+b) \neq 0$. Prenons alors u tel que

$$\theta(b+u)\theta(b+a-u-v) \neq 0.$$

Alors la fonction $\varphi(x; a, u, v)$ s'annule en a et non en b. Si on l'écrit sous la forme $L(\theta_0, \ldots, \theta_N)$, où L est une forme linéaire, on en conclut que $\vartheta(a)$ est dans l'hyperplan défini par $L = 0$, et que $\vartheta(b)$ n'y est pas contenu. Donc ϑ est injective.

D'après le lemme 6.26, il y a, avec les notations de ce lemme, n points $b_1, \ldots, b_n$ tels que $\theta(b_i) = 0$ et que les covecteurs $\delta(b_i)$ soient indépendants, ce qui revient à dire que les différentielles des fonction $\theta(x+b_i)$ sont linéairement indépendantes au point 0. Soit de plus b_0 un point tel que $\theta(b_0) \neq 0$; soit a un point quelconque de E ; et soit u un point tel que l'on ait :

$$\theta(a+u)\prod_{i=0}^{n}\theta(2a-u-b_i) \neq 0.$$

Posons $\varphi_i(x) = \varphi(x; a, u, b_i)$ pour $0 \leq i \leq n$; on pourra donc écrire $\varphi_i = L_i(\theta_0, \ldots, \theta_N)$, où les L_i sont $n+1$ formes linéaires. Ils est immédiat, dans ces conditions, que les n fonctions $f_i = \varphi_i/\varphi_0$, pour $1 \leq i \leq n$, sont holomorphes en a et s'y annulent, et que leurs différentielles y sont linéairement indépendantes. Cela revient à dire qu'en désignant par f'_i les n fonctions méromorphes L_i/L_0 dans $\mathbf{P}^N$, les fonctions $f'_i \circ \vartheta$ sont holomorphes en $\pi(a)$, s'y annulent, et y ont des différentielles linéairement indépendantes. Par suite, ϑ est localement birégulière en ce point (cf. 3.1).

Puisque ϑ est une application injective de la variété compacte E/G dans $\mathbf{P}^N$, c'est un homéomorphisme de E/G sur son image ; puisqu'elle est localement birégulière, il s'ensuit que $\vartheta(E/G)$ est une sous-variété de $\mathbf{P}^N$, et que ϑ est un isomorphisme de E/G sur $\vartheta(E/G)$ au sens des structures analytiques complexes. Soit $\mathfrak{P}$ l'idéal de l'anneau $\mathbf{C}[X_0, \ldots, X_N]$ engendré par les polynomes homogènes P qui s'annulent sur $\vartheta(E/G)$, ou autrement dit qui sont tels que l'on ait identiquement $P(\theta_0, \ldots, \theta_N) = 0$; soit V l'ensemble des zéros de $\mathfrak{P}$. Il est clair que $\mathfrak{P}$ est un idéal premier homogène, donc que V est une variété algébrique ; plus précisément, V est la plus petite variété algébrique et même le plus petit ensemble algébrique fermé (réunion finie de variétés algébriques) contenant $\vartheta(E/G)$. Comme l'ensemble des points multiples de V est un tel ensemble, il s'ensuit que $\vartheta(E/G)$ n'y est pas contenu, c'est-à-dire qu'il y a au moins un point u de E/G tel que $\vartheta(u)$ soit simple
sur V ; on conclut de là, au moyen du th. A.25, que la dimension de V est au 132
moins n. D'autre part, quels que soient les indices $i_0, \ldots, i_{n+1}$ pris dans l'ensemble $\{0, \ldots, N\}$, le th. 6.4 fait voir que $\mathfrak{P}$ contient un polynome homogène non identiquement nul en $X_{i_0}, \ldots, X_{i_{n+1}}$; cela revient à dire que V est au plus de dimension n. Donc V a la dimension n. Soit V' l'ensemble des points simples de V ; d'après ce qu'on vient de voir, l'ensemble $V'' = V' \cap \vartheta(E/G)$ n'est pas vide ; il est fermé dans V' ; il est aussi ouvert dans V', puisqu'au voisinage de chacun de ses points, d'après ce qu'on vient de démontrer et le th. A.25, $\vartheta(E/G)$ et V' sont des variétés de dimension complexe n dont la première est plongée dans la seconde. Comme, d'après le même théorème, V' est connexe et dense dans V, il s'ensuit d'abord que $V'' = V'$, donc que $\vartheta(E/G)$ contient V', puis que $\vartheta(E/G)$ contient V. On a donc

$\vartheta(E/G) = V$; le même théorème de l'Appendice montre alors que V est sans point multiple.

Montrons enfin que ϑ détermine un isomorphisme entre le corps L des fonctions rationelles sur V et le corps K des fonctions méromorphes sur E/G ; il revient au même de dire que toute fonction méromorphe sur E/G peut se mettre sous la forme

$$\frac{P(\theta_0(x), \dots \theta_N(x))}{Q(\theta_0(x), \dots \theta_N(x))}$$

où P et Q sont des polynomes homogènes de même degré, et Q n'appartient pas à $\mathfrak{P}$. Observons d'abord que les fonctions qui peuvent s'écrire ainsi forment un corps K_1 isomorphe à L ; V étant de dimension n, K_1 est un corps de fonctions algébriques, de degré de transcendance n sur $\mathbf{C}$; d'après le th. 6.24, K est donc une extension de K_1 de degré fini d, et on peut écrire $K = K_1(f)$, où f est un élément de K qui satisfait à une équation irréductible de degré d sur K_1, équation qui peut se mettre sous la forme :

$$\sum_{i=0}^{d} P_i(\theta_0, \dots, \theta_N) f^{d-i} = 0$$

avec des coefficients P_i qui sont des polynomes homogènes de même degré ν, dont le premier P_0 n'appartient pas à $\mathfrak{P}$. La fonction

$$\theta' = P_0(\theta_0, \dots, \theta_N) f$$

est alors une fonction thêta de type $(3\nu H, \psi^{3\nu})$, entière sur l'anneau des polynomes en $\theta_0, \dots, \theta_N$. L'anneau des germes de fonction holomorphes en un point de E étant
133 factoriel, donc intégralement clos (Appendice, th. A.5 et §A.1), il s'ensuit que θ' est partout holomorphe. Soit $\theta'_0, \dots, \theta'_R$ une base de l'espace des fonctions thêta holomorphes de type $(3\nu H, \psi^{3\nu})$ relativement à E/G ; appliquant à νH et ψ^ν ce qu'on a déjà démontré pour H et ψ, on voit que ces fonctions déterminent un isomorphisme ϑ' de E/G sur une sous-variété algébrique V' de dimension n de l'espace $\mathbf{P}^R$; il y a donc un isomorphisme ρ de V' sur V, au sens des structures analytiques complexes, tel que $\vartheta = \rho \circ \vartheta'$. De plus, ϑ détermine un isomorphisme entre le corps L' des fonctions rationelles sur V' et le corps K'_1 des fonctions méromorphes sur E/G qui peuvent s'écrire comme fonctions rationelles homogènes de degré 0 en $\theta'_0, \dots, \theta'_R$. Comme tout monome de degré ν en $\theta_0, \dots, \theta_N$ peut s'écrire comme combinaisons linéaire des θ'_j, K'_1 contient toutes les fonctions θ_i/θ_0 et contient donc K_1 ; comme θ' et $P_0(\theta_0, \dots, \theta_N)$ peuvent s'écrire de même, K'_1 contient f. On a donc $K_1 = K$. Il s'ensuit que l'application $F \mapsto F \circ \rho$ détermine un isomorphisme de L sur un sous-corps L_1 de L' tel que L' soit de degré d sur L_1. Donc ρ est une application rationelle de V' sur V ; comme elle est biunivoque, elle est birationelle, c'est-à-dire qu'on a $L' = L_1$, $d = 1$, d'où $K = K_1$, ce qui achève la démonstration.

n° 11 6.11. Sur les sous-variétés abéliennes et les endomorphismes des variétés abéliennes, on a les résultat classiques suivants, dont le premier est connu sous le nom de « théorème de complète réductibilité de Poincaré ».

Th. 6 **Théorème 6.28.** *Soit $V = E/G$ une variété abélienne, de dimension complexe n ; soit H une forme de* Riemann *non dégénérée pour V. Soit E' un sous-espace de E de dimension p sur $\mathbf{C}$, tel que le groupe $G' = G \cap E$ soit de rang $2p$. Soit E'' le sous-espace de E orthogonal à E' par rapport à H. Alors E'' est de dimension $q = n - p$ sur $\mathbf{C}$, le groupe $G'' = G \cap E''$ est de rang $2q$, et les images V', V'' de E', E'' dans V sont des variétés abéliennes, respectivement isomorphes à E'/G' et à E''/G'', dont l'intersection est un sous-groupe fini de V.*

Par définition, E'' est l'ensemble des points $x \in E$ tels que l'on ait $H(x,y) = 0$ quel que soit $y \in E'$; pour un tel point, on a donc aussi $A(x,y) =$ quel que soit $y \in E'$, si A désigne comme d'habitude la partie imaginaire de H. Réciproquement, la première des formules (6.3) montre que, si x est tel que $A(x,y) = 0$ quel que soit $y \in E'$, on a $H(x,y) = 0$ quel que soit $y \in E'$, donc $x \in E''$. Comme par hypothèse E' est engendré par G' sur $\mathbf{R}$, E'' peut donc être défini comme l'ensemble des $x \in E$ tels que $A(x,g) = 0$ pour tout $g \in G'$. Si on prend pour base de E sur $\mathbf{R}$ un système minimal de générateurs de G, on voit, puisque A est à valeurs entières sur $G \times G$, que E'' est défini sur $\mathbf{R}$ par des équations à coefficients entiers ; E'' est donc engendré sur $\mathbf{R}$ par ses points à coordonnées rationelles, donc aussi par ses points à coordonnées entières, c'est-à-dire par les points de G'' ; cela revient à dire 134
que G'' est de rang $2q$ si q est la dimension complexe de E'', qui est égale à $n-p$, puisque H est non dégénérée. Il est clair que les formes hermitiennes induites par H sur E' et sur E'' sont des formes de RIEMANN non dégénérées pour E'/G' et E''/G'', respectivement. Il est clair aussi que l'application canonique π de E sur E/G induit sur E' une application de noyau G' qui détermine donc, par passage au quotient, un isomorphisme de E'/G' sur la variété $V' = \pi(E')$; de même, π détermine un isomorphisme de E''/G'' sur $V'' = \pi(E'')$. Soit enfin $G_1 = G' + G''$; comme E est somme directe de E' et E'', G_1 est de rang $2n$, donc d'indice fini dans G ; π détermine donc, par passage au quotient, un homomorphisme f de E/G_1 sur E/G dont le noyau γ est un groupe fini, isomorphe à G/G_1 ; de plus, si on désigne par V_1' et V_1'' les images de E' et de E'' dans E/G_1, E/G_1 est produit direct de V_1' et V_1'', et f induit sur V_1' et V_1'' des isomorphismes de ces tores sur V' et V'' respectivement ; le goupe $\Gamma = V' \cap V''$ est donc l'intersection de $f(V_1')$ et $f(V_1'')$, ou autrement dit l'image par f de l'ensemble des points $u \in V_1'$ tels qu'il existe $v \in V_1''$ satisfaisant à $f(u) = f(v)$, ou, ce qui revient au même, à $u - v \in \gamma$. Autrement dit, Γ est l'image par f de la projection de γ sur V_1' (relativement à la décomposition de E/G_1 en produit direct de V_1' et V_1''). C'est donc un groupe fini.

Corollaire 6.29. *Les hypothèses et notations étant celles du th. 6.28, soit δ l'au-* Cor.
tomorphisme identique de V Alors il existe deux endomorphismes α', α'' de V et un entier $\nu > 0$ tels que l'on ait $\nu\delta = \alpha' + \alpha''$, $\alpha'(V) = V', \alpha''(V) = V''$.

Soient p', p'' les projetteurs déterminés dans E par la décomposition de E en somme directe de E' et E'', ou autrement dit les projections orthogonales sur E' et E'' au sens de la géométrie hermitienne déterminée par H. Ils appliquent tous deux le groupe $G_1 = G' + G''$ dans G ; si donc ν est un multiple commun de l'ordre de tous les éléments du groupe G/G_1, de sorte qu'on ait $\nu G \subset G_1$, $\nu p'$ et $\nu p''$ appliqueront G dans G et détermineront donc, par passage au quotient, des endomorphismes α', α'' de V. Il est immédiat alors que ceux-ci ont les propriétés énoncées dans le corollaire.

6.12. Proposons-nous d'étudier maintenant l'anneau des endomorphismes d'une nº 12
variété abélienne. Considérons d'abord, plus généralement, un homomorphisme λ d'un tore complexe E/G dans un tore complexe E'/G' ; il s'agit ici, bien entendu, d'homomorphismes au sens de la structure complexe, c'est-à-dire d'homomorphismes qui sont en même temps des applications holomorphes. Si, comme précédemment, on identifie E, E' avec les espaces vectoriels respectivement tangents à E/G et à E'/G' on 0, l'application linéaire tangente à λ en 0 est une applica- 135
tion $\mathbf{C}$-linéaire L de E dans E' ; et on sait que dans ces conditions L applique G dans G' (cf. BOURBAKI [3, VII, §2, nºs 3–4]). Réciproquement, toute application $\mathbf{C}$-linéaire de E dans E' qui applique G dans G' détermine, pas passage au quotient, un homomorphisme de E/G dans E'/G'. Il sera commode, dans ce qui suit, au lieu

de considérer les homomorphismes de tores complexes dans des tores complexes, de considérer leurs applications linéaires tangentes en 0 ; il arrivera, par abus de langage, qu'on confonde celles-ci avec ceux-là.

En particulier, on identifiera l'anneau des endomorphismes d'un tore complexe E/G avec l'anneau $\mathfrak{A}$ des endomorphismes de E qui appliquent G dans G. On désignera par $\mathfrak{A}_{\mathbf{Q}}$ l'extension de l'anneau $\mathfrak{A}$ par le corps $\mathbf{Q}$ des rationnels ; si $G_{\mathbf{Q}}$ est l'espace vectoriel sur $\mathbf{Q}$ engendré par G sur $\mathbf{Q}$, $\mathfrak{A}_{\mathbf{Q}}$ est l'anneau des endomorphismes de E qui appliquent $G_{\mathbf{Q}}$ dans $G_{\mathbf{Q}}$. Il est immédiat que tout automorphisme de E qui applique $G_{\mathbf{Q}}$ dans $G_{\mathbf{Q}}$ induit sur $G_{\mathbf{Q}}$ un automorphisme de $G_{\mathbf{Q}}$ et est donc inversible dans $\mathfrak{A}_{\mathbf{Q}}$.

Désignons par $\widehat{E}$ l'*antidual* de E (cf. §1.1), c'est-à-dire l'espace des formes antilinéaire sur E, muni de sa structure d'espace vectoriel sur $\mathbf{C}$; et, pour $x \in E$ et $\widehat{x} \in \widehat{E}$, notons $\langle x, \widehat{x} \rangle$ la valeur en x de la forme antilinéaire sur E définie par $\widehat{x}$; $\langle x, \widehat{x} \rangle$ est donc une forme sesquilinéaire sur $E \times \widehat{E}$. Toute base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E sur $\mathbf{C}$ détermine dans $\widehat{E}$ une base $(\widehat{e}_1, \ldots, \widehat{e}_n)$ dite *duale* de la première, telle que l'on ait $\langle e_i, \widehat{e}_j \rangle = \delta_{ij}$, quels que soient i, j. La partie imaginaire $I(x, \widehat{x})$ de $\langle x, \widehat{x} \rangle$ est une forme $\mathbf{R}$-bilinéaire sur $E \times \widehat{E}$, dont on voir immédiatement (par exemple en l'exprimant au moyen d'une base sur E et de la base duale sur $\widehat{E}$) qu'elle est non dégénérée ; on en conclut (cf. p. ex. BOURBAKI [3, VII, §1, n$^{\text{o}}$ 3]) que, si G est un sous-groupe discret de rang $2n$ de E, l'ensemble $\widehat{G}$ des vecteurs $\widehat{g}$ de $\widehat{E}$ tels que l'on ait $I(g, \widehat{g}) \equiv 0 \pmod 1$ quel que soit $g \in G$ est un sous-groupe discret de rang $2n$ de $\widehat{E}$; de plus, dans ces conditions, G est l'ensemble des $G \in E$ tels que $I(g, \widehat{g}) \equiv 0 \pmod 1$ quel que soit $\widehat{g} \in \widehat{G}$; on dit, lorsu'il en est ainsi, que G et $\widehat{G}$ sont associés l'un de l'autre relativement à I, on dit que le tore complexe $\widehat{E}/\widehat{G}$ est *dual* du tore complexe E/G ; ce dernier est alors dual de $\widehat{E}/\widehat{G}$ (pourvu qu'on identifie E, d'une manière évidente, avec l'antidual de $\widehat{E}$).

Soit maintenant H une forme de RIEMANN pour le tore complexe E/G. Pour tout $y \in E$, l'application $x \mapsto H(x, y)$ de E dans $\mathbf{C}$ est antilinéaire ; il y a donc une application φ_H de E dans $\widehat{E}$, telle que l'on ait:

$$H(x, y) = \langle x, \varphi_H(y) \rangle$$

136 quels que soit x et y dans E ; H étant hermitienne, φ_H est linéaire. La partie imaginaire de H s'écrit alors:

$$A(x, y) = I(x, \varphi_H y).$$

Dire que A est à valeurs entières sur $G \times G$ équivaut alors à dire que φ_H applique G dans le sous-groupe $\widehat{G}$ de $\widehat{E}$ associé à G par rapport à I, ou encore, d'après ce qui précède, que φ_H détermine un homomorphisme du tore complexe E/G dans son dual $\widehat{E}/\widehat{G}$. Pour que φ_H soit un isomorphisme de E sur $\widehat{E}$, il faut et il suffit que H soit non dégénérée ; dans ce cas, φ_H applique $G_{\mathbf{Q}}$ sur $\widehat{G}_{\mathbf{Q}}$, et φ_H^{-1} est une application de $\widehat{E}$ sur E qui applique $\widehat{G}_{\mathbf{Q}}$ sur $G_{\mathbf{Q}}$, de sorte qu'il existe un entier $\nu > 0$ tel que $\nu\varphi_H^{-1}$ détermine un homomorphisme de $\widehat{E}/\widehat{G}$ sur E/G. Si H est une forme de RIEMANN non dégénérée et H' une forme de RIEMANN quelconque pour E/G, $\varphi_H^{-1}\varphi_{H'}$ est en endomorphisme de E appliquant $G_{\mathbf{Q}}$ dans $G_{\mathbf{Q}}$, ou autrement dit appartient à l'extension $\mathfrak{A}_{\mathbf{Q}}$ par $\mathbf{Q}$ de l'anneau des endomorphismes de E/G ; si ν est choisi comme on a dit, $\nu\varphi_H^{-1}\varphi_{H'}$ appartient à ce dernier anneau. En particulier, toute variété abélienne qui admet deux formes de RIEMANN essentiellement distinctes (c'est-à-dire dont aucune n'est un multiple scalaire de l'autre) admet un endomorphisme non trivial (c'est-à-dire qui n'est pas un multiple entier de l'automorphisme identique).

Soient $E/G, E'/G'$ deux tores complexes, et $\widehat{E}/\widehat{G}, \widehat{E'}/\widehat{G'}$ les tores duaux à ceux-ci. Comme au §1.1, on fait correspondre à toute application linéaire L de E dans E' une application linéaire $\widehat{L} = {}^t\bar{L}$ de $\widehat{E'}$ dans $\widehat{E}$, l'antitransposée de L, qui est telle que l'on ait $\langle Lx, \widehat{x'}\rangle = \langle x, \widehat{L}\widehat{x'}\rangle$ quels que soient $x \in E, \widehat{x'} \in \widehat{E'}$; prenant les parties imaginaires des deux membres, on aura donc $I'(Lx, \widehat{x'}) = I(x, \widehat{L}\widehat{x'})$, où I' désigne la forme analogue à I, relativement à E' ; on en conclut immédiatement que, si L applique G dans G', $\widehat{L}$ applique $\widehat{G'}$ dans $\widehat{G}$. Autrement dit, l'application $L \mapsto \widehat{L}$ fait correspondre à tout homomorphisme de E/G dans E'/G' un homomorphisme de $\widehat{E'}/\widehat{G'}$ dans $\widehat{E}/\widehat{G}$. Si en particulier on prend $E' = E$, on voit qu'on a ainsi fait correspondre à tout endomorphisme L de E/G un endomorphisme $\widehat{L}$ de $\widehat{E}/\widehat{G}$.

Si H est une forme hermitienne non dégénérées sur $E \times E$, et qu'on l'écrive, comme plus haut, sous la forme $\langle x, \varphi_H y\rangle$, où φ_H est une application linéaire de E dans $\widehat{E}$, on peut, à tout endomorphisme L de E, faire correspondre au moyen de H un endomorphisme *adjoint* L', tel que l'on ait

$$H(Lx, y) = H(x, L'y)$$

quels que soit x, y dans E ; un calcul facile montre que L' peut être consiéré aussi 137
comme donné par la formule:

$$L' = \varphi_H^{-1}\widehat{L}\varphi_H.$$

Il résulte de ce qui précède, si H est une forme de RIEMANN pour E/G et que L applique $G_{\mathbf{Q}}$ dans $G_{\mathbf{Q}}$, il en sera de même pour L'.

Pour tout endomorphisme L de E, désignons par $\mathrm{Tr}(L)$ la trace de L, et par $\sigma(L)$ la trace de L *en tant qu'endomorphisme de l'espace vectoriel sur* $\mathbf{R}$ *sous-jacent à* E ; si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E sur $\mathbf{C}$, les $2n$ vecteurs e_ν, ie_ν formeront une base de E sur $\mathbf{R}$, et, au moyen de ces bases, on voit immédiatement que l'on a $\sigma(L) = \mathrm{Tr}(L) + \overline{\mathrm{Tr}(L)}$. Si H est une forme hermitienne non dégénérée positive sur $E \times E$, on a $\sigma(LL') > 0$ quel que soit l'endomorphisme $L \neq 0$ de E, L' désignant toujours l'adjoint de L par rapport à H. Il suffit pour le voir de prendre dans E une base pour laquelle H se mette sous la forme $H(z, w) = \sum_\alpha \bar{z}_\alpha w_\alpha$, car alors, si $X = \|x_{\alpha\beta}\|$ est la matrice de L pour cette base, ${}^t\overline{X} = \|\bar{x}_{\beta\alpha}\|$ sera celle de L', de sorte qu'on aura $\sigma(LL') = 2\sum_{\alpha,\beta} |x_{\alpha\beta}|^2$. Si E/G est un tore complexe, et L un endomorphisme de ce tore, on voit, en prenant pour base de E sur $\mathbf{R}$ un système minimal de générateurs de G, que $\sigma(L)$ est un entier.

On a ainsi démontré le théorème suivant:

Théorème 6.30. *Soit E/G une variété abélienne, $\mathfrak{A}$ l'anneau de ses endomorphismes, $\mathfrak{A}_{\mathbf{Q}}$ l'extension de $\mathfrak{A}$ par $\mathbf{Q}$. Soit H une forme de* RIEMANN *non dégénérée pour E/G ; pour tout endomorphisme L de E, on désigne par L' l'adjoint de L par rapport à H. Alors l'application $L \mapsto L'$ induit sur $\mathfrak{A}_{\mathbf{Q}}$ un antiautomorphisme involutif de $\mathfrak{A}_{\mathbf{Q}}$. De plus, si σ désigne la trace d'un endomorphisme prise sur l'espace réel sous-jacent à E, σ est à valeurs entières sur $\mathfrak{A}$, à valeurs rationelles sur $\mathfrak{A}_{\mathbf{Q}}$, et on a $\sigma(LL') > 0$ pour $L \neq 0$.* Th. 7

C'est de ce théorème que découlent les principales propriétés de l'algèbre $\mathfrak{A}_{\mathbf{Q}}$; on en déduit en particulier que $\mathfrak{A}_{\mathbf{Q}}$ est semi-simple, et que le centre de chacune des composantes simples de $\mathfrak{A}_{\mathbf{Q}}$ est, soit un corps de nombres algébriques totalement réel, soit une extension quadratique totalement imaginaire d'un tel corps.

6.13. Nous terminerons ce chapitre en donnant quelques théorèmes d'existence n° 13
pour les types de tores qu'on a distingués ci-dessus.

Proposition 6.31. *Quel que soit $n > 0$, il existe des variétés abéliennes de di-* Prop. 9
mension n n'admettant pas d'autre endomorphisme que les multiples entiers de 138
l'automorphisme identique.

Nous nous appuyerons sur la seconde partie de la prop. 6.18, où, pour fixer les idées et simplifier l'écriture, on supposera qu'on a pris tous les entiers e_α égaux à 1. L'espace des matrices symétriques $Z = \|z_{\alpha\beta}\|$ peut être considéré comme espace vectoriel de dimension $n(n+1)/2$ sur $\mathbf{C}$; dans cet espace, l'ensemble des matrices dont la partie imaginaire est la matrice d'une forme non dégénérée positive forme un ensemble ouvert non vide. Comme dans la prop. 6.18, soit $(g_1, \ldots, g_n)$ une base d'un espace vectoriel E sur $\mathbf{C}$; soit G le groupe engendré pas les g_α et par les vecteurs $g_{n+\beta}$ définis par (6.8), où on a pris $p_{\alpha\beta} = z_{\alpha\beta}$. Soit L un endomorphisme de E appliquant G dans G. On aura donc :

$$L(g_\alpha) = \sum_{\beta=1}^{n} a_{\alpha\beta} g_\beta + \sum_{\beta=1}^{n} b_{\alpha\beta} g_{n+\beta} \quad (1 \le \alpha \le n),$$
$$L(g_{n+\alpha}) = \sum_{\beta=1}^{n} c_{\alpha\beta} g_\beta + \sum_{\beta=1}^{n} d_{\alpha\beta} g_{n+\beta} \quad (1 \le \alpha \le n),$$

les matrices $A = \|a_{\alpha\beta}, \|B = \|b_{\alpha\beta}\|, C = \|c_{\alpha\beta}\|, D = \|d_{\alpha\beta}\|$ étant à coefficients entiers. En tenant compte de la définition des $g_{n+\alpha}$ par les formules (6.8) et du fait que L est $\mathbf{C}$-linéaire, on tire de là, par un calcul immédiat :

$$c_{\alpha\beta} + \sum_{\gamma=1}^{n} d_{\alpha\gamma} z_{\beta\gamma} - \sum_{\gamma=1}^{n} a_{\gamma\beta} z_{\gamma\alpha} - \sum_{\gamma,\delta=1}^{n} b_{\gamma\delta} z_{\gamma\alpha} z_{\beta\delta} = 0 \quad (1 \le \alpha, \beta \le n).$$

Les premiers membres de ces relations sont des polynomes du second degré à coefficients entiers dans les coefficients $z_{\alpha\beta}$ de Z ; pour un choix donné des matrices A, B, C, D, l'ensemble des Z qui y satisfont est donc un ensemble algébrique fermé $F(A, B, C, D)$, ou autrement dit une réunion finie de variétés algébriques. Pour que $F(A, B, C, D)$ soit l'espace entier des matrices symétriques, il faut que les relations ci-dessus soient identiquement satisfaites, ou encore que l'on ait, pour toute matrice Z symétrique :

$$C + DZ - ZA - ZBZ = 0.$$

En prenant $Z = z \cdot \mathbf{1}_n$, où $\mathbf{1}_n$ désigne la matrice unité, on tire de là $C = 0 = B, D = A$; en prenant pour Z une matrice diagonale quelconque, on voit que A est diagonale ; en exprimant que celle-ci est permutable avec toute matrice symétrique
139 Z, on voit que A est de la forme $a \cdot \mathbf{1}_n$. Soit maintenant F la réunion de tous les ensembles $F(A, B, C, D)$ pour tous les choix de A, B, C, D pour lesquels on n'a pas $B = C = 0, A = D = a \cdot \mathbf{1}_n$, avec a entier ; chacun de ces ensembles étant rare, leur réunion est maigre et ne peut donc contenir aucun ouvert (Bourbaki, [3, IX, §5, n$^{\text{os}}$ 2 et 3]). Il existe donc une matrice symétrique Z dont la partie imaginaire est la matrice d'une forme quadratique non dégénérée positive et qui n'appartient pas à F. Alors le tore complexe E/G défini au moyen de cette matrice n'admet aucun endomorphisme autre que les multiples entiers de l'automorphisme identique. Comme ce tore E/G est une variété abélienne d'après la prop. 6.18, cela achève la démonstration.

On notera que, d'après le corollaire 6.29, une variété abélienne E/G ayant la propriété énoncée dans la prop. 6.31 n'admet aucune sous-variété abélienne propre (c'est-à-dire autre que $\{0\}$ et E/G) ; on exprime ce fait en disant qu'une telle variété est *simple*.

Prop. 10 **Proposition 6.32.** *Quels que soient les entiers n, r satisfaisant à $n \geq 2$, $0 \leq r \leq n$, il existe des tores complexes de dimension n et de rang r.*

Pour $r = n$, cela résulte de la prop. 6.18, puisqu'un tore complexe dont le rang est égal à sa dimension n'est autre chose qu'une variété abélienne. Supposons qu'on ait pris $r = 0$. Soit M l'espace vectoriel de dimension $2n^2$ sur $\mathbf{C}$ formé des matrices $U = \|u_{\alpha\nu}\|$ $(1 \leq \alpha \leq n; 1 \leq \nu \leq 2n)$. Pour $U \in M$, soit $G(U)$ le sous-groupe de $\mathbf{C}^n$ engendré par les $2n$ vecteurs :

$$u^{(\nu)} = (u_{1\nu}, \dots, u_{n\nu}) \quad (1 \leq \nu \leq 2n).$$

Soit Ω l'ensemble des points U de M tels que $G(U)$ soit discret de rang $2n$, c'est-à-dire tels que les $2n$ vecteurs $u^{(\nu)}$ soient linéairement indépendants sur $\mathbf{R}$. Si U', U'' désignent la partie réelle et la partie imaginaire de U, Ω est l'ensemble des U tels que le déterminant de la matrice $\binom{U'}{U''}$ ne s'annule pas ; c'est donc une partie ouverte de M. Pour $U \in \Omega, \mathbf{C}^n/G(U)$ est un tore complexe ; on va montrer que l'ensemble des $U \in \Omega$ tels que ce tore soit de rang > 0 est contenu dans la réunion d'une famille dénombrable de sous-variété algébriques de M de dimension $< 2n^2$, donc dans une partie maigre de M ; il s'ensuivra bien qu'il existe des $U \in \Omega$ tels que $\mathbf{C}^n/G(U)$ soit de rang 0.

Supposons d'abord que $\mathbf{C}^n/G(U)$ soit de rang n ; soit en ce cas A la partie imaginaire d'une forme de Riemann non dégénérée pour ce tore. Si $C = \|c_{\mu\nu}\|$ $(\mu, \nu = 1, \dots, 2n)$ est une matrice à coefficients entiers de déterminant ± 1, il est immédiat que l'application $U \mapsto UC$ est un automorphisme de M qui applique Ω sur lui-même, et que l'on a $G(U) = G(UC)$ quel que soit U. Si on pose $g_\nu = \sum_\mu c_{\mu\nu} u^{(\mu)}$, 140
les g_ν formeront un système minimal de générateurs de $G(U)$; si C est choisie de manière qu'ils forment une base de $G(U)$ adaptée à la forme A, la prop. 6.18 montre que $g_1, \dots, g_n$ seront linéairement indépendants sur $\mathbf{C}$ et que, si les e_α et les $p_{\alpha\beta}$ sont définis comme dans cette proposition, la matrice $\|e_\alpha p_{\alpha\beta}\|$ est symétrique. Cela équivaut à dire que, si on pose $UC = \|V\ W\|$, où V, W sont deux matrices à n lignes et n colonnes, et qu'on désigne par E la matrice diagonale $\|e_\alpha \delta_{\alpha\beta}\|$, la matrice V est inversible et la matrice $EV^{-1}W$ symétrique. Comme E est symétrique et inversible, cette dernière condition revient à dire que la matrice

$$WE^{-1} \cdot {}^tV = (VE^{-1}) \cdot (EV^{-1}W) \cdot {}^t(VE^{-1})$$

est symétrique. Cette dernière condition s'exprime par des relations algébriques, homogènes du second degré par rapport aux éléments des matrices V, W, donc aussi par rapport aux $u_{\alpha\nu}$. Pour chaque choix de C et E, elle détermine donc un ensemble algébrique fermé $F(E, C)$ dans M. Il est clair d'ailleurs qu'on a toujours $F(E, C) \neq M$ pour $n \geq 2$. Si U n'appartient pas à la réunion de tous les $F(E, C)$ le tore $\mathbf{C}^n/G(U)$ sera de rang $< n$.

Supposons que $\mathbf{C}^n/G(U)$ soit de rang r avec $0 < r < n$. Le noyau E_0 de $\mathbf{C}^n$ relativement à ce tore est alors de dimension $n - r$ sur $\mathbf{C}$; et le groupe $G_0 = G(U) \cap E_0$ est de rang $2n - 2r$. Il y a donc un système minimal $(g_1, \dots, g_{2n})$ de générateurs de $G(U)$ tel que G_0 soit engendré par $g_1, \dots, g_{2n-2r}$ et que E_0 soit engendré sur $\mathbf{C}$ par $g_1, \dots, g_{n-r}$; on pourra, comme précédemment, écrire $g_\nu = \sum_\mu c_{\mu\nu} u^{(\mu)}$ pour $1 \leq \nu \leq 2n$, la matrice $C = \|c_{\mu\nu}\|$ étant à coefficients entiers et de déterminant ± 1. Écrivons $UC = \|V\ W\ T\|$, où V et W sont des matrices à n lignes et $n - r$ colonnes et T une matrice à n lignes et $2r$ colonnes ; comme $g_{n-r+1}, \dots, g_{2n-2r}$ sont des combinaisons linéaires de $g_1, \dots, g_{n-1}$ à coefficients dans $\mathbf{C}$, il y aura une matrice X à $n - r$ lignes et $n - r$ colonnes telle que $W = VX$. Mais l'ensemble des matrices $\|V\ VX\ T\|$, où V est une matrice à n lignes et $n - r$ colonnes, X une matrice à $n - r$ lignes et $n - r$ colonnes, et T une matrice à n lignes et $2r$

colonnes, forme une sous-variété algébrique V_r de M, de dimension $2n^2 - r(n-r)$. On a ainsi montré que, si $\mathbf{C}^n/G(U)$ est de rang r, U est dans la transformée $V_r C^{-1}$ de V_r par l'automorphisme $U \mapsto UC^{-1}$ de M. Si donc on prend pour U un point de Ω qui n'appartienne pas à la réunion de toutes les variétés $V_r C^{-1}$ et de tous les ensembles algébriques fermés $F(E, C)$ définis plus haut, le tore $\mathbf{C}^n/G(U)$ sera de rang 0. Cette réunion étant maigre dans M pour $n \geq 2$, l'existence d'un tel tore est donc établi.

Proposons-nous enfin de construire un tore complexe de dimension n et de rang
141 r, avec $1 \leq r \leq n-1$. Posons $s = n - r$. Soit E un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbf{C}$; désignons par $g_1, \dots, g_s, g_{2s+1}, \dots, g_{n+s}$ des vecteurs formant une base de E sur $\mathbf{C}$; soit E_0 le sous-espace de E engendré sur $\mathbf{C}$ par $g_1, \dots, g_s$. Au moyen de la prop. 6.22, on pourra construire dans E_0 des vecteurs

$$g_{s+\mu} = \sum_{\lambda=1}^{s} z_{\lambda\mu} g_\lambda \qquad (1 \leq \mu \leq s) \tag{6.15}$$

tels que, si G_0 est le sous-groupe de E_0 engendré par $g_1, \dots, g_{2s}$, E_0/G_0 soit une variété abélienne n'admettant pas d'autre endomorphisme que les multiples entiers de l'automorphisme identique. Alors, d'après le th. 6.28 et son corollaire 6.29, il ne peut y avoir aucun sous-espace vectoriel E'_0 de E_0 sur $\mathbf{C}$, autre que E_0 et $\{0\}$, tel que le groupe $G_0 \cap E'_0$ soit de rang égal à $2 \dim E'_0$. Posons d'autre part :

$$g_{n+s+\rho} = \sum_{\lambda=1}^{s} u_{\rho\lambda} g_\lambda + \sum_{\sigma=1}^{r} z'_{\rho\sigma} g_{2s+\sigma} \qquad (1 \leq \rho \leq r), \tag{6.16}$$

où $\|z'_{\rho\sigma}\|$ est une matrice symétrique dont la partie imaginaire est la matrice d'une forme quadratique non dégénérée positive, et où $\|u_{\rho\lambda}\|$ est une matrice quelconque à r lignes et s colonnes. Soit G le groupe engendré par $g_1, \dots, g_{2n}$; soir G^* son image dans l'espace $E^* = E/E_0$. D'après la prop. 6.18, G^* est discret de rang $2r$ dans E^*, et E^*/G^* est une variété abélienne de dimension r ; on conclut facilement de là que G est discret de rang $2n$ dans E, et il est clair alors que E/G est au moins de rang r, et que le noyau E'_0 de E relativement à E/G est contenu dans E_0 ; comme le groupe $G \cap E'_0 = G_0 \cap E'_0$ doit alors être de rang égal à $2 \dim E'_0$, il s'ensuit, daprès ce qu'on a vu, qu'on a, soit $E'_0 = E_0$, soit $E'_0 = \{0\}$; autrement dit, le tore E/G est, soit de rang r, soit une variété abélienne.

Supposons que E/G soit une variété abélienne, et appliquons le th. 6.28 à E/G et à E_0. Il s'ensuit qu'il y a dans E un sous-espace E_1 de dimension r, supplémentaire de E_0, tel que le groupe $G_1 = G \cap E_1$ soit de rang $2r$; le groupe $G' = G_0 + G_1$ est alors de rang $2n$, et il y a un entier $\nu > 0$ tel qu'on ait $G' \supset \nu G$. En particulier, on aura $\nu g_{2s+\rho} \in G'$ pour $1 \leq \rho \leq 2r$, de sorte qu'il y aura des éléments g'_ρ de G_1 et des entiers $a_{\rho\lambda}$ tels que l'on ait :

$$g'_\rho = \nu g_{2s+\rho} + \sum_{\lambda=1}^{2s} a_{\rho\lambda} g_\lambda \quad (1 \leq \rho \leq 2r). \tag{6.17}$$

142 Alors les images de $g'_1, \dots, g'_r$ dans $E^* = E/E_0$ sont les mêmes que celles de $\nu g_{2s+1}, \dots, \nu g_{n+s}$ respectivement et sont donc linéairement indépendantes sur $\mathbf{C}$, ce qu'on peut exprimer en disant que $g'_1, \dots, g'_r$ sont linéairement indépendants sur $\mathbf{C}$ modulo E_0 ; ils sont donc à plus forte raison linéairement indépendants sur $\mathbf{C}$ dans E ; par suite, ils engendrent E_1 sur $\mathbf{C}$, de sorte que $g'_{r+1}, \dots, g'_{2r}$ sont des combinaisons linéaires de $g'_1, \dots, g'_r$ à coefficients dans $\mathbf{C}$. Mais on a, pour $1 \leq \rho \leq r$:

$$g'_{r+\rho} \equiv \nu g_{n+s+\rho} \equiv \nu \sum_{\sigma=1}^{r} z'_{\rho\sigma} g_{2s+\sigma} \equiv \sum_{\sigma=1}^{r} z'_{\rho\sigma} g'_\sigma \pmod{E_0}.$$

Puisque $g'_1, \dots, g'_r$ sont linéairement indépendants sur $\mathbf{C}$ modulo E_0, il s'ensuit que les coefficients qui figurent dans les expression de $g'_{r+1}, \dots, g'_{2r}$ au moyen de $g'_1, \dots, g'_r$ ne sont autres que les $z'_{\rho\sigma}$, c'est-à-dire qu'on a

$$g'_{r+\rho} = \sum_{\sigma=1}^{r} z'_{\rho\sigma} g'_\sigma \qquad (1 \leq \rho \leq r).$$

En faisant usage de (6.15),(6.16),(6.17), on tire de là :

$$\nu u_{\rho\lambda} = \sum_{\sigma=1}^{r} z'_{\rho\sigma}\big(a_{\sigma\lambda} + \sum_{\mu=1}^{s} a_{\sigma,s+\mu} z_{\lambda\mu}\big) - a_{r+\rho,\lambda} - \sum_{\mu=1}^{s} a_{r+\rho,s+\mu} z_{\lambda\mu}.$$

Si donc, après avoir choisi les $z_{\lambda\mu}$ et les $z'_{\rho\sigma}$ comme il a été dit, on choisit les $u_{\rho\lambda}$ de manière à ne satisfaire aux relations ci-dessus pour aucun choix des entiers $\nu > 0$ et $a_{\rho\lambda}$, le tore E/G sera de rang r.

Annexe A. Propriétés élémentaires des diviseurs sur les variétés complexes 143

A.1. Pour tout ce qui concerne les groupes ordonnés et les relations de divisibilité, n° 1
nous renvoyons à Bourbaki [2, VI, §1]. Rappelons que, si A est un anneau intègre (anneau commutatif sans diviseur de zéro, ayant un élément unité autre que 0), E le groupe multiplicatif des éléments inversibles de A, K le corps des fractions de A, et K^* le groupe multiplicatif des éléments non nuls de K, on définit sur $\Delta = K^*/E$ une structure de groupe ordonné en y prenant pour ensemble Δ_+ des éléments positifs l'image dans Δ de l'ensemble $A^* = A - \{0\}$[3] ; les relations de divisibilité dans K (relativement à A) s'expriment au moyen des propriétés de Δ. On écrira le groupe Δ additivement.

Deux éléments de K^* sont dits *associés* s'ils ont même image dans Δ, c'est-à-dire si leur quotient est dans E. Un élément de Δ est dit *irréductible* si c'est un élément minimal de $\Delta_+ - \{0\}$; pour qu'un élément x de $A^* - E$ air pour image dans Δ un tel élément, il faut et il suffit qu'il ne puisse s'écrire comme produit $x = yz$ de deux éléments y, z de $A^* - E$; on dit, dans ce cas, que x lui-même est *irréductible.* On dit que l'anneau A est *factoriel* si Δ est somme directe des sous-groupes engendrés par ses éléments irréductibles, ou, ce qui revient au même, si tout élément δ de Δ_+ peut se mettre, d'une manière et d'une seule (à l'ordre des termes près) sous la forme $\delta = \sum_{\nu=1}^{n} \delta_\nu$, où $n \geq 0$ et les δ_ν sont irréductibles. Il faut et il suffit pour cela que Δ_+ satisfasse aux deux conditions suivantes:

(a) *Tout ensemble non vide d'éléments de Δ_+ contient un élément minimal* (c'est la « condition minimale » pour Δ_+) ; 144

(b) *Si δ est irréductible et si δ_1, δ_2 sont dans Δ_+ la relation $\delta \prec \delta_1 + \delta_2$ entraîne $\delta \prec \delta_1$ ou $\delta \prec \delta_2$.*

En effet, la nécessité de ces conditions est immédiate. Supposons (a) vérifiée, et soit $\delta \in \Delta_+$. L'ensemble X des éléments de Δ_+ de la forme $\delta - \sum_{\nu=1}^{n} \delta_\nu$ (où $n \geq 0$ et les δ_ν sont irréductibles) admet un élément minimal δ'. Si $\delta' \neq 0$, l'ensemble (non vide) des éléments $\delta'' \prec \delta'$ de $\Delta_+ - \{0\}$ contient un élément minimal δ''_0, visiblement irréductible ; on a alors $\delta' - \delta''_0 \in X$, ce qui contredit la définition de δ'. Donc $\delta' = 0$, et δ est somme d'éléments irréductibles. Il est immédiat d'autre part que, si (b) est satisfaite, un élément de Δ_+ ne peut s'écrire au plus que d'une manière, à l'ordre près, comme somme d'éléments irréductibles.

3. Bourbaki utilise la notation $P = A - \{0\}$ et $A^* = E$ dans [2, VI, §1, n° 5]

Si A est factoriel, le groupe Δ est réticulé (BOURBAKI [1, VII, §3, th. 1]). Cela revient à dire que tout ensemble fini d'éléments de K a, par rapport à l'anneau A, un pgcd et un ppcm, tous deux déterminés d'une manière unique à un facteur près associé à 1. En particulier, tout élément z de K peut alors se mettre sous la forme $z = x/y$, où x, y sont deux éléments de A *étrangers* l'un de l'autre, c'est-à-dire sans diviseur commun dans A autre que les éléments associés à 1. Il s'ensuit que A est intégralement clos ; en effet, si x, y sont étrangers l'un à l'autre dans A, et si $z = x/y$ est entier sur A, on aura une relation $z^n + \sum_{i=1}^n x_i z^{n-i} = 0$, avec $x_i \in A$, ce qui s'écrit aussi

$$x^n = -y \sum_{i=1}^{n} x_i x^{n-i} y^{i-1};$$

donc x^n est multiple de y, de sorte que tout diviseur irréductible de y divise x^n et par suite aussi x ; comme x, y sont étrangers l'un à l'autre, y n'a donc pas de diviseur irréductible et est inversible dans A, ce qui implique bien $z \in A$.

Rappellons encore le résultat élémentaire suivant:

Lemme 1 **Lemme A.1.** *Soient A un anneau intègre intégralement clos, et K son corps des fractions. Soit P un polynome unitaire dans $A[T]$; soit Q un polynome unitaire dans $K[T]$, tel que P soit multiple de Q dans l'anneau $K[T]$, Alors Q est dans $A[T]$, et P est multiple de Q dans $A[T]$.*

Les coefficients de Q peuvent s'écrire comme polynomes par rapport aux racines de Q ; comme celles-ci sont racines de P, elles sont entières sur A ; les coefficients de Q sont donc entiers sur A ; comme par hypothèse ils sont dans K, et que A est intégralement clos, ils sont dans A, et Q est dans $A[T]$. De même P/Q est dans $A[T]$.

145

n° 2 A.2. Soit f une fonction holomorphe dans un voisinage d'un point u d'une variété V à structure analytique complexe. L'ensemble des fonctions définies dans un voisinage de u de V, qui coïncident avec f dans un voisinage de u, s'appelle le *germe de fonction holomorphe* défini en u par f, et se notera $\gamma_u(f)$. Soit $(z_1, \ldots, z_n)$ un système de coordonnées locales complexes, nulles en u, dans un voisinage de u sur V ; une fonction f, holomorphe dans un voisinage de u, peut alors s'écrire, au voisinage die u, comme série de TAYLOR en $z_1, \ldots, z_n$; et $\gamma_u(f)$ est l'ensemble des fonctions qui, dans un voisinage de u, ont même développement de TAYLOR que f. On peut, d'une manière évidente, considérer l'ensemble des germes de fonction holomorphe en u sur V comme formant un anneau ; celui-ci sera noté $A_u(V)$; il est isomorphe à l'anneau des séries de puissance en $z_1, \ldots, z_n$ qui convergent dans un voisinage de 0, et est donc intègre. Le corps des fractions de $A_u(V)$ sera noté $K_u(V)$; ses éléments s'appelleront les *germes de fonction méromorphe* en u sur V.

Soit $\gamma = \gamma_u(f)$ un germe de fonction holomorphe en u sur V, déterminé par une fonction f holomorphe au voisinage de u ; il détermine d'une manière unique le développement de TAYLOR de f en u par rapport aux z_i. Si $\gamma \neq 0$, la somme des termes de plus bas degré en $z_1, \ldots, z_n$ dans ce développement est un polynome homogène non nul, dont le degré sera désigné par $m(\gamma)$; on vérifie immédiatement que ce degré est indépendant du choix des coordonnées locales z_i. Pour que l'on ait $m(\gamma) = 0$, il faut et il suffit qu'on ait $f(u) \neq 0$, c'est-à-dire que γ appartienne au groupe multiplicatif $E_u(V)$ des éléments inversibles de $A_u(V)$. Quels que soient γ, γ' dans $A_u(V) - \{0\}$, on a $m(\gamma\gamma') = m(\gamma) + m(\gamma')$.

Comme au §A.1, on considéra le groupe quotient $K_u(V)^*/E_u(V)$ comme groupe ordonné, et on l'écrirera additivement ; ses élément s'appelleront les *germes de diviseur* en u sur V ; si $\gamma \in K_u(V)^*$, l'image de γ dans ce groupe se notera $\operatorname{div}(\gamma)$;

si $\gamma = \gamma_u(f)$ est un germe de fonction holomorphe, déterminé par une fonction f holomorphe au voisinage de u, on écrirera aussi $\mathrm{div}_u(f)$ au lieu de $\mathrm{div}(\gamma_u(f))$; par définition, les germes de diviseur positifs en u sont ceux qui sont de la forme $\mathrm{div}_u(f)$, avec f holomorphe au voisinage de u et $\gamma_u(f) \neq 0$.

Pour que deux germes de fonctions holomorphe γ, γ' déterminent le même germe de diviseur en u, il faut et il suffit que l'on ait $\gamma/\gamma' \in E_u(V)$; on a alors $m(\gamma/\gamma') = 0$, d'où $m(\gamma) = m(\gamma')$. Donc $m(\gamma)$ ne dépend que du germe de diviseur $\delta = \mathrm{div}(\gamma)$ et définit, par passage au quotient, une fonction $\mu(\delta) = m(\gamma)$ à valeurs entières ≥ 0 sur l'ensemble des germes de diviseur positifs en u ; si δ est un tel germe, $\mu(\delta) = 0$ équivaut à $\delta = 0$; et, si δ, δ' sont de tels germes, on a $\mu(\delta\delta') = \mu(\delta) + \mu(\delta')$. Si X est un ensemble de tels germes, tout élément δ de X pour lequel $\mu(\delta)$ atteint sa plus 146
petite valeur est un élément minimal de X ; donc l'ensemble des germes de diviseur positifs en u sur V satisfait à la condition minimale (condition (a) du §A.1).

A.3. Rappelons maintenant le lemme de WEIERSTRASS (le « Vorbereitungssatz ») [1, VII, §3, prop. 6] : n° 3

Lemme A.2. *Soit f une fonction holomorphe dans un voisinage de* 0 *dans* $\mathbf{C}^n$ *; supposons que $z_n^{-m} f(0, \ldots, 0, z_n)$ soit holomorphe dans un voisinage de* 0 *dans* $\mathbf{C}$*, et ne s'annule pas pour $z_n = 0$. Alors* Lemme 2

(a) *Il y a un voisinage U de* 0 *dans* $\mathbf{C}^n$ *et une fonction e holomorphe et ne s'annulant pas dans U, tels que ef puisse, dans U, se mettre sous la forme*

$$ef = z_n^m + \sum_{i_1}^{m} \varphi_i(z_1, \ldots, z_{n-1}) z_n^{m-i}, \tag{A.1}$$

les φ_i étant holomorphes dans un voisinage de 0 *dans* $\mathbf{C}^{n-1}$ *et nulles en* 0*. De plus, les germes de fonction holomorphe $\gamma_0(e), \gamma_0(\varphi_i)$ sont déterminés d'une manière unique par la relation* (A.1)*.*

(b) *Quelle que soit g holomorphe dans un voisinage de* 0 *dans* $\mathbf{C}^{n-1}$*, il y a un voisinage U' de* 0 *dans* $\mathbf{C}^n$ *et une fonction holomorphe h dans U', tels que, dans U', $g - fh$ puisse se mettre sous la forme*

$$g - fh = \sum_{i_1}^{m} \psi_i(z_1, \ldots, z_{n-1}) z_n^{m-i}, \tag{A.2}$$

les ψ_i étant holomorphes dans un voisinage de 0 *dans* $\mathbf{C}^{n-1}$*. De plus, f et g étant données, les germes $\gamma_0(h), \gamma_0(\psi_i)$ sont déterminés d'une manière unique par la relation* (A.2)*.*

Le second membre de (A.1), où les φ_i sont comme il a été dit ci-dessus, c'est-à-dire holomorphes dans un voisinage de 0 et nulles en 0, s'appelle un *polynome de* WEIERSTRASS[4].

Dans l'application du lemme de WEIERSTRASS, on a le plus souvent à faire usage du lemme suivant :

Lemme A.3. *Soient $f_1, \ldots, f_r$ des fonctions holomorphes dans un voisinage d'un point u sur une variété complexe V ; on suppose que $\gamma_u(f_\rho) \neq 0$ pour $1 \leq \rho \leq r$; pour $1 \leq \rho \leq r$, soit $m_\rho = m(\gamma_u(f_\rho))$. Alors il y a un système $(z_1, \ldots, z_n)$ de coor-* Lemme 3
données locales en u sur V, nulles en u, tel que les fonctions $z_n^{-m_\rho} f_\rho(0, \ldots, 0, z_n)$ 147
soient holomorphes dans un voisinage de 0 *dans* $\mathbf{C}$ *et ne s'annulent pas pour $z_n = 0$.*

4. appelé *polynome distingué* dans BOURBAKI [1, VII, §3, déf. 2]

Soient $w_1, \dots, w_n$ des coordonnées locales en u, nulles en u. Pour chaque ρ, soit P_ρ la somme des termes de degré m_ρ dans le developpement de TAYLOR de f_ρ par rapport aux w_i ; soit $(a_1, \dots, a_n)$ un point de $\mathbf{C}^n$ autre que 0 où le polynome $P_1 P_2 \cdots P_n$ ne soit pas nul. En effectuant au besoin une permutation sur les w_i, on peut supposer qu'on a $a_n \neq 0$. Posons alors $w_i = z_i + a_i z_n$ pour $1 \leq i \leq n-1$, et $w_a = a_n z_n$; les z_i forment un système de coordonnées locales ayant les propriétés annoncées.

Les hypothèses étant celles du lemme A.3, on peut alors appliquer le lemme de WEIERSTRASS, par rapport aux coordonnées z_i, à chacune des fonctions f_ρ, c'est-à-dire déterminer pour chaque ρ une fonction e_ρ, holomorphe et $\neq 0$ dans un voisinage de u, telle que $e_\rho f_\rho$ s'écrive sous forme d'un polynome de WEIERSTRASS de degré m_ρ en z_n.

nº 4 A.4. Pour simplifier les notations, nous noterons A l'anneau $A_0(\mathbf{C}^{n-1})$ des germes en 0 de fonctions de $z_1, \dots, z_{n-1}$, holomorphes dans un voisinage de 0 ; et nous noterons K le corps des fractions de A. On identifiera d'une manière évidente l'anneau $A[z_n]$ des polynomes en z_n à coefficients dans A avec un sous-anneau de $A_0(\mathbf{C}^n)$. Si f est un polynome de WEIERSTRASS, $\gamma_0(f)$ est alors un élément de $A[z_n]$; on notera W l'ensemble des germes $\gamma_0(f)$ correspondant ainsi aux polynomes de WEIERSTRASS. Un élément de W de degré $m > 0$ en z_n ne peut être inversible dans $A_0(\mathbf{C}^n)$.

Lemme 4 **Lemme A.4.** *Soit $\gamma \in W$; alors tout élément γ' de $A[z_n]$ qui est multiple de γ dans $A_0(\mathbf{C}^n)$ l'est aussi dans $A[z_n]$.*

Soit m le degré de γ en z_n. Comme γ est un polynome unitaire dans $A[z_n]$, on pourra, dans $A[z_n]$, diviser γ' par γ, donc mettre γ' sous la forme $\gamma' = \gamma\gamma'' + \rho$, où γ'', ρ sont dans $A[z_n]$ et où ρ est de degré $< m$. D'autre part, si γ' est multiple de γ dans $A_0(\mathbf{C}^n)$, on aura $\gamma' = \gamma\gamma_1$ avec $\gamma_1 \in A_0(\mathbf{C}^n)$; l'assertion d'unicité dans le lemme A.2 (b) donne alors $\gamma_1 = \gamma''$ et $\rho = 0$.

Th. 1 **Théorème A.5.** *L'anneau $A_u(V)$ des germes de fonction holomorphe en un point u d'une variété complexe V est factoriel.*

D'après les §§A.1 et A.2, il suffira, pour démontrer le théorème, de faire voir que, si $\gamma, \gamma', \gamma''$ sont des éléments de $A_u(V)$ tels que γ soit irréductible dans $A_u(V)$ et divise $\gamma'\gamma''$, γ divise γ' ou γ''. On procédera par récurrence sur la dimension complexe n de V ; pour $n = 0$, il n'y a rien à démontrer. Désignant par 1_n l'assertion
148 du théorème pour la dimension n, on va faire voir d'abord que l'hypothèse de récurrence, c'est-à-dire l'assertion 1_{n-1}, entraîne l'assertion suivante :

Lemme 5 **Lemme A.6.** *Soit $\gamma \in W$; alors tout polynome unitaire de $K[z_n]$ qui divise γ dans $K[z_n]$ appartient à W et divise γ dans $A[z_n]$. Si γ est irréductible dans $A_0(\mathbf{C}^n)$, il l'est aussi dans $K[z_n]$.*

Comme on l'a vu au §A.1, 1_{n-1} entraîne que A est intégralement clos ; donc, d'après le lemme A.1, si $\gamma = \gamma'\gamma''$ avec γ', γ'' unitaires dans $K[z_n]$, γ' et γ'' sont dans $A[z_n]$. Si on écrit alors $\gamma = \gamma'\gamma''$ comme relation entre séries de TAYLOR en $z_1, \dots, z_n$, et qu'on y fasse $z_1 = \cdots = z_{n-1} = 0$, on voit immédiatement que γ', γ'' appartiennent à W. En particulier, si γ n'est pas irréductible dans $K[z_n]$, on pourra écrire $\gamma = \gamma'\gamma''$. où γ', γ'' sont des polynomes unitaires, tous deux de degré > 0, dans $K[z_n]$; d'après ce qui précède. ils sont dans W, et par suite ne sont pas inversibles dans $A_0(\mathbf{C}^n)$; s'il en est ainsi, γ n'est pas irréductible dans $A_0(\mathbf{C}^n)$.

Passons à la démonstration de 1_n. Soit $\gamma = \gamma_u(f)$ irréductible dans $A_u(V)$; soient $\gamma' = \gamma_u(f')$, $\gamma'' = \gamma_u(f'')$ deux éléments de $A_u(V)$ tels que γ divise $\gamma'\gamma''$. Appliquant les lemmes A.3 et A.2 (a), on est ramené au cas où $V = \mathbf{C}^n$, $u = 0$, et où f est un polynome de WEIERSTRASS ; soit m le degré de celui-ci. Appliquant le lemme A.2 (b) à f et f', et à f et f'', on est ramené au cas où f', f'' sont des polynomes en z_n. Comme γ est irréductible dans $A_0(\mathbf{C}^n)$ par hypothèse, il l'est aussi dans $K[z_n]$ d'après le lemme A.6 ; donc γ divise, soit γ', soit γ'' dans $K[z_n]$. Mais, comme γ est un polynome unitaire dans $A[z_n]$, le quotient par γ d'un polynome de $A[z_n]$ est encore un dans $A[z_n]$; donc γ divise, soit γ', soit γ'', dans $A[z_n]$ et à fortiori dans $A_0(\mathbf{C}^n)$. Cela achève la démonstration du théorème A.5, et en même temps celle du lemme A.6, pour tout n.

On abservera que la démonstration ci-dessus du théorème A.5 repose essentiellement sur les lemmes A.2 et A.3 ; le premier est valable, comme on sait, pour l'anneau des séries formelles à n variables sur un corps de base k quelconque ; la démonstration du second montre qu'il reste valable pour ce même anneau, pourvu que k soit infini. Donc cet anneau est factoriel, lui aussi, pourvu que k soit infini ; et on conclut aisément de là que le même résultat est valable pour k fini.

A.5. Sur une variété analytique complexe V, on peut considérer l'anneau des fonc- n° 5
tions holomorphes, qui n'est pas vide puisqu'il comprend en tout cas les constantes, et même les fonctions qui sont constantes sur chacune des composantes connexes de V. Si f est une fonction holomorphe sur V, l'ensemble des points u de V où $\gamma_u(f) = 0$ est ouvert et fermé, donc réunion de composantes connexes de V ; il
est immédiat que les diviseurs de 0, dans l'anneau des fonctions holomorphes sur 149
V, sont les fonctions qui s'annulent identiquement sur une composante connexe au moins de V ; en particulier, cet anneau est intègre si V est connexe. On définira de la manière habituelle l'anneau (resp. le corps, si V est connexe) des fractions de l'anneau des fonctions holomorphes sur V ; ses éléments, qui s'écrivent sous la forme f/g avec f, g holomorphes et g non diviseur de 0 sur V, s'appelleront les *fractions méromorphes* sur V. Si U est un ouvert de V, toute fraction méromorphe sur V induit d'une manière évidente une fraction méromorphe sur U.

Soit $\varphi = f/g$ une fraction méromorphe sur V, f et g étant holomorphes et g non diviseur de 0 sur V. Il est immédiat qu'en tout point u de V le germe de fonction méromorphe $\gamma_u(f)/\gamma_u(g)$ ne dépend que de u et φ ; on dira que c'est le germe déterminé en u par φ, et on le notera $\gamma_u(\varphi)$. Il est immédiat aussi que deux fractions méromorphes coïncident si elles déterminent le même germe en tout point de V. Plus généralement, soit $u \mapsto \gamma_u$ une application qui, à tout point u de V, fasse correspondre un élément γ_u de $K_u(V)$, c'est-à-dire un germe de fonction méromorphe en u ; on dira que cette application détermine une *fonction méromorphe* ψ sur V si, à tout point u de V, on peut faire correspondre un voisinage ouvert U de u et une fraction méromorphe ψ_u dans U tels qu'on ait $\gamma_{u'} = \gamma_{u'}(\psi_u)$ pour tout $u' \in U$; quand il en sera ainsi, on écrira $\gamma_u(\psi) = \gamma_u$ pour tout $u \in V$. Si φ est une fraction méromorphe sur V, on identifiera φ avec la fonction méromorphe définie par l'application $u \mapsto \gamma_u(\varphi)$. les fonctions méromorphes sur V peuvent être considérées d'une manière évidente comme formant un anneau (un corps, si V est connexe) dont les fractions méromorphes forment un sous-anneau (resp. un sous-corps).

Considérons maintenant une application $u \mapsto D_u$ qui, à tout point u de V, fasse correspondre un germe de diviseur D_u en u, c'est-à-dire un élément de $K_u(V)^*/E_u(V)$; on dira que cette application détermine un *diviseur* sur V si, à tout point u de V, on peut faire correspondre un voisinage ouvert U de u et une fonction méromorphe ψ_u

dans U tels qu'on ait $\gamma_{u'}(\psi_u) \neq 0$ et $D_{u'} = \mathrm{div}(\gamma_{u'}(\psi_u))$ pour tout $u' \in U$. D'après cette définition, si ψ est une fonction méromorphe sur V, ne s'annulant identiquement sur aucune composante connexe de V, l'application $u \mapsto \mathrm{div}(\gamma_u(\psi_u))$ définit un diviseur sur V qu'on notera $\mathrm{div}(\psi)$. Les diviseurs sur V peuvent, d'une manière évidente, être considérés comme formant un groupe commutatif ordonné, qui s'écrit additivement ; si D, D' sont les diviseurs respectivement définis par $u \mapsto D_u$, $u \mapsto D'_u$, la relation $D \succ D'$ signifiera donc qu'on a $D_u \succ D'_u$ pour tout u. Pour qu'une fonction méromorphe ψ sur V, ne s'annulant identiquement sur aucune com-
150 posante connexe de V, soit une fonction holomorphe, il faut et il suffit qu'on ait $\mathrm{div}(\psi) \succ 0$. L'application $\varphi \mapsto \mathrm{div}(\varphi)$ est un homomorphisme du groupe (multiplicatif) des fonctions méromorphes sur V, ne s'annulant identiquement sur aucune composante connexe de V, dans le groupe (additif) des diviseurs sur V ; le noyau de cet homomorphisme est formé par les fonctions holomorphes sur V qui ne s'annulent en aucun point de V ; comme il est bien connu, l'application du principe dit « du maximum » montre que, si V est compacte, une telle fonction est constante sur chaque composante connexe de V. Les diviseurs de la forme $\mathrm{div}(\varphi)$, avec φ méromorphe sur V, sont dits *linéairement équivalents à 0* sur V ; deux diviseurs D, D' sur V sont dit *linéairement équivalents* si $D - D'$ est linéairement équivalent à 0.

n° 6 A.6. Le théorème A.5 implique entre autre que le groupe des germes de diviseur en un point u d'une variété complexe V est réticulé, c'est-à-dire que tout ensemble fini $\{\delta_1, \ldots, \delta_r\}$ de tels germes admet une borne inférieure $\inf(\delta_\rho)$ et une borne supérieure $\sup(\delta_\rho)$. On va montrer maintenant qu'il en est de même du groupe des diviseur sur V ; ce résultat est contenu dans le suivant, qui est plus précis:

Th. 2 **Théorème A.7.** *Soient D, D' deux diviseurs sur ine variété complexe V ; pour tout $u \in V$, soient D_u, D'_u les germes de diviseur déterminés en u par D et D'. Alors l'application $u \mapsto D''_u = \inf(D_u, D'_u)$ définit un diviseur D'' sur V.*

Le théorème sera démontré si on fait voir que, pour tout $u \in V$, il y a un voisinage U et une fonction méromorphe ψ dans U tels que $D''_v = \mathrm{div}(\gamma_v(\psi))$ pour tout $v \in U$. Pour cela, on prendra ψ méromorphe dans un voisinage ouvert W de u et telle que $\mathrm{div}(\gamma_u(\psi)) = D''_u$; remplaçant alors V par W et D, D' par $D - \mathrm{div}(\psi), D' - \mathrm{div}(\psi)$ respectivement, on est ramené à démontrer que, si $D''_u = 0$, on a $D''_v = 0$ pour tout v suffisamment voisin de u. Comme $D''_u = 0$ entraîne $D_u \succ 0, D'_u \succ 0$, il y aura un voisinage de u où on pourra écrire $D = \mathrm{div}(f), D' = \mathrm{div}(f')$, f et f' étant holomorphes dans ce voisinage. Appliquant les lemmes A.3 et A.2 (a) du §A.3, on se ramène au cas où V est un voisinage de 0 dans $\mathbf{C}^n$, où $u = 0$, et où f, f' sont des polynomes de WEIERSTRASS ; avec les notations du §A.4, $\gamma_0(f)$ et $\gamma_0(f')$ sont alors dans W. Il s'ensuit, d'après le lemme A.6, que le polynome unitaire de $K[z_n]$ qui est, dans $K[z_n]$, le pgcd de $\gamma_0(f)$ et $\gamma_0(f')$ est dans W, donc n'est pas inversible dans $A_0(\mathbf{C}^n)$ à moins qu'il ne soit de degré 0 et par suite égal à 1. L'hypothèse $D''_0 = 0$, qui signifie que $\gamma_0(f)$ et $\gamma_0(f')$ sont étrangers l'un à l'autre dans $A_0(\mathbf{C}^n)$, implique donc qu'ils le sont aussi dans $K[z_n]$; cela revient à dire qu'il y a une fonction φ de $z_1, \ldots, z_{n-1}$, holomorphe au voisinage de 0, et des polynomes g, g' en z_n à coefficients holomorphes en $z_1, \ldots, z_{n-1}$ au voisinage
151 de 0, tels que l'on ait $\gamma_0(fg + f'g' - \varphi) = 0$ et $\gamma_0(\varphi) \neq 0$. Il y aura alors un voisinage ouvert U de 0 dans $\mathbf{C}^n$ où f, f', g, g', φ seront holomorphes et où on aura $fg + f'g' = \varphi$. Soit $v = (v_1, \ldots, v_n)$ un point de U ; d'après le th. A.5, $\gamma_v(f)$ et $\gamma_v(f')$ auront un pgcd dans l'anneau $A_v(\mathbf{C}^n)$; écrivons ce pgcd sous la forme $\gamma_v(F)$, F étant une fonction holomorphe au voisinage de v ; alors f et f' sont des polynomes unitaires en z_n, à coefficients holomorphes en $z_1, \ldots, z_{n-1}$, il est donc

impossible que $F(v_1, \dots, v_{n-1}, z_n)$, qui est une fonction de z_n holomorphe dans un voisinage de v_n, s'annule identiquement dans un voisinage de v_n. Par conséquent, F satisfait au point v, par rapport aux coordonnées locales $z_i - v_i$, à l'hypothèse du lemme A.2 (pour un choix convenable de l'exposant m) et peut donc, en vertu de ce lemme, être remplacée par un polynome de WEIERSTRASS par rapport aux $z_i - v_i$. Mais on a, dans U, $fg + f'g' = \varphi$; cela implique que $\gamma_v(\varphi)$ est multiple de $\gamma_v(F)$ dans $A_0(\mathbf{C}^n)$, donc aussi, d'après le lemme A.4, dans l'anneau $A'[z_n]$ si A' désigne l'anneau des germes de fonction holomorphe au point $(v_1, \dots, v_{n-1})$ dans $\mathbf{C}^{n-1}$. Par suite F, considérée comme polynome en $z_n - v_n$, divise φ qui est de degré 0 en $z_n - v_n$ et est elle-même de degré 0 ; comme F est un polynome unitaire, cela donne $F = 1$. Autrement dit, $\gamma_v(f)$ et $\gamma_v(f')$ sont étrangers l'un à l'autre dans $A_v(\mathbf{C}^n)$, et cela quel que soit $v \in U$; cela achève la démonstration.

Corollaire A.8. *Le groupe ordonné des diviseurs sur une variété complexe est réticulé.* Cor.

On pourra donc appliquer aux diviseurs sur une variété les notations usuelles pour les groupes réticulés. En particulier, si D est un diviseur, on écrira $D^+ = \sup(D, 0)$, $D^- = \sup(-D, 0)$; D^+ et D^- sont les diviseurs positifs, étrangers l'un à l'autre, tels que $D = D^+ - D^-$; on notera que, d'après le th. A.7, les germes D_u^+, D_u^- qu'ils déterminent en un point quelconque u de V sont étrangers l'un à l'autre. Plus généralement, le th. A.7 peut s'énoncer en disant que, si D et D' sont deux diviseurs, les diviseurs $\inf(D, D')$ et $\sup(D, D')$ sont ceux qui sont définis par $u \mapsto \inf(D_u, D'_u)$ et par $u \mapsto \sup(D_u, D'_u)$ respectivement.

Soit D un diviseur sur une variété V ; pour $u \in V$, soit D_u le germe déterminé par D en u ; on appellera *support de* D, et on notera $|D|$, l'ensemble des points u de V tels que $D_u \neq 0$; il résulte immédiatement de la définition des diviseurs que cet ensemble est fermé et rare dans V. On voit immédiatement aussi, à partir des définitions et du th. A.7, que, si D et D' sont deux diviseurs, les supports de $D + D'$, $\inf(D, D')$, $\sup(D, D')$ sont contenus dans $|D| \cup |D'|$; si $0 \prec D \prec D'$, on a 152
$|D| \subset |D'|$; et, quel que soit le diviseur D, on a:

$$|D| = |D^+ + D^-| = |D^+| \cup |D^-|.$$

Théorème A.9. *Si D est un diviseur sur une variété complexe connexe V, $V - |D|$ est connexe.* Th. 3

En remplaçant au besoin D par $D^+ + D^-$, on peut supposer $D \succ 0$. Supposons que $V - |D|$ ne soit pas connexe, donc admette une partition en deux ouverts disjoints non vides V' et V'' ; soient $\overline{V'}, \overline{V''}$ les adhérences de V', V''. Comme $|D|$ est rare dans V, on a $\overline{V'} \cup \overline{V''} = V$; comme V est connexe, $\overline{V'}$ et $\overline{V''}$ ne peuvent donc être disjoints ; soit u un point de $\overline{V'} \cap \overline{V''}$. Quel que soit le voisinage ouvert U de u, $U \cap V'$ et $U \cap V''$ formeront alors une partition de l'ensemble $U' = U - (U \cap |D|)$ en deux ouverts disjoints non vides, ce qui implique que U' n'est pas connexe. Mais, si U est un voisinage de u dans lequel on ait $D = \mathrm{div}(f)$, avec f holomorphe dans U, U' sera l'ensemble des points de U où $f \neq 0$. En prenant des coordonnées locales en u, on se ramène au cas où U est un voisinage ouvert de $u = 0$ dans $\mathbf{C}^n$, voisinage qu'on peut supposer convexe. Quels que soient $a \in U', b \in U'$, l'ensemble T des $t \in \mathbf{C}$ tels que $a + (b - a)t \in U$ sera un ouvert convexe dans $\mathbf{C}$, contenant 0 et 1 ; et $f(a + (b - a)t)$ sera une fonction holomorphe dans T, ne s'annulant ni en 0 ni en 1 ; ses zéros dans T seront donc isolés, et l'ensemble des points où elle ne s'annule pas sera connexe. Par suite a et b appartiennent à une même composante connexe de U', ce qui montre que U' est connexe.

A.7. Soit φ une application holomorphe d'une variété complexe W dans une variété complexe V. Si f est holomorphe dans un ouvert U de V, et si φ' est la restriction de φ à $U' = \varphi^{-1}(U)$, la fonction $f' = f \circ \varphi'$ sera holomorphe dans U'. Il est immédiat que, si $x \in U'$, le germe $\gamma' = \gamma_x(f')$ ne dépend que de x, de φ et du germe $\gamma = \gamma_{\varphi(x)}(f)$; on érira $\gamma' = \gamma \circ \varphi_x$. L'application $\gamma \mapsto \gamma \circ \varphi_x$ est évidemment un homomorphisme de l'anneau $A_{\varphi(x)}(V)$ dans $A_x(W)$, qui applique le groupe $E_{\varphi(x)}(V)$ des éléments inversibles du premier anneau dans le groupe $E_x(W)$ des éléments inversibles du second. Soit γ un élément de $K_{\varphi(x)}(V)$, c'est-à-dire un germe de fonction méromorphe en $\varphi(x)$ sur V ; d'après le th. A.5, on peut l'écrire $\gamma = \gamma'/\gamma''$, où γ', γ'' sont des éléments de $A_{\varphi(x)}(V)$ étrangers l'un à l'autre, et qui sont déterminés par là à un facteur inversible près ; si $\gamma'' \circ \varphi_x \neq 0$, on posera $\gamma \circ \varphi_x = (\gamma' \circ \varphi_x)/(\gamma'' \circ \varphi_x)$, ce qui se justifie par le fait que le second membre ne dépend que de x, γ et φ. Si de plus on a $\gamma' \circ \varphi_x \neq 0$, le germe de diviseur $\operatorname{div}(\gamma \circ \varphi_x)$ en x sur W est défini ; on conviendra d'écrire n° 7

$$\operatorname{div}(\gamma \circ \varphi_x) = \varphi_x^{-1}(\operatorname{div}(\gamma)),$$

153 ce qui se justifie par le fait que le premier membre ne dépend que de x, de φ et du germe de diviseur $\operatorname{div}(\gamma)$ au point $\varphi(x)$ sur V.

Pour passer de là aux définitions globales correspondantes, on s'appuyera sur le théorème suivant:

Th. 4 **Théorème A.10.** *Soit φ une application holomorphe d'une variété complexe connexe W dans une variété complexe V ; soit D un diviseur sur V. Alors, ou bien on a $\varphi(W) \subset |D|$, ou $\varphi^{-1}(|D|)$ est rare dans W.*

La conclusion revient à dire que l'ensemble X des points intérieurs à $\varphi^{-1}(|D|)$ est fermé dans W ; en effet, comme X est aussi ouvert, on aura $X = W$ ou $X = \varnothing$ si W est connexe. En ramplaçant au besoin D par $D^+ + D^-$. on peut supposer $D \succ 0$. Soit $x \in W - X$; soit U un voisinage ouvert de $\varphi(x)$ sur V, tel que, dans U, on puisse écrire $D = \operatorname{div}(f)$ avec f holomorphe dans U. Alors $|D| \cap U$ est l'ensemble des zéros de f dans U ; par suite, si φ' désigne la restriction de φ à $U' = \varphi^{-1}(U)$, $\varphi^{-1}(|D|)$ coïncidera dans U' avec l'ensemble des zéros de $f' = f \circ \varphi'$. Comme on a supposé que x n'est pas dans X, il y a un voisinage U'' de x dans U' où l'ensemble des zéros de f' est rare, et qui est donc disjoint de X. Cela achève la démonstration.

Cor. 1 **Corollaire A.11.** *Soit φ une application holomorphe d'une variété complexe connexe W dans une variété complexe V. Soit D un diviseur sur V, tel que $\varphi(W) \not\subset |D|$; pout tout $u \in V$, soit D_u le germe de diviseur déterminé en u par D. Alors, quel que soit $x \in W$, le germe $D'_x = \varphi_x^{-1}(D_{\varphi(x)})$ est défini ; l'application $x \mapsto D'_x$ définit un diviseur D' sur W ; on a $|D'| \subset \varphi^{-1}(|D|)$; et, si $D \succ 0$, on a $|D'| = \varphi^{-1}(|D|)$.*

Soit U une partie ouverte de V dans laquelle on ait $D^+ = \operatorname{div}(f)$, $D^- = \operatorname{div}(g)$, f et g étant holomorphes dans U ; soit φ' la restriction de φ à $U' = \varphi^{-1}(U)$. Dans U, le support de D coïncide avec l'ensemble des zéros de fg ; comme $\varphi^{-1}(|D|)$ est rare sur W d'après le th. A.10, il s'ensuit que les fonctions holomorphes $f' = f \circ \varphi'$, $g' = g \circ \varphi'$ dans U' ne s'annulant dans aucun ouvert de U'. Alors, pour tout $x \in U'$, on aura $D'_x = \operatorname{div}(\gamma_x(f'/g'))$. Si U parcourt l'ensemble des parties ouvertes de V, les U' formeront un recouvrement ouvert de W. On a donc bien montré que l'application $x \mapsto D'_x$ détermine un diviseur D', qui, avec les notations ci-dessus, coïncide avec $\operatorname{div}(f'/g')$ dans U'. Si $x \in U'$, et si $\varphi(x)$ n'est pas dans $|D|$, $\varphi(x)$ ne sera pas un zéro de fg, donc x n'en sera pas un pour $f'g'$, et on aura $D'_x = 0$. On a donc bien $|D'| \subset \varphi^{-1}(|D|)$. Si D est positif, le support de D dans U sera l'ensemble des zéros de f, et celui de D' dans U' sera l'ensemble des zéros de f' ; donc, dans ce cas, $|D'|$

154 n'est autre que $\varphi(|D|)$. Si D n'est pas positif, il n'en est plus nécessairent de même, parce que les germes $\gamma_x(f'), \gamma_x(g')$ peuvent ne pas être étrangers l'un à l'autre dans $A_x(W)$.

Avec les notations du corollaire A.11 ci-dessus, on conviendra de poser $D' = \varphi^{-1}(D)$. En particulier, si W est une variété connexe plongée dans V et si φ est l'injection canonique de W dans V, le diviseur $\varphi^{-1}(D)$ s'appellera *le diviseur induit par D sur W* chaque fois qu'il est défini, c'est-à-dire que W n'est pas contenu dans $|D|$. Ces conditions s'étendent d'une manière évident au cas où W n'est pas connexe ; il faut supposer, en ce cas, que $\varphi^{-1}(|D|)$ ne contient aucune composante connexe de W.

Corollaire A.12. *Soit φ une application holomorphe d'une variété complexe connexe W dans une variété complexe V. Soit ψ une fonction méromorphe non identiquement nulle sur V ; soit $D = \operatorname{div}(\psi)$; on suppose que $\varphi(W) \not\subset |D^-|$. Alors, quel que soit $x \in W$, le germe de fonction méromorphe $\psi'_x = \gamma_{\varphi(x)}(\psi) \circ \varphi_x$ est défini ; et l'application $x \mapsto \psi'_x$ détermine une fonction méromorphe ψ' sur W. De plus, si $\varphi(W) \subset |D^+|$, ψ' s'annule identiquement ; sinon, ψ' ne s'annule pas identiquement, et on a $\operatorname{div}(\psi') = \varphi^{-1}(\operatorname{div}(\psi))$.* Cor. 2

Soit U une partie ouverte de V où on ait $D^- = \operatorname{div}(g)$, avec g holomorphe dans U ; soit $f = g\psi$ dans U ; on aura $\operatorname{div}(f) = D^+$, donc f est holomorphe dans U. Soit φ' la restriction de φ à $U' = \varphi^{-1}(U)$; posons $f' = f \circ \varphi'$, $g' = g \circ \varphi'$. Comme, d'après le th. A.10, $\varphi^{-1}(|D^-|)$ est rare dans W, g' ne s'annule dans aucune partie ouverte de U', et par suite f'/g' est une fraction méromorphe dans U'. On a alors, pour tout $x \in U', \psi'_x = \gamma_x(f'/g')$, de sorte que ψ' est la fonction méromorphe qui coïncide avec f'/g' dans U' quel que soit U. Comme $|D^+|$ coïncide, dans U, avec l'ensemble des zéros de f, on a $f' = 0$ si $\varphi(W) \subset |D^+|$. Sinon $\varphi^{-1}(|D^+|)$ est rare dans W, et par suite f' ne s'annule dans aucune partie ouverte de U'. La dernière relation du corollaire résulte alors ausitôt des définitions.

Avec les notations du corollaire A.12, on écrira $\psi' = \psi \circ \varphi$. Il est immédiat que, si ψ est holomorphe, cette notation coïncide avec la notation habituelle. On l'étend d'une manière évident au cas où V et W ne sont pas supposées connexes.

A.8. Soit X une partie d'une variété complexe V ; soit $x \in X$; s'il existe un voisinage ouvert U de x dans V tel que $X \cap U$ soit une sous-variété de U (et par suite une variété plongée dans V ; cf. §3.1), on dira que X est une sous-variété de V au voisinage de x ; s'il en est ainsi et que n et p soient les dimensions complexes de V et de $X \cap U$ respectivement, on dira que X est, au voisinage de x, une sous-variété de V de dimension p et de codimension $n - p$; il en est alors de même de X au voisinage de tout point de $X \cap U$. Par suite, l'ensemble des points de X au voisinage desquels X est une sous-variété de V de codimension $n - p$ est ouvert dans X. nº 8 155

Si D est un diviseur sur V, un point du support $|D|$ de D sera dit *simple sur* $|D|$ si $|D|$ est, au voisinage de ce point, une sous-variété de V de codimension 1. L'ensemble des points simples de $|D|$ est donc une variété de codimension 1 plongée dans V.

Soit f une fonction holomorphe dans un voisinage de u sur V et s'annulant en u ; avec les notations du §A.2, supposons qu'on ait $m(\gamma_u(f)) = 1$. Cela veut dire que, si $z_1, \ldots, z_n$ sont des coordonnées locales au voisinage de u, l'une au moins des dérivées partielles $\partial f/\partial z_i$ ne s'annule pas en u ; si par example $\partial f/\partial z_n \neq 0$ en u, on peut prendre $(z_1, \ldots, z_{n-1}, f)$ comme coordonnées locales en u. Par suite, si $m(\gamma_u(f)) = 1$, l'ensemble des zéros de f, ou, ce qui revient au même, le support de $\operatorname{div}(f)$ est au voisinage de u une sous-variété de V de codimension 1. Il est clair d'autre part que $\gamma_u(f)$ est irréductible dans $A_u(V)$.

Lemme 6 **Lemme A.13.** *Soient f, g deux fonctions holomorphes en u sur V, telles que $\gamma_u(f)$ soit irréductible et que $\gamma_u(g)$ ne soit pas multiple de $\gamma_u(f)$ dans $A_u(V)$. Alors il y a, dans tout voisinage de u, un point v tel que $m(\gamma_v(f)) = 1$ et $g(v) \neq 0$.*

En vertu des lemmes A.3 et A.2 (a), on peut supposer $V = \mathbf{C}^n$, $u = 0$, et que f et g sont des polynomes de Weierstrass. En vertu des hypothèses et du lemme A.6, $\gamma_0(f)$ est est irréductible dans $K[z_n]$ et n'y divise pas $\gamma_0(g)$; si on pose $f' = \partial f/\partial z_n, \gamma_0(f)$ ne divise pas $\gamma_0(f')$ dans $K[z_n]$; donc $\gamma_0(f)$ est étranger à $\gamma_0(f'g)$ dans $K[z_n]$. Cela revient à dire qu'il y a une fonction φ de $z_1, \ldots, z_{n-1}$, holomorphe au voisinage de 0, et des polynomes h, h' en z_n à coefficients holomorphes en $z_1, \ldots, z_{n-1}$ au voisinage de 0, tels que l'on ait $\gamma_0(fh + f'h' - \varphi) = 0$ et $\gamma_0(\varphi) \neq 0$. Soit U un voisinage de 0 dans $\mathbf{C}^n$ où toutes les fonctions considérées soient holomorphes et où on ait $fh + f'h' = \varphi$. Comme $\gamma_0(\varphi) \neq 0$, il y aura des points $(z_1, \ldots, z_{n-1})$ de $\mathbf{C}^{n-1}$, aussi voisins de 0 qu'on veut, où φ ne s'annule pas. Choisissons un tel point, assez voisin de 0 pour que f, considéré comme un polynome en z_n, ait une racine ζ telle que le point $v = (z_1, \ldots, z_{n-1}, \zeta)$ soit dans U ; cela est possible en vertu du théorème sur la continuité des racines d'un polynome en fonction des coefficients. On aura alors $f(v) = 0, \varphi(v) \neq 0$, donc $g(v) \neq 0$ et $f'(v) \neq 0$;
156 cette dernière relation entraîne $m(\gamma_v(f)) = 1$, ce qui achève la démonstration.

Lemme 7 **Lemme A.14.** *Soient D un diviseur sur une variété complexe V, u un point de $|D|$, D_u le germe en u par D, et f une fonction holomorphe en u sur V et telle que $\gamma_u(f)$ soit irréductible dans $A_u(V)$. Alors pour que $|D|$, au voisinage de u, soit contenu dans l'ensemble des zéros de f, il faut et il suffit qu'on ait $D_u = \operatorname{div}(\gamma_u(f^m))$ avec m entier.*

Il est clair que la condition est suffisante. Supposons donc que $|D|$, dans un voisinage U de u, soit contenu dans l'ensemble des zéros de f ; on peut supposer U assez petit pour qu'on puisse écrire, dans U, $D^+ = \operatorname{div}(g)$, $D^- = \operatorname{div}(h)$, avec g, h holomorphes dans U. Supposons que $\gamma_u(gh)$ ait dans $A_u(V)$ un facteur irréductible $\gamma \neq \gamma_u(f)$. On pourra écrire $\gamma_u(gh) = \gamma^r\gamma'$ avec r entier > 0 et γ' étranger à γ dans $A_u(V)$, puis $\gamma = \gamma_u(z), \gamma' = \gamma(z')$ avec z, z' holomorphes en u dans V. Il y aura alors un voisinage U' de u dans U où z, z' soient holomorphes et où on ait $gh = zz'$. Appliquons le lemme A.13 à z et f ; on en conclut qu'il y a des points aussi voisins de u qu'on veut où $z = 0$ et $f \neq 0$; ces points appartiendront au support de $D^+ + D^-$, c'est-à-dire à $|D|$, ce qui est contraire à l'hypothèse. Donc $\gamma_u(gh)$ n'a pas d'autre facteur irréductible que $\gamma_u(f)$, d'où immédiatement la conclusion.

Th. 5 **Théorème A.15.** *Soit D un diviseur sur une variété complexe V. Alors l'ensemble W des points simples de $|D|$ est une variété de codimension 1 plongée dans V, ouverte et dense dans $|D|$. De plus, pour que $|D|$ soit une sous-variété de V au voisinage d'un point $u \in |D|$, il faut et il suffit que le germe D_u déterminé par D en u soit de la forme $D_u = m\delta$, où δ est un germe de diviseur irréductible tel que $\mu(\delta) = 1$; et u est alors simple sur $|D|$.*

Montrons d'abord que W est dense dans $|D|$; on peut, pour cela, se borner au cas où $D \succ 0$, car, si le diviseur D n'était pas pas positif, on pourrait le ramplacer par $D^+ + D^-$ qui a même support. Soit $u \in |D|$; soit U un voisinage de u où on puisse écrire $D = \operatorname{div}(f)$ avec f holomorphe dans U. Soit γ un facteur irréductible de $\gamma_u(f)$ dans $A_u(V)$; on pourra écrire $\gamma_u(f) = \gamma^r\gamma'$ avec γ' étranger à γ, puis $\gamma = \gamma_u(z), \gamma' = \gamma(z')$ avec z, z' holomorphes en u dans V ; il y aura alors un voisinage U' de u dans U où z, z' soient holomorphes et où on ait $f = z^r z'$. Le lemme A.13, appliqué à z et z', montre qu'il y a des points v aussi voisins qu'on veut de u et tels que $m(\gamma_v(z)) = 1, z'(v) \neq 0$. Comme $|D|$ est une sous-variété de V au voisinage d'un point $u \in |D|$, de qui précède montre que cette sous-variété est de codimension 1, c'est-à-dire que u est simple sur $|D|$. Il y a alors des coordonnées locales $z_1, \ldots, z_n$ en u sur V telles que $|D|$ coïncide au voisinage de u avec l'ensemble des zéros de z_n, ce qui, d'après le lemme A.14, implique $D_u = m\delta$ avec $\delta = \operatorname{div}(\gamma_u(z_n))$. Le reste est immédiat. 157

Corollaire A.16. *Soit D un diviseur sur une variété complexe V ; soit W la variété des points simples de $|D|$; soit X une variété de codimension 1 plongée dans V, contenue dans $|D|$. Alors $X \cap W$ est ouvert dans W et est ouvert et dense dans X.* Cor.

Ici encore, en remplaçant au besoin D par $D^+ + D^-$, on peut supposer $D \succ 0$. Soit u un point de X ; soient U un voisinage de u et $z_1, \ldots, z_n$ des coordonnées locales dans u tels que X soit défini dans U par $z_n = 0$ et que, dans U, on ait $D = \operatorname{div}(f)$ avec f holomorphe dans U. Par hypothèse, l'ensemble des zéros de f contient celui de z_n dans U ; le lemme A.13, appliqué à z_n et f, montre alors que $\gamma_u(f)$ est multiple de $\gamma(z_n)$ dans $A_u(V)$. On peut donc écrire $\gamma_u(f) = \gamma_u(z_n^r)\gamma'$, avec r entier > 0 et γ' étranger à $\gamma_u(z_n)$ dans $A_u(V)$, puis $\gamma' = \gamma_u(z')$ avec z' holomorphe en u ; le lemme A.13, appliqué à z_n et z', montre qu'il y a des points aussi voisins qu'on veut de u, au voisinage desquels $|D|$ coïncide avec X ; ces points appartiennent donc à $X \cap W$. Pour que u lui-même appartienne à $X \cap W$, il faut et il suffit, dápres le th. A.15, qu'on ait $D_u = m\delta$ et $\mu(\delta) = 1$; avec les notations ci-dessus, cela implique $m = r, \delta = \gamma_u(z_n), \gamma' = 1$; alors W coïncide avec X au voisinage de u. Cela achève la démonstration.

D'après le théorème A.15, si u est un point simple sur le support de $|D|$ d'un diviseur D et que D_u désigne le germe déterminé par D en u, on a, soit $D_u \succ 0$, soit $D_u \prec 0$; et l'entier m qui figure dans l'énoncé de ce théorème est donné dans le premier cas par $m = \mu(D_u)$ et dans le second par $m = -\mu(-D_u)$. Cet entier sera appelé *la multiplicité de D en u* ; s'il est égal à 1, u sera dit un *point simple de D* (et non pas seulement de $|D|$). Il est clair que l'ensemble des points simples de $|D|$ où D a une multiplicité donnée est ouvert sur la variété W des points simples de $|D|$; il s'ensuit que la multiplicité de D a une valeur constante sur chacune des composantes connexes de W.

Théorème A.17. *Un diviseur D sur une variété complexe V est déterminé d'une manière unique par son support $|D|$ et par sa muliplicité en un point de chacune des composantes connexes de la variété W des point simples de $|D|$.* Th. 6

Soit D' un diviseur de même support que D. Les muliplicités de D et D' étant constantes sur chque composante connexe de W, elles sont égales partout si elles le sont en un point de chacune de ces composantes. Soit $u \in W$; au voisinage de u, W sera définie par $f = 0$, f étant holomorphe en u et telle que $m(\gamma_u(f)) = 1$; le lemme A.14 et le th. A.15 montrent alors que D et D' coïncident au voisinage de u avec $\operatorname{div}(f^m)$, où m est leur multiplicité commune en u ; par suite, u n'appartient pas au support du diviseur $D'' = D - D'$. Soit W'' la variété des points simples 158
de $|D''|$; comme $|D''| \subset |D|$, le corollaire A.16 montre que $W'' \cap W$ est dense dans W'', donc aussi dans $|D''|$ d'après le th. A.15 ; comme en vient de montrer que W est disjoint de $|D''|$ et a fortiori de W'', il s'ensuit que $|D''|$ est vide, d'où $D'' = 0$.

D'après le th. A.17, deux diviseurs D, D' coïncident nécessairement s'ils ont même support $|D| = |D'|$ et même multiplicité en chacun des points d'une partie partout dense de la variété des points simples de $|D|$. C'est souvent sous cette forme qu'il est le plus commode d'appliquer le th. A.17.

n° 9 A.9. Afin d'énoncer commodément le lemme suivant, convenons de désigner par $P(\eta)$, pout tout $\eta > 0$, le polycylindre défini dans $\mathbf{C}^{n-1}$ par $|z_i| < \eta$ $(1 \leq i \leq n-1)$, et par $C(\varepsilon)$, pour tout $\varepsilon > 0$, le disque $|z_n| < \varepsilon$ dans $\mathbf{C}$.

Lemme 8 **Lemme A.18.** *Soit f un polynome de* Weierstrass *tel que $\gamma_0(f)$ soit irréductible dans $A_0(\mathbf{C}^n)$; soit $\varepsilon > 0$. Alors il y a $\eta_0 > 0$ tel que les coefficients de f soient holomorphes dans $P(\eta_0)$ et que, pour tout η satisfaisant à $0 < \eta \leq \eta_0$, l'ensemble des points $w \in P(\eta) \times C(\varepsilon)$ où on a $m(\gamma_w(f)) = 1$ soit une variété connexe plongée dans $\mathbf{C}^n$, dense dans l'ensemble des zéros de f dans $P(\eta) \times C(\varepsilon)$.*

Soit m le degré de f en z_n ; on a $m > 0$ (sinon f se réduirait à 1). D'après le lemme A.6, $\gamma_0(f)$ est irréductible dans $K[z_n]$. Posons $f' = \partial f / \partial z_n$ et raisonnons comme dans la démonstration du lemme A.13 ; on voit ainsi qu'il y aura une fonction φ de $z_1, \ldots, z_{n-1}$, holomorphe au voisinage de 0, et des polynomes h, h' en z_n, à coefficients holomorphes en $z_1, \ldots, z_{n-1}$ au voisinage de 0, tels que $\gamma_0(fh + f'h' - \varphi) = 0$ et $\gamma_0(\varphi) \neq 0$. Soit $\eta_1 > 0$ tel que φ et les coefficients de f, h, h' soient holomorphes dans $P(\eta_1)$; on aura alors $fh + f'h' = \varphi$ dans $P(\eta_1) \times \mathbf{C}$. En vertu du théorème sur la continuité des racines d'un polynome, il y aura alors un η_0 satisfaisant à $0 < \eta_0 < \eta_1$ et tel que le polynome f en z_n ait toutes ses racines dans $C(\varepsilon)$ pourvu que $|z_i| \leq \eta_0$ pour $1 \leq i \leq n-1$. On va montrer que η_0 a la propriété énoncée dans ce lemme.

Pour cela, soit $0 < \eta \leq \eta_0$; pour abréger, écrivons P_0, P et C au lieu de $P(\eta_0), P(\eta)$ et $C(\varepsilon)$. Soient Z l'ensemble des zéros de f dans $P \times C$, W l'ensemble des points w de $P \times C$ où $m(\gamma_w(f)) = 1$, et W' l'ensemble des points de Z où $\varphi \neq 0$; W est l'ensemble des points simples de $\mathrm{div}(f)$ dans $P \times C$ et est donc une variété de codimension 1 plongée dans $P \times C$; et, comme on a $f' \neq 0$ en tout point de W', W' est contenu dans W. On va montrer d'abord que W' est connexe. Soit en effet P' l'ensemble des points de P où $\varphi \neq 0$; il est connexe d'après le th. A.9.
159 Pour $(z_1, \ldots, z_{n-1}) \in P'$, le polynome f en z_n est étranger à f' et a donc m racines distinctes $\zeta_1, \ldots, \zeta_m$ qui sont toutes dans C. En vertu du théorème des fonctions implicites, chacune des racines ζ_μ est une fonction holomorphe de $z_1, \ldots, z_{n-1}$ en tout point de P' ; il s'ensuit que W', muni de sa projection sur P', est un revêtement de P' de degré m (c'est-à-dire « à m feuillets ») ; s'il n'était pas connexe. ce serait donc la réunion de deux revêtement W'_1, W'_2, non vides et disjoints. Supposons que ce soit le cas ; soit m_1 le degré du revêtement W'_1 ; et, pour chaque $(z_1, \ldots, z_{n-1})$ dans P', soient $\zeta_1, \ldots, \zeta_{m_1}$ celles des racines de f qui correspondent aux points de W'_1 se projetant en ce point de P'. Posons

$$f_1 = (z_n - \zeta_1) \cdots (z_n - \zeta_{m_1}).$$

C'est un polynome en z_n à coefficients holomorphes et bornés dans P', puisque toutes ses racines sont holomorphes et sont à valeurs dans C. Si on différentie, pour $1 \leq \mu \leq m$, la relation $f(\zeta_\mu) = 0$, on obient

$$f'(\zeta_\mu) d\zeta_\mu = \sum_{i=1}^{n-1} F_i dz_i,$$

où les F_i sont des polynomes en ζ_μ à coefficients holomorphes dans P_0. En multipliant par $h'(\zeta_\mu)$, on tire de là $\varphi d\zeta_\mu = \sum_i G_i dz_i$, où les G_i sont encore de tels polynomes. Il s'ensuit que, si ψ est l'un quelconque des coefficients du polynome f_1, $\varphi d\psi$ est de la forme $\sum_i H_i dz_i$, où les H_i sont des polynomes en $\zeta_1, \ldots, \zeta_{m_1}$, à coefficients holomorphes dans P_0 ; les H_i sont donc bornés dans P'. On en conclut immédiatement que la fonction égale à $\varphi^2 \psi$ dans P' et à 0 sur $P - P'$ est continue et dans la classe C^1 (c'est-à-dire à dérivées premières partout définies et continues) dans P, nulle ainsi que ses dérivées premières en tout point de P où $\varphi = 0$, et que

sa différentielle est en tout point une combinaison linéaire des dz_i. Cette fonction est donc holomorphes dans P, et par suite ψ est méromorphe dans P. Mais alors $\gamma_0(f_1)$ est dans $K[z_n]$ et divise $\gamma_0(f)$ dans $K[z_n]$, de sorte qu'on a, soit $f_1 = 1$ et $m_1 = 0$, soit $f_1 = f$ et $m_1 = m$, contrariment à l'hypothèse que W_1' et W_2' ne sont pas vides. Donc W' est connexe. Comme on a $W' \subset W \subset Z$, il suffira, pour achever la démonstration, de faire voir que W' est dense dans Z. Pour cela, soit $a = (a_1, \ldots, a_n)$ un point de Z ; soit $\gamma_a(f_0)$ un facteur irréductible de $\gamma_a(f)$ dans $A_a(\mathbf{C}^n)$, f_0 étant holomorphe en a. Comme f/f_0 est holomorphe en a, et que f est un polynome en z_n, f_0 satisfait en a, par rapport aux coordonnées $z_i - a_i$, aux hypothèses du lemme A.2 ; en vertu de ce lemme, on peut donc, en remplaçant $\gamma_a(f_0)$ par un élément qui lui est associé dans $A_a(\mathbf{C}^n)$, supposer que f_0 est un polynome 160
de Weierstrass par rapport aux $z_i - a_i$. Mais alors le lemme A.4 montre que $\gamma_a(\varphi)$ ne peut être multiple de $\gamma_a(f_0)$ dans $A_a(\mathbf{C}^n)$. D'après le lemme A.13, il y a donc, dans tout voisinage de a, des points où $f_0 = 0$ et par suite $f = 0$, et où $\varphi \neq 0$.

A.10. On dira qu'une famille (D_α) de diviseurs sur V est *localement finie* si tout nº 10
point u de V a un voisinage U tel que l'ensemble des α pour lequels $|D_\alpha|$ rencontre U soit fini. Il y a alors un diviseur D sur V qui détermine en tout point u un germe D_u somme des germes $D_\alpha(u)$ déterminés en u par les D_α, ces germes étant nuls sauf un nombre fini d'entre eux quel que soit u ; lorsqu'il en est ainsi, on écrirera $D = \sum_\alpha D_\alpha$.

Théorème A.19. *Soit D un diviseur sur une variété complexe V, W la variété* Th. 7
des point simples de $|D|$, W_α les composantes connexes de W, et m_α la multiplicité de D aux points de W_α. Alors, pour tout α, il y a un diviseur irréductible D_α ayant pour support l'adhérence de W_α et ayant un point simple en tout point de W_α ; et W_α est l'ensemble des points simples de D_α qui n'appartiennent à aucun $|D_\beta|$ pout $\beta \neq \alpha$. La famille (D_α) est localement finie ; on a $D = \sum_\alpha m_\alpha D_\alpha$; et c'est là l'expression unique de D au moyen d'une famille localement finie de diviseurs irréductibles distincts.

Soit u un point de V ; on pourra, dans un voisinage de u, écrire $D = \sum_i n_i \operatorname{div}(f_i)$, les f_i étant holomorphes en u et telles que les germes $\gamma_u(f_i)$ soient irréductibles et deux à deux non associés dans $A_u(V)$. D'après le th. A.7, les germes $\gamma_v(f_i)$ seront étrangers deux à deux dans $A_v(V)$ dès que v est assez voisin de u. On peut donc choisir un voisinage ouvert U_0 de u tel que les f_i y soient holomorphes, que D y soit donnée par $D = \sum_i n_i \operatorname{div}(f_i)$, et que les $\gamma_v(f_i)$ soient étrangers deux à deux dans $A_v(V)$ pour tout $v \in U_0$. Appliquons aux f_i les lemmes A.3 et A.2(a), puis le lemme A.18 ; on en conclut qu'il y a un voisinage ouvert U de u dans U_0 tel que, pour chque i, l'ensemble W_i des points w de U où $m(\gamma_w(f_i)) = 1$ soit connexe et dense dans l'ensemble Z_i des zéros de f_i dans U.

D'après le th. A.15, pour qu'un point z de U soit simple sur $|D|$, il faut et il suffit qu'une seule des f_i s'y annule et que $\gamma_z(f_i)$ soit associé dans $A_z(V)$ à un germe de la forme $\gamma_z(g^m)$ avec $m(\gamma_z(g)) = 1$, ce qui donne $f_i = g^m h$ avec h holomorphe et $\neq 0$ en z ; cela implique que $m(\gamma_w(f_i))$ est multiple de m pour tout w suffisamment voisin de z. Comme dans ces conditions z est dans Z_i.et que W_i est dense dans Z_i, on doit donc avoir $m = 1$, $z \in W_i$, et l'entier n_i n'est autre alors que la multiplicité de D en z. Si, pour chaque i, on désigne par g_i le produit des f_j pour $j \neq i$, et par W_i' l'ensemble des points de W où $g_i \neq 0$, on a donc montré que l'ensemble $W \cap U$ des points de U qui sont simples sur $|D|$ est la réunion des W_i'. D'ailleurs, 161
d'après le lemme A.13, appliqué à f_i et g_i, W_i' n'est pas vide ; autrement dit, g_i est holomorphe et non identiquement nul sur W_i ; d'après le th. A.9, appliqué à W_i et

au support du diviseur $\operatorname{div}(g_i)$ sur W_i, W'_i est donc connexe ; de plus, d'après le th. A.10, W'_i est dense dans W_i, donc dans Z_i.

Considérons l'une W_α des composantes connexes de W ; pour chaque i, W'_i est connexe et contenue dans W et est donc, soit contenue dans W_α, soit disjointe de W_α. Comme $W \cap U$ est la réunion de celles des W'_i, il s'ensuit que $W_\alpha \cap U$ est la réunion de celles des W'_i qui y sont contenues ; désignons celles-ci par $W'_1, \ldots, W'_r$. De plus, comme D a la multiplicité M_α sur W_α, on a $n_i = m_\alpha$ pour $1 \leq i \leq r$. Posons $h_\alpha = f_1 f_2 \cdots f_r$ (donc en particulier $h_\alpha = 1$ si $W_\alpha \cap U$ est vide) et $D_\alpha(U) = \operatorname{div}(h_\alpha)$. Dans U, on a $D = \sum_\alpha m_\alpha D_\alpha(U)$; $|D_\alpha(U)|$ est la réunion des ensembles $Z_1, \ldots, Z_r$ et est donc l'adhérence de $W_\alpha \cap U$; de plus, les points de $W_\alpha \cap U$ sont simples pour $D_\alpha(U)$.

On a ainsi démontré que V possède un recouvrement ouvert formé d'ensembles U dans chacun desquels on peut définir pour tout α un diviseur $D_\alpha(U)$ ayant pour support l'adhérence de $W_\alpha \cap U$; et il résulte du th. A.17 que chacun des $D_\alpha(U)$ est déterminé d'une manière unique par ces conditions. De plus, en vertu du même théorème, si U et U' sont deux ensembles de ce recouvrement, $D_\alpha(U)$ et $D_\alpha(U')$ coïncident dans $U \cap U'$. Par définition d'un diviseur, il s'ensuit qu'il y a pour tout α un diviseur D_α sur V qui coïncide avec $D_\alpha(U)$ dans U quel que soit U, et qui a donc pour support l'adhérence de W_α et a un point simple en tout point de W_α. Avec les notations ci-dessus, le nombre de ceux des D_α dont le support rencontre U est au plus égal au nombre des f_i et est donc fini. La relation $D = \sum_\alpha m_\alpha D_\alpha$ résulte de ce qui précède. Pour que le point u lui-même appartienne à W, il faut et il suffit, d'après ce qui précède, qu'une seule des f_i s'y annule et qu'on ait $m(\gamma_u(f_i)) = 1$; si W_α est celle des composantes de W qui contient u, cela revient à dire, d'après ce qui précède, que u est un point simple de D_α et n'appartient pas à $|D_\beta|$ pour $\beta \neq \alpha$. Cela entraîne en particulier que W_α n'a aucun point commun avec $|D_\beta|$ pour $\beta \neq \alpha$, donc que les D_α sont tous distincts.

Pour faire voir que les D_α sont irréductibles, on va démontrer plus généralement ce qui suit. Soit D_0 un diviseur dont le support soit l'adhérence d'une variété connexe W_0 de codimension 1 plongée dans V, et ayant la multiplicité 1 sur W_0 ; alors tout diviseur dont le support est contenu dans $|D_0|$ est de la forme mD_0 avec
162 m entier, ce qui implique évidemment que D_0 est irréductible. Soit W'_0 la variété des points simples de $|D_0|$; comme on a $W_0 \subset W'_0 \subset |D_0|$, W'_0 est connexe. Soit D un diviseur autre que 0 et tel que $|D| \subset |D_0|$; soit W la variété des points simples de $|D|$. Le corollaire A.16, appliqué à D_0 et W, montre que $W \cap W'_0$ est dense dans W, donc non vide, et ouvert dans W'_0 ; par suite, $W'_0 \cap |D|$ n'est pas rare dans W'_0. D'après le th. A.10, appliqué à D et à l'injection canonique de W'_0 dans V, il s'ensuit que $W'_0 \subset |D|$, d'où $|D| = |D_0|$. Le th. A.17 montre alors que, si m est la multiplicité de D en un point de W'_0, D coïncide avec mD_0.

De là on va déduire aussi qu'un diviseur ne peut s'exprimer de deux manières distinctes au moyen de familles localement finies de diviseurs irréductibles. S'il n'en était pas ainsi, en effet, il y aurait un diviseur irréductible D_0, une famille localement finie (D'_λ) de tels diviseurs deux à deux distincts et $\neq D_0$, et des entiers $m_0 \neq 0$ et m'_λ tels que $m_0 D_0 = \sum m'_\lambda D'_\lambda$. Les D'_λ étant irréductibles et distincts, ils sont nécessairement étrangers deux à deux ; le support du second membre est donc la réunion des $|D'_\lambda|$, qui n'est donc autre que $|D_0|$. Soit W_0 la variété des points simples de $|D_0|$; si W_0 n'était pas connexe, ou si D_0 n'avait pas la multiplicité 1 sur W_0, l'application des résultats ci-dessus à D_0 ferait voir que D_0 n'est pas irréductible. Puisque $|D'_\lambda|$ est contenu dans $|D_0|$ pour tout λ, il s'ensuit donc de ce qu'on a démontreé ci-dessus qu'on a $D'_\lambda = m_\lambda D_0$ pour tout λ, contrairement à nos hypothèses.

Corollaire A.20. *Pour qu'un diviseur D sur une variété complexe V soit irréductible, il faut et il suffit que le variété W des points simples de $|D|$ soit connexe et que D soit de multiplicité 1 sur W* Cor. 1

D'après le th. A.17, un diviseur irréductible est donc complètement déterminé par son support ; il sera fréquemment identifié avec celui-ci. Les diviseurs irréductibles figurant dans l'expression d'un diviseur D au moyen de tels diviseurs (distincts) sont souvent appelés les *composants* de D, et leurs coefficients s'appellent leurs *multiplicités*. De l'unicité de l'expression d'un diviseur au moyen de diviseurs irréductibles, on déduit les conséquences habituelles au sujet des lois de composition inf et sup dans le groupe des diviseurs. En particulier, si $D = \sum m_\alpha D_\alpha$ est une telle expression, on a $D^+ = \sum m_\alpha^+ D_\alpha$ et $D^- = \sum m_\alpha^- D_\alpha$; et, pour que deux diviseurs positifs soient étrangers l'un à l'autre, il faut et il suffit qu'ils n'aient aucune composante commune.

Corollaire A.21. *Soient D, D' deux diviseurs sans composante commune sur une variété complexe V. Alors l'ensemble $|D| \cap |D'|$ est rare sur $|D|$ et sur $|D'|$.* Cor. 2

D'après le th. A.19, $D^+ + D^-$, ayant même support que D, a par suite aussi 163
mêmes composants. En remplaçant au besoin D par $D^+ + D^-$, et faisant de même pour D', on peut donc supposer que D et D' sont positifs ; d'après ce qui précède, l'hypothèse revient alors à dire qu'ils sont étrangers l'un à l'autre. Supposons que $|D| \cap |D'|$ ne soit pas rare sur $|D'|$, c'est-à-dire qu'il y ait un point u de $|D|$ tel que tout point de $|D|$ suffisamment voisin de u appartienne à $|D'|$. Soit U un voisinage de u où on ait $D = \mathrm{div}(f), D' = \mathrm{div}(f')$ avec f, f' holomorphes dans U ; soit g holomorphe en u et telle que $\gamma_u(g)$ soit l'un des facteurs irréductibles de $\gamma_u(f)$; le lemme A.13, appliqué à g et f', entraîne aussitôt contradiction.

Le corollaire A.21 montre par exemple que les composants d'un diviseur D sont les diviseurs irréductibles sur V dont le support est contenu dans celui de D.

On notera que, sur une variété compacte, une famille localement finie de diviseurs autres que 0 est nécessairement finie ; il résulte donc du th. A.19 que, sur une telle variété, le groupe des diviseurs est le groupe libre engendré par les diviseurs irréductibles.

A.11. Les résultats qui précèdent s'appliquent en particulier aux variétés algébriques sur le corps des complexes (c'est-à-dire dans la géométrie algébrique où on a pris **C** pour « domaine universel »). Comme d'habitude, une telle variété s'identifie avec l'ensemble de ses points. Sur une telle variété, il y a lieu de considérer, d'une part la topologie « usuelle »(obtenue, dans le cas d'une variété affine ou projective, en munissant celle-ci de la topologie induite par la topologie usuelle de l'espace affine ou projectif ambient, et dans le cas d'une variété abstraite en munissant chacun des « représentant » de celle-ci, qui est une variété affine, de sa topologie usuelle), et d'autre part la topologie de Zariski, où les parties fermées de la variété V sont les réunions finies de sous-variétés algébriques de V. La topologie de Zariski n'est pas séparée ; elle est moins fine que la topologie usuelle. *Dans ce qui suit, tous les termes topologiques devront s'entendre au sens de la topologie usuelle* sauf mention expresse du contraire. nº 11

Lemme A.22. *Toute variété algébrique est connexe.* Lemme 9

En vertu d'un lemme élémentaire de géométrie algébrique (v. A. Weil, [13, II, 1954d, Lemme 6, p. 135]), si P et P' sont deux points d'une variété algébrique V, il y a un point M de V et deux courbes C, C' sur V tels que P et M soient

sur C, et P' et M soit sur C' ; il suffit donc de démontrer le lemme pour une
164 courbe C. Soit C_0 une courbe sans point multiple, birationellement équivalente à C, plongée dans un espace projectif complexe $\mathbf{P}^n$. Soit C_1 une composante connexe de C_0 ; c'est une sous-variété complexe de $\mathbf{P}^n$ de dimension 1. Supposons que C_0 ne soit pas connexe ; soit $P \in C_0 - C_1$; et soit $P_1 \in C_1$. D'après le théorème de Riemann-Roch, il existe, pour ν entier assez grand, une fonction méromorphe f non identiquement nulle sur C_0 telle que $(f) \succ P_1 - \nu P$; alors f s'annule en P_1 et n'a pas d'autre pôle que P sur C_0, donc n'a pas de pôle sur C_1. C'est donc, sur C_1, une fonction partout holomorphe, nulle en P_1 ; il s'ensuit, par exemple en vertu du principe du maximum, que f est partout nulle sur C_1, ce qui est impossible, puisque les zéros de f sur C_0 sont en nombre fini. Par suite C_0 est connexe ; d'après le th. A.9, le complémentaire sur C_0 de toute partie finie de C_0 l'est aussi ; il en est donc de même de C, qui est image continue d'un tel complémentaire.

Sur une variété algébrique V, tout ensemble ouvert au sens de Zariski, c'est-à-dire le complémentaire (supposé non vide) de toute réunion finie de sous-variétés de V, est encore une variété algébrique, donc connexe d'après le lemme A.22. Il en est ainsi, en particulier, de l'ensemble des points de V qui sont simples sur V au sens de la géométrie algébrique. Pour comparer cette dernière notion à celles qui ont été définies au §A.8 ci-dessus, nous nous appuyerons sur le lemme suivant:

Lemme 10 **Lemme A.23.** *Soit V une varété algébrique ; soit k un corps de définition de V. Alors les points génériques de V par rapport à k sont partout denses sur V.*

Rappelons qu'en vertu des conventions générales en géométrie algébrique, il est implicitement supposé que $\mathbf{C}$ est de degré de transcendance infini sur k. Soit n la dimension de V. Le résultat est immédiat si V est un espace affine ; car, si $x_1, \dots, x_n$ sont des éléments de $\mathbf{C}$ algébriquement indépendants sur k, il est clair que les points

$$(\xi_1 + rx_1, \dots, \xi_n + rx_n)$$

où les ξ_i parcourent le corps des nombres algébriques sur $\mathbf{Q}$, et r parcourt l'ensemble des nombres rationnels $\neq 0$, forment un ensemble partout dense dans l'espace affine ; et ces points sont de dimension n sur k. Le lemme étant purement local, on peut d'ailleurs, à volonté, supposer V plongée dans un espace affine ou projectif. Supposons d'abord V plongée dans un espace affine et de codimension 1 dans celui-ci ; V est alors donnée par une équation $P(X) = 0$, où P est un polynome irréductible en $X_1, \dots, X_{n+1}$ à coefficients dans k ; on peut supposer que le degré de P en X_{n+1} est
165 $d \neq 0$. Soit a un point de V ; on a $P(a) = 0$. En vertu du théorème sur la continuité des racines des equations algébriques, il y aura, quel que soit $\varepsilon > 0$, un $\delta > 0$ tel que, si $(x_1, \dots, x_n)$ satisfait à $|x_i - a_i| \leq \delta$ pour $1 \leq i \leq n$, l'équation

$$P(x_1, \dots, x_n, X_{n+1}) = 0,$$

de degré d en X_{n+1} ait au moins une racine x_{n+1} satisfaisant à $|x_{n+1} - a_{n+1}| \leq \varepsilon$. Si donc on prend le point $(x_1, \dots, x_n)$ satisfaisant à ces inégalités et de dimension n sur k, il y aura sur V un point $(x_1, \dots, x_{n+1})$ qui sera aussi voisin de a qu'on voudra pourvu qu'on ait pris ε, puis δ, assez petits. Passons au cas général ; supposons cette fois V plongée dans un espace projectif $\mathbf{P}^{n+r}$ et de codimension r dans celui-ci ; le résultat étant vrai pour $r = 1$ d'après ce qui précède, on pourra procéder par récurrence sur r, en supposant $r \geq 2$. Soit a un point de V ; soit u un point générique de $\mathbf{P}^{n+r}$ sur $k(a)$; soit $k' = k(a, u)$. Comme $r \geq 2$, la droite D joignant a et u n'a aucun point commun avec V, autre que a. Soit V' la projection de V à partir de u, c'est-à-dire l'image dans $\mathbf{P}^{n+r-1}$ du cône C projetant V à partir de u (ensemble des droites joignant u aux points de V), ou, ce qui revient au même, l'intersection de C avec un hyperplan défini sur k et ne passant pas par u. Soit a' l'image de a

dans V'. En vertu de l'hypothèse de récurrence, il y a sur V' une suite de points x'_ν, tendant vers a' et génériques sur V' par rapport à k' ; chacun est image d'un point x_ν de V qui est nécessairement générique sur V par rapport à k'. Les droites D_ν joignant u aux points x_ν ont pour limite la droite D. L'espace projectif étant compact, on peut extraire de la suite x_ν une suite convergente ; la limite de celle-ci est dans $D \cap V$ et n'est donc autre que a. Cela achève la démonstration.

Il résulte du lemme A.23 que, sur une variété V, *tout ensemble ouvert au sens de la topologie de* Zariski*, et non vide, est partout dense au sens de la topologie usuelle*. En particulier, l'ensemble des points de V qui sont simples sur V au sens de la géométrie algébrique est dense sur V.

Lemme A.24. *Soit V une varété algébrique de dimension n dans un espace affine de dimension $n+r$; soit k un corps de définition de V ; soit a un point de V. Soient $u_{\nu i}$ $(1 \leq \nu \leq n+1; 1 \leq i \leq n+r)$ des quantités algébriquement indépendantes sur $k(a)$. Soit $x = (x_1, \ldots, x_{n+r})$ un point générique de V sur le corps $K = k(a, u)$. Posons* Lemme 11

$$y_\nu = \sum_{i=1}^{n+r} u_{\nu i} x_i \quad 1 \leq \nu \leq n+1$$

Soit W le lieu de $y = (y_1, \ldots, y_{n+1})$ sur K ; soit F l'application de V sur W, définie sur K, telle que $y = F(x)$. Alors F est une correspondance birationelle entre V et W ; a est l'unique spécialisation de x sur la specialisation $y \mapsto F(a)$ par rapport à K ; et, pour que a soit simple sur V, il faut et il suffit que le point $F(a)$ le soit sur W. 166

La démonstration de ce lemme est contenue par exemple dans celle du théorème 5 de A. Weil [11, Chap. V, § 3]. On notera que W n'est autre que la projection de V « suivant une direction générique » sur un espace de dimension $n+1$; la dernière assertion du lemme dit en substance que, pour que a soit simple sur V, il faut et il suffit qu'il le soit sur le cylindre (de codimension 1 dans l'espace ambiant) qui projette V suivant une direction générique.

Théorème A.25. *Soit V une variété algébrique de dimension n, plongée dans un espace affine ou projectif complexe. Alors l'ensemble des points simples de V au sens de la géométrie algébrique coïncide avec l'ensemble des point de V au voisinage desquels V est une sous-variété de l'espace ambiant ; cet ensemble est une variété complexe connexe, de dimension complexe n, ouverte et partout dense dans V.* Th. 8

On a déjà montré que l'ensemble des points simple de V au sens de la géométrie algébrique est connexe, ouvert et partout dense dans V. Ce qui reste à démontrer étant de nature purement locale, on peut supposer que l'espace ambiant est affine. Supposons d'abord que V y soit de codimension 1 ; alors V est définie par une équation $P(X) = 0$, où P est un polynome irréductible en $X_1, \ldots, X_{n+1}$, et n'est donc autre que le support du diviseur $D = \operatorname{div}(P)$ de la fonction holomorphe définie par P dans l'espace ambiant. Les points simples de V au sens de la géométrie algébrique sont ceux où l'un au moins des polynomes $\partial P / \partial X_i$ n'est pas nul ; autrement dit, ce sont les points simples de D. Comme ils sont partout denses dans $V = |D|$, il s'ensuit que D n'a que des composantes de multiplicité 1 ; les points simples de D sont donc les mêmes que les points simples de $|D|$ au sens du §A.8 ; compte tenu du th. A.15, cela achève la démonstration pour le cas considéré ; on notera que D est irréductible en vertu du corollaire A.20. Supposons maintenant que l'espace ambiant soit de dimension $n + r$, avec $r \geq 2$. Soit a un point de V ; on appliquera à V et a le lemme A.24, qui peut s'interpréter comme suit. Après un changement

« générique » de coordonnées dans l'espace affine ambiant, V et a auront les propriétés suivantes. Si on désigne par π la projection de l'espace ambiant sur l'espace de dimension $n+1$ déterminé par les $n+1$ premières coordonnées, ou autrement
167 dit l'application

$$x = (x_1, \ldots, x_{n+r}) \mapsto x' = \pi(x) = (x_1, \ldots, x_{n+1}),$$

il y a un corps de définition K de V tel que, si x est générique sur V par rapport à K, on ait $K(x) = K(x')$, et que a soit l'unique spécialisation de x, par rapport à K, sur la spécialisation $a' = \pi(a)$ de $x' = \pi(x)$; et, pour que a soit simple sur V, il faut et il suffit que a' le soit sur le lieu V' de x' par rapport à K. Si d'ailleurs T est une variété linéaire passant par a, on peut supposer qu'on a fait un changement générique de coordonnées sur un corps contenant un corps de définition de T, ce qui implique qu'après ce changement T est transversale à la variété définie par $X_1 = a_1, \ldots, X_{n+1} = a_{n+1}$.

Cela posé, supposons d'abord a simple sur V au sens de la géométrie algébrique, donc a' simple sur V'. Comme a est l'unique spécialisation de x sur $x' \to a'$ par rapport à K, chacun des x_{n+i}, pour $2 \leq i \leq r$, est fini en a' sur V' ; puisque a' est simple sur V' et que $K(x) = K(x')$, chacun des x_{n+i} est donc dans l'anneau de spécialisation de a' dans $K(x')$, ou autrement dit peut se mettre sous la fomre

$$x_{n+i} = P_i(x_1, \ldots, x_{n+1})/Q_i(x_1, \ldots, x_{n+1}) \qquad (2 \leq i \leq r)$$

où les P_i, Q_i sont des polynomes à coefficients dans K tels que les Q_i ne s'annulent pas en a'. Comme V' est de coedimension 1 dans l'espace ambiant, on peut lui appliquer la conclusion de notre théorème. Il y a donc un voisinage ouvert U' de a' tel que $V' \cap U'$ soit une variété complexe de dimension complexe n, plongée dans U' ; on peut supposer U' assez petit pour que les Q_i ne s'y annulent pas. Alors, si $U = \pi^{-1}(U')$, il est immédiat que $V \cap U$ est l'ensemble des points z tels que $\pi(z)$ soit dans $V' \cap U'$ et que les z_{n+i}, pour $2 \leq i \leq r$, soient donnés par

$$z_{n+i} = P_i(z_1, \ldots, z_{n+1})/Q_i(z_1, \ldots, z_{n+1}).$$

Donc $V \cap U$ est bien une variété complexe de dimension complexe n, plongée dans U. Réciproquement, supposons que V soit, au voisinage de a, une sous-variété de l'espace ambiant, de dimension complexe d, et montrons que $d = n$ et que a est simple sur V au sens de la géométrie algébrique. Soit en effet T la variété linéaire tangente à V en a aus sens de la géométrie différentielle ; on peut, comme on a vu, supposer que T est transversale à la variété $X_1 = a_1, \ldots, X_{n+1} = a_{n+1}$. Si, dans ces conditions, on avait $d \geq n+1$, il s'ensuivrait que V' contiendrait un voisinage de a' dans l'espace de dimension $n+1$, ce qui est impossible puisqu'on a vu que V' est
168 le support d'un diviseur, donc rare. Comme a est l'unique spécialisation de x sur $x' \mapsto a'$ par rapport à K, chacun des x_{n+i}, pour $2 \leq i \leq r$, est entier sur l'anneau de spécialisation de a' dans $K(x')$, ou autrement dit satisfait à une équation

$$Q_i(x_1, \ldots, x_{n+1}) x_{n+i}^{m_i} + \sum_{\mu=1}^{m_i} P_{i\mu}(x_1, \ldots, x_{n+1}) x_{n+i}^{m_i - \mu} = 0$$

où les coefficients Q_i et $P_{i\mu}$ sont des polynomes à coefficients dans K, tels que les Q_i ne s'annulent pas en a'. Soit U' un voisinage compact de a' où les Q_i ne s'annulent pas ; il y aura un $\delta > 0$ tel que $|Q_i(x')| \geq \delta$ quel que soit $x' \in U'$, pour $2 \leq i \leq r$. Alors, si $z' \in V' \cap U'$, les x_{n+i} sont entiers sur l'anneau de spécialisation de z' dans $K(x')$, c'est-à-dire que toute spécialisation z_{n+i} de x_{n+i} sur $x' \to z'$ est finie ; de plus, en vertu des relations ci-dessus, il y a $M > 0$ tel que, pour chacune des spécialisations, on ait $|z_{n+i}| \leq M$. Par suite, si U désigne l'ensemble des points t tels que $\pi(t) \in U'$, $|t_{n+i}| \leq M$ pour $2 \leq i \leq r$, $V' \cap U'$ est l'image de $V \cap U$ par π. Comme d'ailleurs a est l'unique spécialisation de x sur $x' \to a'$, donc l'unique point de V qui se projette en a' par π, on conclut aisément de là que, si U_1 est un voisinage quelconque de a, V' coïncide avec $\pi(V \cap U_1)$ au voisinage de a'. Mais les hypothèses faites sur V et T entraînent que, pour U_1 assez petit, $\pi(V \cap U_1)$ est une variété complexe de dimension d plongée dans l'espace ambiant ; comme V' est de codimension 1 dans celui-ci, il s'ensuit, d'après ce qu'on a démontré dans ce cas, que $d = n$ et que a' est simple sur V'. Donc a est simple sur V.

Le théorème A.25, une fois démontré pour les variétés affines, s'étend immédiatement aux variétés plongées dans une variété quelconque sans point multiple. Plus généralement, on a le résultat suivant:

Théorème A.26. *Soit F un ensemble algébrique fermé sur une variété W sans* Th. 9
point multiple ; soit a un point de F, Pour que F soit une sous-variété complexe de la variété complexe W au voisinage de a, il faut et il suffit que a appartienne à une composante et à une seule de F et soit simple sur celle-ci.

Le fait que W peut être considérée comme variété complexe résulte du th. A.25, joint à l'hypothèse que W est sans point multiple. L'assertion sur F étant purement locale, on peut supposer W plongée dans l'espace affine, puis raisonner sur F considéré comme plongé dans cet espace. Le seul point que reste à démontrer est que, si F est une sous-variété de cet espace au voisinage de a, a ne peut appartenir à plus d'une composante de F. Soient $V_1, \ldots, V_h$ celles des composantes de F qui 169
passent par a. Pour chaque i, l'ensemble des points simples de V_i qui n'appartiennet à aucune de V_j pour $j \neq i$ est un ouvert de Zariski sur V_i, donc dense sur V_i ; si n_i est la dimension de V_i, il y a donc dans tout voisinage de a des points au voisinage desquels F est une variété de dimension n_i. Si donc F est une variété au voisinage de a lui-même, tous les n_i doivent avoir une même valeur n. Si l'espace ambiant est de dimension $n+1$, les V_i, d'après la démonstration du th. A.25, sont supports de diviseurs irréductibles D_i dans cet espace, d'où la conclusion d'après le th. A.19. Si l'espace ambiant est de dimension $n + r$ avec $r \geq 2$, on procédera par application du lemme A.24 comme dans la démonstration du th. A.25. Les notations étant les mêmes que dans celle-ci, soient V_i' les variétés définies à partir des V_i comme V' l'est à partir de V dans cette démonstration ; en vertu de résultats élémentaires de géométrie algébrique, les V_i' ne sont autres que les adhérences des ensembles $\pi(V_i)$. D'après ce qu'on a vu, les V_i' coïncideront respectivement, au voisinages de a', avec les ensembles $\pi(V_i \cap U_1)$, quel que soit le voisinage U_1 de a. Par hypothèse, la réunion des V_i est, au voisinage de a, une variété complexe de dimension n, dont la variété linéaire tangente T (au sens différentiel) est transvaersale à la variété $X_1 = a_1, \ldots, X_{n+1} = a_{n+1}$. On en conclut qu'il en est de même de la réunion des V_i' au voisinage de a', donc, d'après ce qu'on a déjà démontré, que les V_i' coïncident les unes avec les autres. Cela revient à dire que toute variété linéaire de dimension $r - 1$ qui rencontre l'une des V_i rencontre les autres ; en vertu d'un raisonnement élémentaire bien connu (qui est à la base de l'emploi des « coordonnées de Chow » en géométrie algébrique), cela entraîne que les V_i, elles-mêmes coïncident. Comme elles sont distinctes par définition, il ne peut donc y en avoir plus d'une.

Annexe B. Index des notations 171

B.1. **Notations générales.** On s'est conformé en principe à l'usage de Bourbaki. On particulier, $\mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{C}$ désignent les corps des rationnels, des réels, des complexes, respectivement. Si K est un corps, K^* est le groupe multiplicatif des éléments $\neq 0$ de K ; $\mathbf{E}$ est le sous-groupe de $\mathbf{C}^*$ formé des nombres complexes de valeur absolu 1 ; on pose $\mathbf{e}(t) = e^{2\pi i t}$. Si A est un anneau, l'extension de A par $\mathbf{Q}$ se note $A_{\mathbf{Q}}$. On note $\bigwedge E$ l'algèbre extérieure d'un espace vectoriel E, $\bigwedge^p E$ l'espace vectoriel des éléments de degré p dans cette algèbre, $\wedge$ la loi de composition dans celle-ci ; dans l'algèbre de cohomologie d'une variété (à coefficients réels ou complexe) $\wedge$ désigne le « cup-product ». On note $[X, Y]$ le « crochet de Lie » pour les endomorphismes d'un espace vectoriel, ou autrement dit l'endomorphisme $XY - YX$. Dans un groupe ordonné, la relation d'ordre est généralement écrite $\succ$; pour un groupe réticulé, on emploie $\inf, \sup, x^+, x^-$ avec leur sens habituel.

Voir aussi l'index pour d'autre symbols.

Références

[1] Nicolas Bourbaki, *Algèbre commutative*, Springer, Berlin, 2006, 2007.

[2] ______, *Algèbre*, Springer, Berlin, 2007, 2010.

[3] ______, *Topologie générale*, Springer, Berlin, 2007.

[4] Shiing-shen Chern, *On a generalization of Kähler geometry*, Algebraic Geometry and Topology: A Symposium in Honor of Solomon Lefschetz (R. H. Fox, ed.), Princeton, 1957.

[5] Wei–Liang Chow, *On Compact Complex Analytic Varieties*, Am. J. Math. **71** (1949), 893–914.

[6] William Vallance Douglas Hodge, *The Theory and Applications of Harmonic Integrals*, Cambridge Mathematical Library, Cambridge University Press, Cambridge, 1941, 1989.

[7] Erich Kähler, *Über eine bemerkenswerte Hermitesche Metrik*, Abh. Math. Sem. Hamburg **9** (1933), 173–186.

[8] Kunihiko Kodaira, *On Kähler varieties of restricted type (an intrinsic characterization of algebraic varieties)*, Ann. of Math. **60** (1954), 28–48.

[9] A. Newlander and L. Nirenberg, *Complex analytic coordinates in almost complex manifolds*, Ann. of Math. **65** (1957), 391–404.

[10] Georges de Rham, *Variétés différentiables*, Publications de l'Institut de Mathématique de l'Université de Nancago, vol. III, Hermann, Paris, 1982.

[11] André Weil, *Foundations of algebraic geometry*, Colloquium Publications, vol. 29, American Mathematical Society, 1946. revised and enlarged edition 1962 ; tenth printing 2000.

[12] ______, *Introduction à l'étude des variétés kählériennes*, 2nd ed., Publications de l'Institut de Mathématique de l'Université de Nancago, vol. VI, Hermann, Paris, 1958, 1971. épuisé.

[13] ______, *Œuvres Scientifiques. Collected Papers*, Vol. I-III, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1979, 2009.

Index

Z