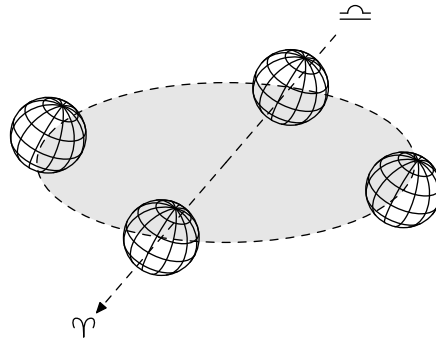


# SPHÄRISCHE DARSTELLUNG MIT METAPOST

BERNDT E. SCHWERDTFEGER

Für Thomas

竹 Wer Bambus malen will trägt schon ein Bild von ihm im Herzen.



VORWORT

Als ich ROEGEL [4] las, fragte ich mich, wie die Zeichnungen konzipiert wurden. Während meiner Implementierung lernte ich, wie durch konzeptionelle mathematische Behandlung ganz effektiver METAPOST-Code erzielt wird. Anwendung in der Astronomie vervollständigt die Arbeit.

Berlin, 10. November 2011

This work is licensed under the Creative Commons Attribution 4.0 International License. To view a copy of this license, visit <http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/> or send a letter to Creative Commons, PO Box 1866, Mountain View, CA 94042, USA.



## 1. KUGELZEICHNUNGEN

In [4] lehrt ROEGEL *orthogonale Projektionen* von Sphärenkreisen auf eine *Tangentialebene* korrekt zu zeichnen. Durch systematischen Gebrauch euklidischer Geometrie werden Hilfskonstruktionen, wie die Orientierung von Ellipsen in [4, 4.7], vermieden und Projektionen beliebiger Kurven zweiter Ordnung gelingen.

**1.1. Orthogonale Projektion.** Es sei ein 3-dimensionaler reeller Vektorraum  $V$  gegeben mit euklidischen Skalarprodukt  $v \cdot w \in \mathbb{R}$  und vektoriellem Kreuzprodukt  $v \times w \in V$  für zwei Vektoren  $v, w \in V$ . Wir verwenden häufig:

$$(1) \quad u \times (v \times w) = (u \cdot w)v - (u \cdot v)w \quad \text{GRASSMANN}$$

$$(2) \quad (v_1 \times v_2) \cdot (w_1 \times w_2) = \begin{vmatrix} v_1 \cdot w_1 & v_1 \cdot w_2 \\ v_2 \cdot w_1 & v_2 \cdot w_2 \end{vmatrix} \quad \text{LAGRANGE}$$

Die Beziehung  $v \cdot w = 0$  bedeutet,  $v$  und  $w$  sind *orthogonal*, kurz  $v \perp w$ .

Ebenso bedeutet  $v \perp W$  für einen Teilraum  $W \subset V$  dass  $v \perp w$  für alle  $w \in W$ . Das zu  $w$  (resp.  $W$ ) *orthogonale Komplement* ist der aus den Vektoren  $v \perp w$  (resp.  $v \perp W$ ) gebildete Teilraum  $w^\perp$  (resp.  $W^\perp$ ). Wir bemerken  $w^\perp = (\mathbb{R}w)^\perp$  und  $(rw)^\perp = w^\perp$  für reelles  $r \neq 0$ , deshalb verwenden wir oft *Einheitsvektoren*  $w$  ( $w \cdot w = 1$ ). Für  $w \neq 0$  ist  $w^\perp$  eine Ebene und jede Ebene ist von dieser Art. Wir nennen  $(W, w)$  ein *orthogonales Paar* wenn  $w \cdot w = 1$  und  $W = w^\perp$ . Wir werden die Ebenen auch oft mit  $T_w = w^\perp$  bezeichnen (*Tangentialebene* an den Einheitsvektor).

Wenn  $u, w$  *linear unabhängig* sind, also  $u \times w \neq 0$ , haben wir offensichtlich

$$(3) \quad T_u \cap T_w = \mathbb{R}(u \times w) \quad T_{u \times w} = \mathbb{R}u \oplus \mathbb{R}w$$

*Beweis.* Aus  $u, w \perp u \times w$  folgt  $\mathbb{R}u + \mathbb{R}w \subset T_{u \times w}$  folglich Gleichheit der Ebenen. Analog ist  $\mathbb{R}(u \times w) \subset T_u \cap T_w$  und letzteres ist eine Gerade, weil  $T_u \neq T_w$ .  $\square$

In der *orthogonalen Zerlegung*  $V = W \oplus W^\perp$  wird die Projektion  $p_W : V \rightarrow W^\perp$  *orthogonale Projektion* entlang  $W$  genannt. Analog ist  $p_w : V \rightarrow w^\perp$  die orthogonale Projektion längs  $w$ . In einer direkten Summe  $V = U \oplus W$ , in der  $U \perp W$ , ist  $U^\perp = W$ ,  $W^\perp = U$ . Für jedes  $v \in V$  gilt  $v = p_W(v) + p_U(v)$ . In einer nicht trivialen Zerlegung ( $U, W \neq 0$ ) ist einer der Teilräume eine Gerade, der andere eine Ebene, etwa  $U = \mathbb{R}u$ ,  $u \cdot u = 1$ , dann ist  $p_W(v) = (u \cdot v)u$ ,  $p_U(v) = v - (u \cdot v)u$ . Beachte, aus (1) ergibt sich  $u \times (v \times u) = v - (u \cdot v)u = p_U(v)$ .

Seien zwei verschiedene Ebenen  $T_u, T_w$  gegeben. Da  $T_u \neq T_w$  sind  $u, w$  *linear unabhängig*. Wir haben eine *kanonische Zerlegung* der Ebene  $T_u$  (resp.  $T_w$ ) in Geraden

$$(4) \quad \begin{aligned} T_u &= (T_u \cap T_w) \oplus (T_u \cap T_{u \times w}) \\ T_w &= (T_u \cap T_w) \oplus (T_w \cap T_{u \times w}) \end{aligned}$$

*Beweis.* Aus (3) ergibt sich  $T_u \cap T_w = \mathbb{R}(u \times w)$ ,  $T_u \cap T_{u \times w} = \mathbb{R}(u \times (u \times w))$ , und weil  $u \times w \perp u \times (u \times w)$  ist die Zerlegung sogar *orthogonal*.  $\square$

Es ist  $p_w(T_{u \times w}) \subset T_{u \times w}$ , denn  $v \perp u \times w$  impliziert wegen  $w \perp u \times w$  auch  $p_w(v) = v - (u \cdot w)w \perp u \times w$ . Die orthogonale Projektion  $p_w$  respektiert (4): sie induziert die Identität auf  $T_u \cap T_w$  und bildet die Gerade  $T_u \cap T_{u \times w}$  in  $T_u$  in die Gerade  $T_w \cap T_{u \times w}$  in  $T_w$  ab, wirkt also durch Multiplikation mit einem Faktor. Weil

$$p_w(u \times (u \times w)) = p_w((u \cdot w)u - w) = (u \cdot w)p_w(u) = (u \cdot w)(w \times (u \times w))$$

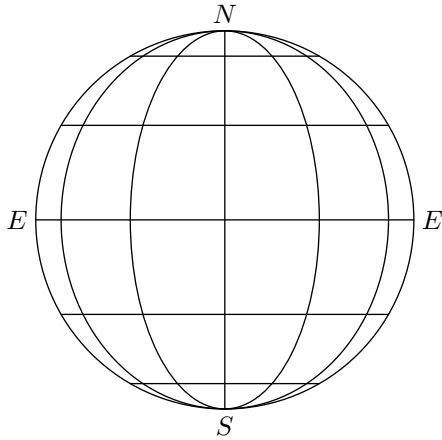
ist dieser Faktor  $u \cdot w$ . Identifizieren wir  $T_u \simeq \mathbb{R}^2$ ,  $T_w \simeq \mathbb{R}^2$  schreibt sich die Projektion  $p : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $p(\xi, \eta) = (x, y)$ ,  $x = \xi$ ,  $y = (u \cdot w)\eta$ . Das Bild eines Kreises  $\xi^2 + \eta^2 = a^2$  in  $T_u$  ist eine *Ellipse* in  $T_w$  mit der Gleichung

$$(5) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{mit } b = |u \cdot w|a, \quad \varepsilon = \sqrt{1 - (u \cdot w)^2}$$

wobei die *Ezzenztrizität* auch  $\varepsilon = |u \times w| = |p_w(u)|$  ist, denn wegen (2) gilt

$$|u \times w|^2 = (u \times w) \cdot (u \times w) = \begin{vmatrix} u \cdot u & u \cdot w \\ u \cdot w & w \cdot w \end{vmatrix} = 1 - (u \cdot w)^2 = |p_w(u)|^2$$

**1.2. Sphärische Ansichten.** Sei  $\mathbb{S} \subset V$  die *Sphäre* der Einheitsvektoren,  $e_1, e_2, e_3$  eine Orthonormalbasis und seien  $g : \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{S}$ ,  $g(\varphi, \lambda) = \cos \varphi \cos \lambda \cdot e_1 + \cos \varphi \sin \lambda \cdot e_2 + \sin \varphi \cdot e_3$  die üblichen *geographischen* Koordinaten.  $g$  ist surjektiv, jeder Punkt  $u \in \mathbb{S}$  ist durch zwei Winkel bestimmt: *Breite*  $\varphi$  und *Länge*  $\lambda$ . Es gilt ferner  $g(\varphi + \pi, \lambda) = g(-\varphi, \lambda + \pi) = -g(\varphi, \lambda)$  (Antipode). Der Nordpol ist  $g(+\pi/2, \lambda) = e_3$ , der Südpol ist  $g(-\pi/2, \lambda) = -e_3$  und die Äquatorebene ist  $E = e_3^\perp = \mathbb{R}e_1 + \mathbb{R}e_2$ .



Wir veranschaulichen uns dies anhand des Gradnetzes der Erdkugel. In der folgenden Abbildung schauen wir auf ein Bild der Erdkugel mit einem 30°-Netz vom Äquator aus. Wird dagegen die Erdkugel von einem Punkt  $z \notin E$  aus betrachtet, sieht man offenbar auf einen der Pole und der andere ist verdeckt.

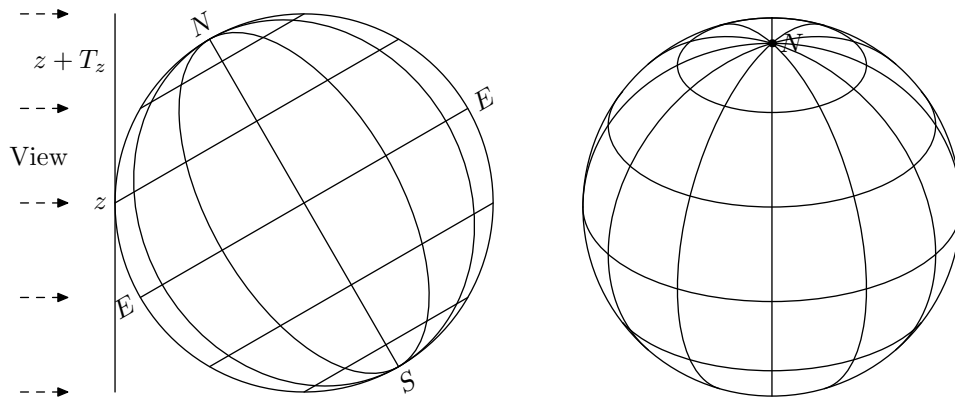
Dies ist der Kritikpunkt von ROEGEL, weil es allzu oft in der wissenschaftlichen Literatur nicht berücksichtigt wird: er zitiert 10 himmelsmechanische oder astronomische Werke, sowie Websites von Observatorien und Instituten zur Himmelsmechanik und Ephemeridenrechnung, die fragwürdige Darstellungen abbilden.

Zu  $z = g(\varphi, \lambda) \in \mathbb{S}$  sei  $z_1 = g(0, \lambda + \pi/2)$ ,  $z_2 = g(\varphi + \pi/2, \lambda)$  und  $T_z = z^\perp \subset V$  die orthogonale Ebene zum Punkt  $z$ ; dann bildet  $z, z_1, z_2$  eine orthonormale Basis von  $V$ . Insbesondere ist  $T_z = \mathbb{R}z_1 \oplus \mathbb{R}z_2$  und wir nehmen  $z_1, z_2$  als Basisvektoren der METAPOST-Ebene. Die Orthogonalprojektion  $p_z : V \rightarrow T_z$  ist gegeben durch

$$(6) \quad p_z(v) = xz_1 + yz_2 \quad \text{mit} \quad x = z_1 \cdot v, \quad y = z_2 \cdot v.$$

ROEGEL in [4, 4.3] verwendet folgende Notation: seine Vektoren  $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3$  entsprechen unseren  $z_1, z_2, z$ , aber seine Winkel  $\phi, \theta$  sind  $\phi = -\varphi$  und  $\theta = \lambda + \pi/2$ .

Ein wenig Anschauung mag der Vorstellung auf die Sprünge helfen. Dazu kippen wir die Erde in vorigem Bild um  $\pi/6$  (30°) nach links und sehen uns diese Konfiguration sowohl aus Richtung des Vektors  $z_1$ , als auch aus Richtung des Vektors  $z$  als Projektion auf die Tangentialebene  $T_z$  an:



In den nächsten Abschnitten betrachten wir zunächst Großkreise und verallgemeinern dann auf beliebige Kreise auf Spären und bestimmen deren elliptische Bilder in der Tangentialebene  $T_z$ .

**1.3. Großkreise.** Ein Großkreis ist ein Schnitt einer Ebene mit der Sphäre, also von der Form  $K(u) = T_u \cap \mathbb{S}$  für einen passenden Vektor  $u \in \mathbb{S}$ . Falls  $u \cdot z < 0$  ersetzen wir  $u$  durch  $-u$ , der Kreis  $K(u)$  und die Ellipse  $p_z(K(u))$  ändern sich dadurch nicht, weil  $T_u = T_{-u}$  ist. Deshalb können wir  $u \cdot z \geq 0$  annehmen.

Analog zu der Orthonormalbasis  $z, z_1, z_2$  wählen wir eine Orthonormalbasis  $u, u_1, u_2$  von  $V$ . Die Ellipsengleichung von  $p_z(K(u)) \subset T_z$  ist leicht zu ermitteln. Sei  $v = \xi u_1 + \eta u_2 \in K(u) \subset T_u$ , nach (6) haben wir

$$\begin{aligned} x &= z_1 \cdot v = (z_1 \cdot u_1)\xi + (z_1 \cdot u_2)\eta \\ y &= z_2 \cdot v = (z_2 \cdot u_1)\xi + (z_2 \cdot u_2)\eta \end{aligned}$$

Dies lineare Gleichungssystem in  $\xi, \eta$  ergibt nach der CRAMER'schen Regel, in die Kreisgleichung  $\xi^2 + \eta^2 = 1$  in  $T_u$  eingesetzt, die Ellipsengleichung in  $T_z$

$$(7) \quad \begin{vmatrix} x & z_1 \cdot u_2 \\ y & z_2 \cdot u_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_1 \cdot u_1 & x \\ z_2 \cdot u_1 & y \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} z_1 \cdot u_1 & z_1 \cdot u_2 \\ z_2 \cdot u_1 & z_2 \cdot u_2 \end{vmatrix}^2.$$

Aus den Koeffizienten dieser Gleichung lassen sich bekanntlich die Invarianten der Ellipse bestimmen (siehe Anhang A); diese Rechnung ist im Abschnitt §A.2 durchgeführt. Ihr einfaches Ergebnis führte mich zu dem hier dargestellten konzeptionellen Zugang.

Insbesondere erhalten wir als Bild des Einheitskreises die Gleichung (5) einer Ellipse mit  $a = 1$  und  $b = z \cdot u$ . Im Falle  $b < 1$  hat die Hauptachse der Ellipse die Geradengleichung

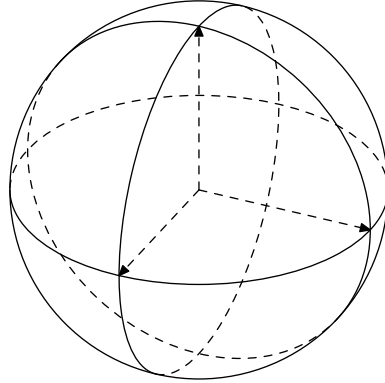
$$(8) \quad (z_1 \cdot u)x + (z_2 \cdot u)y = 0$$

*Beweis.* Wenn  $b = z \cdot u < 1$ , dann ist  $z \neq u$  und  $T_z \neq T_u$ . Dann ist die Hauptachse offenbar die Gerade  $T_z \cap T_u$  und für einen Vektor  $v = xz_1 + yz_2 \in T_z$  gilt  $v \in T_u$  genau wenn  $v \cdot u = (z_1 \cdot u)x + (z_2 \cdot u)y = 0$ .  $\square$

Die beiden Schnittpunkte der Ellipse mit dem Peripheriekreis  $x^2 + y^2 = 1$  liegen auf der Hauptachse. Wir brauchen sie nicht zu berechnen, da uns die Gleichung (8) den Winkel der Hauptachse gibt und wir die beiden Halbellipsen auf Vorder- und Rückseite der Kugel zeichnen können.

Als Beispiel diene eine Zeichnung der Kugel gesehen aus der Richtung  $z = g(\varphi, \lambda)$  mit Koordinaten  $\varphi = 30^\circ$ ,  $\lambda = 25^\circ$  und den Vektoren  $u = e_1$ ,  $u = e_2$  und  $u = e_3$  (Nordpol) und den zugehörigen Großkreisen  $T_u \cap \mathbb{S}$ .

In dieser Zeichnung habe ich die Kugel *transparent* gemacht, um die vollständigen Ellipsen einschließlich der versteckten Spur auf der Rückseite zu zeigen. Der METAPOST Code steht im Anhang §C.1, das verwendete Makro `circle` wird im Anhang §C.2 erklärt.



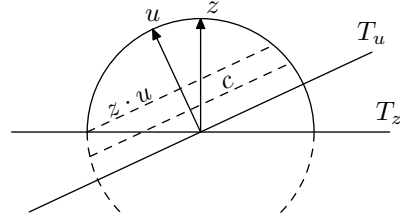
**1.4. Allgemeine Kreise.** Wir behandeln nun beliebige Kreise  $K \subset \mathbb{S}$ . Als ebene Figur liegt  $K$  in einer Ebene, die parallel zu einer linearen Ebene  $T_u$  ist, und folglich ein Schnitt  $K = K(s, u) = (su + T_u) \cap \mathbb{S}$  mit  $-1 \leq s \leq +1$  falls  $K(s, u) \neq \emptyset$ . Wir leiten zunächst die Invarianten der Ellipse  $p_z(K(s, u)) \subset T_z$  her, was gar nicht schwerer ist als im Fall  $s = 0$ , den wir im vorigen Abschnitt behandelten. Den degenerierten Fall  $p_z(u) = 0$  schließen wir aus.

Sei  $v \in K(s, u)$ ,  $v = su + w$  mit  $w \in T_u$  und setze  $c = |w|$ , dann ist  $v \cdot v = s^2 + c^2 = 1$  und  $w = p_u(v)$  durchläuft in  $T_u$  einen Kreis vom Radius  $c$ .

Damit beschreibt  $p_z(w)$  eine Ellipse in  $T_z$  mit  $a = c$ ,  $b = |z \cdot u|c$  und Hauptachse (8). Folglich beschreibt  $p_z(v) = sp_z(u) + p_z(w)$  in  $T_z$  die um  $sp_z(u)$  verschobene

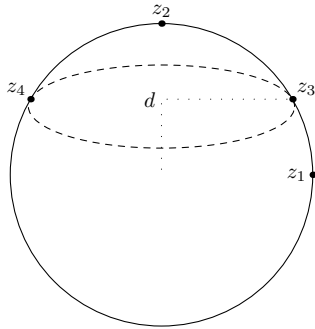
Ellipse mit Mittelpunkt  $sp_z(u) = x_0z_1 + y_0z_2$  wo  $x_0 = s(z_1 \cdot u)$ ,  $y_0 = s(z_2 \cdot u)$ . Ebenso ist die Hauptachse um den konstanten Vektor  $(x_0, y_0)$  verschoben, hat also die Gleichung  $(z_1 \cdot u)(x - x_0) + (z_2 \cdot u)(y - y_0) = 0$ .

Wenn wir auf eine Kugel schauen, sehen wir nur die Vorderseite  $\mathbb{S}_z^{\geq}$  mit den Punkten  $v \in \mathbb{S}$  mit  $z \cdot v \geq 0$ , die Rückseite  $\mathbb{S}_z^{<}$  der  $v$  mit  $z \cdot v < 0$  ist *unsichtbar*. Ein allgemeiner Kreis kann deshalb vollständig *sichtbar*  $K \subset \mathbb{S}_z^{\geq}$  oder *unsichtbar*  $K \subset \mathbb{S}_z^{<}$  sein, anders als ein Großkreis. Wir fragen nach der genauen Bedingung an  $K(s, u)$ , um teilweise sichtbar zu sein, und in dem Fall fragen wir nach den Punkten, in denen er die Grenze  $\partial\mathbb{S}_z^{\geq} = T_z \cap \mathbb{S}$  überschreitet, das heißt wir wollen den Schnitt der Ellipse  $p_z(K(s, u))$  mit dem Randkreis bestimmen. Die nebenstehende Abbildung zeigt den Querschnitt der Ebene  $\mathbb{R}z \oplus \mathbb{R}u$  mit der Sphäre und wir können die Bedingung darin ablesen: die Ellipse  $p_z(K(s, u))$  schneidet den Einheitskreis  $x^2 + y^2 = 1$  in  $T_z$  dann und nur dann, wenn  $|z \cdot u| \leq c$  oder gleichbedeutend  $|s| \leq \varepsilon$ . Die Schnittpunkte  $p_z(K(s, u)) \cap \mathbb{S} = \{z_3, z_4\}$  sind Berührungspunkte der Ellipse mit dem umgebenden Kreis. Wir können  $z_3, z_4$  aus den Gleichungen von Kreis und Ellipse berechnen, aber eleganter ist ein konzeptioneller Weg.



Dazu wird ein Parameter  $d$  mit  $-1 < d < +1$  eingeführt und folgende Frage gestellt:

Welche Ellipse der Exzentrizität  $\varepsilon$  kann so in den Einheitskreis eingeschrieben werden, dass sie den Kreis berührt in den Punkten  $z_{3,4} = (\pm\sqrt{1-d^2}, d)$  ?



Die Ellipse mit Mittelpunkt  $C = (0, y_0)$  (wo  $y_0 = s\varepsilon$ ) und Exzentrizität  $\varepsilon$  hat die Gleichung

$$x^2 + \frac{(y - y_0)^2}{1 - \varepsilon^2} = a^2$$

und in einem Berührungspunkt muss ihre Tangente gleich der Tangente am Kreis sein, also

$$\frac{d - y_0}{1 - \varepsilon^2} = d$$

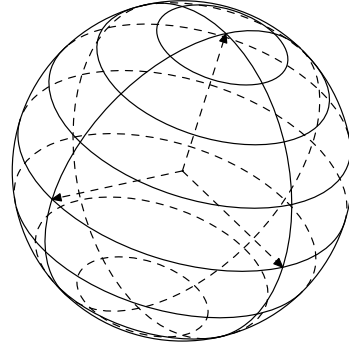
folglich  $y_0 = \varepsilon^2 d$  und damit ist der Zusammenhang zum Parameter  $s = \varepsilon d$ ,  $d = s/\varepsilon$ . Ferner ergibt sich die große Halbachse zu

$$a^2 = 1 - d^2 + \frac{(d - \varepsilon^2 d)^2}{1 - \varepsilon^2} = 1 - d^2 + d^2(1 - \varepsilon^2) = 1 - d^2\varepsilon^2 = 1 - s^2 = c^2$$

Jetzt interpretieren wir die obige Zeichnung bewegungsinvariant. Dazu deuten wir die METAPOST-Ebene als komplexe Gerade  $T_z \simeq \mathbb{C}$  und die Drehungen als Multiplikation mit komplexen Zahlen  $\zeta$  vom Betrag  $|\zeta| = 1$ , also  $z_1 = 1$  und  $z_2 = i$ . Die Berührungspunkte  $z_3, z_4$  liegen symmetrisch zum Einheitsvektor  $\zeta = p_z(u)/\varepsilon$ . In obiger Zeichnung war  $\zeta = z_2 = i$ , also lautet die allgemeine Formel  $z_{3,4} = \zeta/i \cdot (\pm\sqrt{1-d^2}, d)$  oder  $z_4 = \zeta \cdot (d, \sqrt{1-d^2})$ ,  $z_3 = \zeta \cdot (d, -\sqrt{1-d^2})$  und komplex ausmultipliziert (gültig für  $|s| \leq \varepsilon$ )

$$(9) \quad x_{3,4} = \frac{(z_1 \cdot u)s \pm (z_2 \cdot u)\sqrt{\varepsilon^2 - s^2}}{\varepsilon^2} \quad y_{3,4} = \frac{(z_2 \cdot u)s \mp (z_1 \cdot u)\sqrt{\varepsilon^2 - s^2}}{\varepsilon^2}$$

Die entsprechende METAPOST Definition für Kreise in allgemeiner Lage wird im Anhang §C.2 erklärt: das Makro `circle` verwendet die Formeln (9), um die Ellipsen in zwei Teilpfade von  $z_3$  nach  $z_4$  und von  $z_4$  nach  $z_3$  zu zerlegen und damit ihre Sichtbarkeit zu berücksichtigen.



Als Beispiel zeigen wir eine ähnliche Zeichnung wie für die Großkreise, diesmal mit  $\varphi = 15^\circ$ ,  $\lambda = 50^\circ$  und als Nordpol  $u = \sin \delta e_2 + \cos \delta e_3$ , wobei der Winkel<sup>1</sup>  $\delta = 23.44^\circ$  ist, und zeichnen Breitenkreise relativ zu  $u$  bei  $\psi = \pm 23.5^\circ, \pm 45^\circ, \pm 66.5^\circ$ . Die Breitenkreise  $p_z(K(\sin \psi, u))$  sind unter Berücksichtigung ihrer Sichtbarkeit gezeichnet. Es ist dann  $s = \sin \psi$ ,  $c = \cos \psi$  und die Schnittbedingung  $|z \cdot u| \leq c$  ist äquivalent zu  $|\sin \psi| \leq \varepsilon$ .

## 2. ANWENDUNGEN IN ASTRONOMIE

Die Beispiele in Abschnitt §1 veranschaulichten die Erdkugel mit ihrem geographischen Koordinatensystem. Jetzt wollen wir Zeichnungen entwickeln und verstehen, die in der Astronomie üblich sind. Dabei spielt die Sphäre  $\mathbb{S} \subset V$  die Rolle der *Himmelskugel* über uns.

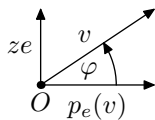
Wir erläutern gebräuchliche Koordinatensysteme und *Bahnelemente* von Himmelskörpern wie *Satellitenbahnen* im Planetensystem.

**2.1. Astronomische Koordinatensysteme.** Um die Position eines Himmelskörpers im Raum zu bestimmen ist ein System von Koordinaten notwendig. Dabei erweisen sich neben rechtwinklig-kartesischen Koordinaten *Kugelkoordinaten* als vorteilhaft. Sie werden wie folgt eingeführt.

Sei  $(E, e)$  ein orthogonales Paar. In der Ebene  $E$  wird eine Orthonormalbasis  $e_1, e_2$  gewählt:  $E = \mathbb{R}e_1 \oplus \mathbb{R}e_2$ . In dieser Basis hat ein Vektor  $v \in V$  die kartesischen Koordinaten  $x = e_1 \cdot v$ ,  $y = e_2 \cdot v$ ,  $z = e \cdot v$ , also  $v = xe_1 + ye_2 + ze$ . Sei  $r = |v|$ . In der Ebene  $E$  werden Polarkoordinaten  $r_e, \lambda$  eingeführt

$$x = r_e \cos \lambda \quad y = r_e \sin \lambda \quad r_e = |p_e(v)| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Sei  $\varphi = \angle(p_e(v), v)$  der Winkel zwischen  $p_e(v) \in E$  und  $v$ , somit  $p_e(v) \cdot v = x^2 + y^2 = |p_e(v)||v| \cos \varphi$ , also  $r_e = r \cos \varphi$ , und damit



$$x = r \cos \varphi \cos \lambda \quad y = r \cos \varphi \sin \lambda \quad z = r \sin \varphi$$

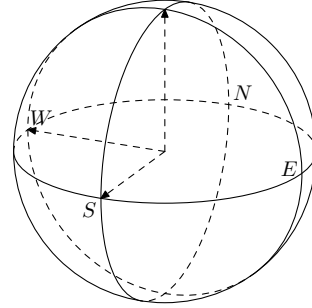
$$v = xe_1 + ye_2 + ze = rg(\varphi, \lambda)$$

Astronomische Koordinatensysteme sind also wie das geographische Koordinatensystem konstruiert. In der Astronomie werden verschiedene Referenzebenen und Achsen verwendet, beispielsweise

System	$O$	$E$	$e$	$e_1$	$e_2$	$\varphi$	$\lambda$
horizontal	$\ominus$	Horizont	Zenit	Süd	West	Höhe $h$	Azimut $A$
äquatorial	$\oplus, \odot$	Äquator	Nord	$\Uparrow$	$e \times e_1$	Deklination $\delta$	Rektasz. $\alpha$
ekliptikal	$\odot$	Ekliptik	$ENP$	$\Uparrow$	$e \times e_1$	Breite $\beta$	Länge $\lambda$

<sup>1</sup>siehe §2.1 die *Schiefte der Ekliptik*

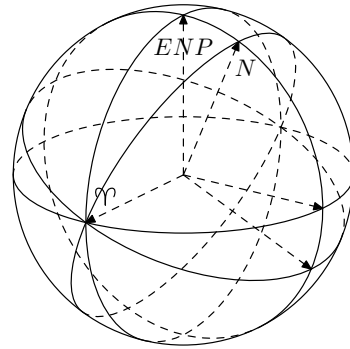
Da der Azimut über West gezählt wird (in Richtung der sich drehenden Himmelskugel), ist das Horizont System ein *Links-System*, also  $e \times e_1 = -e_2$ . Dies Koordinatensystem ist kein Inertial System, sondern rotiert gegenüber den Massen des Universums in einem *Sterntag*, das sind  $23^h 56^m$ . Anbei eine Darstellung des Horizontsystems.



Bei den beiden anderen Systemen sei bemerkt, dass weder die Rotationsachse der Erde noch die Ekliptik wirklich starr sind, sondern sich langsam zeitlich verändern.

Bei der Rotationsachse wird die Veränderung durch die Gravitationswirkung von Sonne und Mond bewirkt, die in ca. 25.770 Jahren einmal rückläufig um den Pol der Ekliptik läuft. Der Einfluß der Planeten auf die Erdumlaufbahn bewirkt eine Schwingung der Ekliptik um die mittlere Lage mit einer Periode von 41.000 Jahren um etwa  $0.85^\circ$  (siehe [3, 1.4.1]). Für die zeichnerische Darstellung sind diese langsamen Veränderungen allerdings unerheblich.

Wir betrachten die Sonne  $\odot$  als Ursprung und die orthogonalen Paare  $(E, e)$  und  $(E', e')$ , die gebildet werden durch die Ekliptik  $E$  und die Ebene  $E'$  parallel zum Erdäquator, die Vektoren  $e$  und  $e'$  zeigen auf ihre jeweiligen Nordpole. Der Winkel<sup>2</sup>  $\varepsilon$  zwischen  $E$  und  $E'$  (derselbe wie zwischen  $e$  und  $e'$ ) ist die *Schiefe* der Ekliptik. Der aktuelle Wert zur gegenwärtigen Standardepoche J2000.0 beträgt  $\varepsilon = 23.44^\circ$ . Die beiden Ebenen schneiden sich also in einer Geraden und  $E \cap E' \cap \mathbb{S}$  enthält zwei Punkte: den *Frühlingspunkt*  $e_1 = \Upsilon$  und den *Herbstpunkt*  $e_2 = -e_1$ .



Nach Anhang §B.1 wird der Basiswechsel in der Ebene  $E_1 = e_1^\perp$  vermittelt durch  $(e'_2, e') = (e_2, e)\rho(-\varepsilon)$  und die *sphärische Transformationsformel* lautet demnach  $g(\delta, \alpha) = g(\beta, \lambda)\rho_1(-\varepsilon)$ , siehe auch [3, 1.3.3].

**2.2. Bahnelemente.** Wir behandeln die Aufgabe, *Bahnen* von Himmelskörpern durch *Bahnelemente* zu beschreiben und sie mit METAPOST auf die Himmelskugel zu zeichnen. Dazu legen wir als *Referenzsystem* das orthogonale Paar  $(E, e)$  zugrunde, bestehend aus der *Ekliptik*  $E$  und dem *ekliptikalen Nordpol*  $(ENP)$   $e$ . Ferner werde wie oben  $e_1$  in Richtung des *Frühlingspunkts*  $\Upsilon$  gewählt und  $e_2 = e \times e_1$ . Die rechtwinkligen Koordinaten beziehen sich auf diese Basis. Fallweise ist der Ursprung  $O = \odot$  die Sonne, oder bei Erdsatelliten auch  $O = \oplus$  die Erde.

Der betrachtete Himmelskörper bewegt sich in einer Ebene  $T_u$  mit  $u$  als Einheitsvektor des *Bahndrehimpulses*. Der *Neigungswinkel* von  $E$  und  $T_u$  sei  $i$  (*Inklination*), d.h.  $e \cdot u = \cos i$ . Es ist  $e \cdot u \geq 0$  für  $0 \leq i \leq \pi/2$  und  $e \cdot u < 0$  (*retrograde* Bewegung) für  $\pi/2 < i < \pi$ . Da nach Definition  $i$  die *Poldistanz* von  $u$  ist gilt  $\beta(u) = \pi/2 - i$ .

Die Gerade  $E \cap T_u$  heißt *Knotenlinie*, die beiden Punkte  $E \cap T_u \cap \mathbb{S} = \{\Omega, \Upsilon\}$  sind der *aufsteigende* und *absteigende* Knoten der Bahn. Die ekliptikale Länge  $\Omega = \lambda(\Omega)$  ist die *Länge des aufsteigenden Knotens*. Daraus folgt auch  $\lambda(u) = \Omega - \pi/2$  und damit hat  $u$  die ekliptikalen Koordinaten

$$u = g(\beta(u), \lambda(u)) = g(\pi/2 - i, \Omega - \pi/2) = (\sin \Omega \sin i, -\cos \Omega \sin i, \cos i)$$

<sup>2</sup>die Exzentrizität  $\varepsilon$  kommt in diesem Abschnitt §2.1 nicht vor

In der Bahnebene  $T_u$  wähle man  $u_1, u_2$  so, dass  $u_1$  zur *Periapsis* zeige. Sei  $\omega$  die in der Bahnebene gemessene *Länge der Periapsis* vom aufsteigenden Knoten aus.

Nach Anhang §B.1 gilt für den Basiswechsel

$$(u_1, u_2, u) = (e_1, e_2, e)\rho_3(\Omega)\rho_1(i)\rho_3(\omega),$$

also ist für einen Vektor  $v = xe_1 + ye_2 + ze = x'u_1 + y'u_2 + z'u$  die Koordinatentransformation

$$(x', y', z') = (x, y, z)\rho_3(\Omega)\rho_1(i)\rho_3(\omega).$$

Somit sind die ekliptikalen Koordinaten  $(x, y, z) = (x', y', z')\rho_3(-\omega)\rho_1(-i)\rho_3(-\Omega)$  und damit ist

$$\begin{aligned} u_1 &= (\cos \omega \cos \Omega - \sin \omega \cos i \sin \Omega, \cos \omega \sin \Omega + \sin \omega \cos i \cos \Omega, \sin \omega \sin i) \\ u_2 &= (-\sin \omega \cos \Omega - \cos \omega \cos i \sin \Omega, -\sin \omega \sin \Omega + \cos \omega \cos i \cos \Omega, \cos \omega \sin i) \\ u &= (\sin i \sin \Omega, -\sin i \cos \Omega, \cos i) \end{aligned}$$

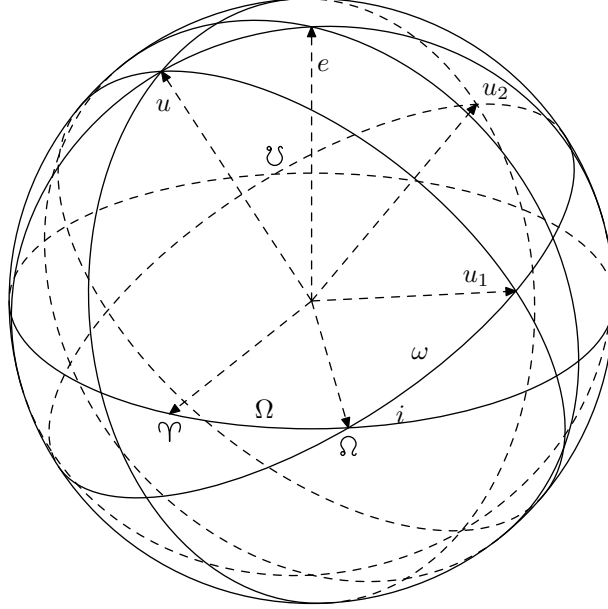
$u_1, u_2$  sind die GAUSS'schen Vektoren in [3, 1.3.1]:  $u_1 = P, u_2 = Q$ .

Wird  $u_1 = G(\omega, i, \Omega)$  als Funktion von  $\omega, i, \Omega$  bezeichnet, dann ist

$$u_2 = G(\omega + \pi/2, i, \Omega) \quad u = G(\pi/2, i + \pi/2, \Omega) = g(\pi/2 - i, \Omega - \pi/2)$$

und  $G(\nu + \omega, i, \Omega) = \cos(\nu)u_1 + \sin(\nu)u_2$ .

Hier ist eine Zeichnung mit den Werten  $i = 30^\circ, \Omega = 35^\circ, \omega = 43^\circ$  gesehen aus der Perspektive  $z = g(\varphi, \lambda)$  mit  $\varphi = 25^\circ, \lambda = 28^\circ$ . Natürlich sind diese Zahlenwerte willkürlich, im Anhang §C.3 steht der METAPOST-Code.



**2.3. Bahnprojektion.** Nachdem wir die *Bahnelemente* erklärt haben, wollen wir jetzt auch die *Bahn von Himmelskörpern* selber durch eine orthogonale Projektion zeichnen. Diese Bahnen sind im allgemeinen keine Kreise, sondern gemäß Gravitationsgesetz *ebene Kurven zweiten Grades* (zumindest annähernd, bis auf Störungen). Der Unterschied zum vorherigen Abschnitt §2.2 ist der, dass wir nach einer Zeichnung mit METAPOST von  $p_z(K)$  suchen, wo  $K \subset T_u$  die *reale* Bahn im Raum ist.



In §1.2 haben wir eine Basis in der METAPOST-Ebene  $T_z = \mathbb{R}z_1 \oplus \mathbb{R}z_2$  ausgezeichnet. Im vorigen §2.2 haben wir eine Basis der Bahnebene  $T_u$  bestimmt  $T_u = \mathbb{R}u_1 \oplus \mathbb{R}u_2$ . Damit ergeben sich Isomorphismen

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{\sim} & T_u \\ (\xi, \eta) & \longmapsto & \xi u_1 + \eta u_2 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{\sim} & T_z \\ (x, y) & \longmapsto & x z_1 + y z_2 \end{array}$$

Die auf die Bahnebene eingeschränkte orthogonale Projektion  $p_z$  induziert also eine *Übergangsmatrix*  $m(p_z|T_u)$  in folgendem Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{\sim} & T_u \\ m(p_z|T_u) \downarrow & & \downarrow p_z|T_u \\ \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{\sim} & T_z \end{array}$$

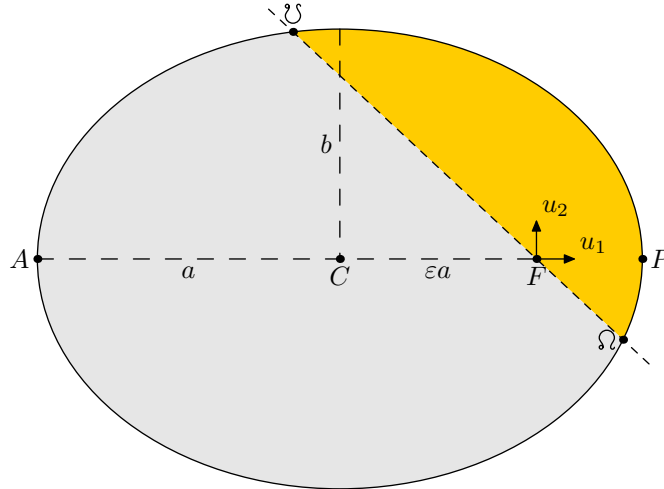
so dass für alle  $(\xi, \eta), (x, y) \in \mathbb{R}^2$  mit  $p_z(\xi u_1 + \eta u_2) = x z_1 + y z_2$  die Relation  $(x, y) = (\xi, \eta) \cdot m(p_z|T_u)$  erfüllt ist.

Wir wenden die Berechnung der *Übergangsmatrix* in §B.2 auf  $E = T_u, E' = T_z$  und die Transformation  $t = p_z|T_u$  an. Wenn  $w \perp z$ , dann ist  $p_z(v) \cdot w = v \cdot w$ , also ergibt sich aus (15) die *Übergangsmatrix*

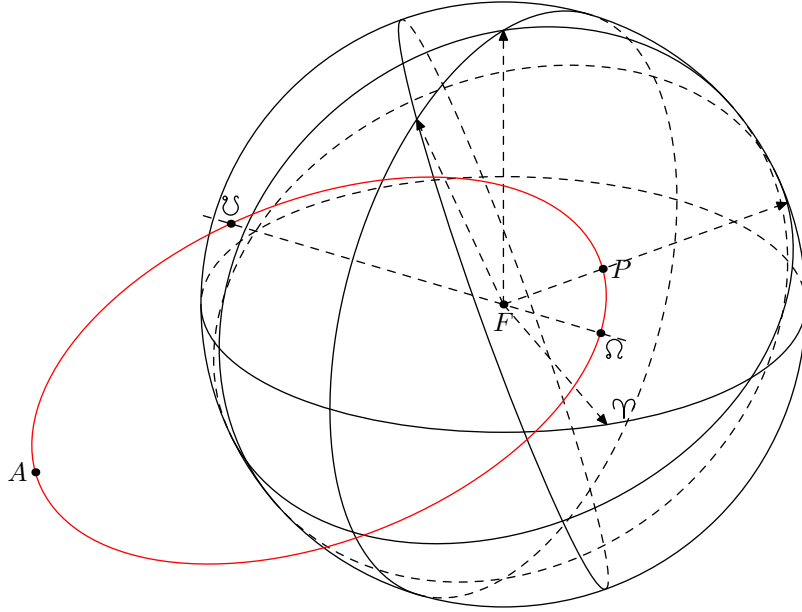
$$m(p_z|T_u) = \begin{pmatrix} u_1 \cdot z_1 & u_1 \cdot z_2 \\ u_2 \cdot z_1 & u_2 \cdot z_2 \end{pmatrix}.$$

Sie hat die Determinante  $\det m(p_z|T_u) = (u_1 \times u_2) \cdot (z_1 \times z_2) = u \cdot z$  wegen (2).

Sehen wir uns eine Bahn in der Bahnebene  $T_u$  an. Sei  $E$  die Ekliptik und  $e$  der Einheitsvektor zum ekliptikalen Nordpol. Der Brennpunkt  $F$  liegt im Ursprung, der Vektor  $u_1$  zeigt auf die Periapsis  $P$  ( $A$  ist die Apoapsis). Der aufsteigende Knoten  $\Omega$  hat den Winkel  $\omega$  mit  $u_1$  und der absteigende Knoten  $\mathcal{U}$  den Winkel  $\pi - \omega$ . Nach (8) hat die Knotenlinie  $T_e \cap T_u$  in  $T_u$  die Gleichung  $(u_1 \cdot e)\xi + (u_2 \cdot e)\eta = 0$ . Der gelbe Bereich liegt oberhalb der Ekliptik, der graue unterhalb.



Wenn wir die Transformation  $t = p_z|T_u$  auf die Bahn anwenden erhalten wir



#### ANHANG A. ELLIPSENGLEICHUNGEN UND IHRE INVARIANTEN

Die Invarianten einer ebenen Kurve zweiter Ordnung (z.B. *Ellipse*) ergeben sich ohne weiteres aus den Koeffizienten der Kurvengleichung. Das gilt insbesondere für die große und kleine Halbachse  $a$  und  $b$ , sowie die Geradengleichungen von Haupt- und Nebenachse. Die Kenntnis dieser Invarianten erleichtert die METAPOST-Zeichnung ungemein. Die verwendeten Formeln stelle ich kurz zusammen, Details stehen im Artikel [5].

**A.1. Invarianten von Kurven zweiter Ordnung.** Eine ebene Kurve zweiter Ordnung ist gegeben durch eine Gleichung

$$(10) \quad a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

wo die Koeffizienten  $a_{ik}$  bis auf einen gemeinsamen Faktor bestimmt sind. Das *charakteristische* Polynom der Kurve ist

$$\begin{vmatrix} a_{11} - X & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} - X \end{vmatrix} = X^2 - t_{33}X + A_{33} = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2)$$

wobei  $t_{33} = a_{11} + a_{22}$ ,  $A_{33} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2$ . Ihre Wurzeln sind die *Eigenwerte*  $\lambda_1, \lambda_2$ . Sie sind nur bis auf einen willkürlichen Faktor bestimmt: wenn man die Gleichung (10) mit  $q$  multipliziert ändern sich die Eigenwerte in  $q \cdot \lambda_1, q \cdot \lambda_2$ . Das Vorzeichen der Koeffizienten wird so gewählt, dass  $t_{33} \leq 0$  ist und die Eigenwerte werden so indiziert, dass  $\lambda_1 \geq \lambda_2$  gilt. Für uns ist nur der *elliptische* Fall  $A_{33} > 0$  von Belang. Wir notieren die Formeln für die Halbachsen

$$(11) \quad a = -\frac{1}{\lambda_1} \sqrt{\frac{D}{-\lambda_2}}, \quad b = -\frac{1}{\lambda_2} \sqrt{\frac{D}{-\lambda_1}} \quad [5, (2.14-15)]$$

und die Geradengleichung der *Hauptachse*

$$(12) \quad (a_{11} - \lambda_1)(x - x_0) + a_{12}(y - y_0) = 0 \quad [5, (2.46)]$$

Hier ist  $D = \det(a_{ik})$  die Determinante aus den Koeffizienten und  $C = (x_0, y_0)$  ist der Mittelpunkt der Kurve:

$$(13) \quad x_0 = \frac{A_{13}}{A_{33}}, \quad y_0 = \frac{A_{23}}{A_{33}} \quad [5, (2.32)]$$

**A.2. Berechnung der Invarianten aus der Ellipsengleichung.** Wir wenden obige Theorie auf die Ellipsengleichung (7) in Abschnitt §1.3 an. Mit den Konventionen von §A.1 sind ihre Koeffizienten

$$\begin{aligned} a_{11} &= -(z_2 \cdot u_1)^2 - (z_2 \cdot u_2)^2 & a_{12} &= (z_1 \cdot u_1)(z_2 \cdot u_1) + (z_1 \cdot u_2)(z_2 \cdot u_2) \\ a_{22} &= -(z_1 \cdot u_1)^2 - (z_1 \cdot u_2)^2 & a_{33} &= ((z_1 \cdot u_1)(z_2 \cdot u_2) - (z_1 \cdot u_2)(z_2 \cdot u_1))^2 \\ a_{13} &= 0 & a_{23} &= 0 \end{aligned}$$

Dies impliziert schon  $A_{13} = A_{23} = 0$  und der Ellipsenmittelpunkt liegt nach (13) im Ursprung  $C = (0, 0)$ .

Die anderen Koeffizienten vereinfachen wir, indem wir die Tatsache ausnutzen, dass  $z, z_1, z_2$  und  $u, u_1, u_2$  Orthonormalbasen sind. Zum Beispiel gilt  $v = (v \cdot u)u + (v \cdot u_1)u_1 + (v \cdot u_2)u_2$  für jedes  $v \in V$ . Hieraus ergibt sich für  $v = z_1, z_2$  wegen  $z_1 \cdot z_2 = 0$  die Relation  $(z_1 \cdot u)(z_2 \cdot u) + (z_1 \cdot u_1)(z_2 \cdot u_1) + (z_1 \cdot u_2)(z_2 \cdot u_2) = 0$ , folglich  $a_{12} = -(z_1 \cdot u)(z_2 \cdot u)$ . Analog folgt die Relation  $z_1 \cdot z_1 = (z_1 \cdot u)^2 + (z_1 \cdot u_1)^2 + (z_1 \cdot u_2)^2 = 1$ , folglich  $a_{22} = (z_1 \cdot u)^2 - 1$ , und genauso erhalten wir  $a_{11} = (z_2 \cdot u)^2 - 1$ . Unter Verwendung von  $z = \pm z_1 \times z_2, u = \pm u_1 \times u_2$  ist nach (2)  $z \cdot u = \pm(z_1 \times z_2) \cdot (u_1 \times u_2) = \pm \begin{vmatrix} z_1 \cdot u_1 & z_1 \cdot u_2 \\ z_2 \cdot u_1 & z_2 \cdot u_2 \end{vmatrix}$ , folglich  $a_{33} = (z \cdot u)^2$ .

Zusammenfassend sind die Koeffizienten von (7)

$$\begin{aligned} a_{11} &= (z_2 \cdot u)^2 - 1 & a_{22} &= (z_1 \cdot u)^2 - 1 & a_{33} &= (z \cdot u)^2 \\ a_{12} &= -(z_1 \cdot u)(z_2 \cdot u) & a_{13} &= 0 & a_{23} &= 0 \end{aligned}$$

Da  $u = (z \cdot u)z + (z_1 \cdot u)z_1 + (z_2 \cdot u)z_2$  haben wir  $1 = (z \cdot u)^2 + (z_1 \cdot u)^2 + (z_2 \cdot u)^2$ , also ist  $t_{33} = a_{11} + a_{22} = -(z \cdot u)^2 - 1$ . Ferner ist  $A_{33} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = -(z_1 \cdot u)^2 - (z_2 \cdot u)^2 + 1 = (z \cdot u)^2$ . Für die Eigenwerte  $\lambda_1, \lambda_2$  gilt deshalb  $\lambda_1 + \lambda_2 = -(z \cdot u)^2 - 1$  und  $\lambda_1 \lambda_2 = (z \cdot u)^2$ , also  $\lambda_1 = -(z \cdot u)^2, \lambda_2 = -1$ .

Aus (11) und  $D = a_{33}A_{33} = (z \cdot u)^4$  folgt  $a = 1, b = z \cdot u$ , denn wir hatten in Abschnitt §1.3  $z \cdot u \geq 0$  angenommen.

Es ist  $a_{11} - \lambda_1 = (z_2 \cdot u)^2 - 1 + (z \cdot u)^2 = -(z_1 \cdot u)^2$ . Die Hauptachsengleichung nach (12) ist  $-(z_1 \cdot u)^2 x - (z_1 \cdot u)(z_2 \cdot u)y = 0$ , was für  $z_1 \cdot u \neq 0$  vereinfacht werden kann zu  $(z_1 \cdot u)x + (z_2 \cdot u)y = 0$ . Beachte: diese Geradengleichung gilt auch wenn  $z_1 \cdot u = 0$  ist.

**A.3. Gleichung und Invarianten bei allgemeiner Lage.** Wir benötigen die Gleichung der Ellipse  $p_z(K(s, u)) \subset T_z$  gar nicht, aber sie ist leicht aufzustellen.

Der gleiche Weg wie in §1.3 führt auf die Gleichung

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & z_1 \cdot u_2 \\ y - y_0 & z_2 \cdot u_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_1 \cdot u_1 & x - x_0 \\ z_2 \cdot u_1 & y - y_0 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} z_1 \cdot u_1 & z_1 \cdot u_2 \\ z_2 \cdot u_1 & z_2 \cdot u_2 \end{vmatrix}^2 \cdot c^2$$

die wie im vorigen Abschnitt §A.2 behandelt werden kann. Dies ergibt eine Gleichung (10) mit der Koeffizienten-Matrix

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (z_2 \cdot u)^2 - 1 & -(z_1 \cdot u)(z_2 \cdot u) & s(z_1 \cdot u) \\ -(z_1 \cdot u)(z_2 \cdot u) & (z_1 \cdot u)^2 - 1 & s(z_2 \cdot u) \\ s(z_1 \cdot u) & s(z_2 \cdot u) & (z \cdot u)^2 - s^2 \end{pmatrix}$$

die die gleichen Eigenwerte wie in §A.2 besitzt, insbesondere ist  $A_{33} = (z \cdot u)^2$ . Die Faktoren  $A_{13}$  und  $A_{23}$  sind

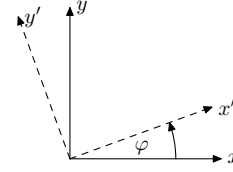
$$\begin{aligned} A_{13} &= \begin{vmatrix} -(z_1 \cdot u)(z_2 \cdot u) & (z_1 \cdot u)^2 - 1 \\ s(z_1 \cdot u) & s(z_2 \cdot u) \end{vmatrix} = s(z_1 \cdot u) \begin{vmatrix} -(z_2 \cdot u) & (z_1 \cdot u)^2 - 1 \\ 1 & (z_2 \cdot u) \end{vmatrix} = s(z_1 \cdot u)(z \cdot u)^2 \\ A_{23} &= \begin{vmatrix} -(z_1 \cdot u)(z_2 \cdot u) & (z_2 \cdot u)^2 - 1 \\ s(z_2 \cdot u) & s(z_1 \cdot u) \end{vmatrix} = s(z_2 \cdot u) \begin{vmatrix} -(z_1 \cdot u) & (z_2 \cdot u)^2 - 1 \\ 1 & (z_1 \cdot u) \end{vmatrix} = s(z_2 \cdot u)(z \cdot u)^2 \end{aligned}$$

Die Determinante  $D$  ist

$$\begin{aligned} D &= a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33} = (z \cdot u)^2 (s^2(z_1 \cdot u)^2 + s^2(z_2 \cdot u)^2 + (z \cdot u)^2 - s^2) = \\ &= (z \cdot u)^4 (1 - s^2) = (z \cdot u)^4 c^2. \end{aligned}$$

## ANHANG B. BASISWECHSEL

**B.1. Rotationsmatrizen.** In diesem Abschnitt führen wir *Rotationsmatrizen*  $\rho(\varphi)$  ein. In einer euklidischen Ebene  $E$  betrachten wir zwei Basen  $(e_1, e_2)$ ,  $(e'_1, e'_2)$  und ihre zugehörigen Koordinatensysteme  $(x, y)$ ,  $(x', y')$  in denen ein Vektor  $v \in E$  die Gestalt  $v = xe_1 + ye_2 = x'e_1 + y'e_2$ , hat, und wo das gestrichene System aus dem ungestrichenen System durch eine *Drehung* um den Winkel  $\varphi$  hervorgegangen sei. Dann gelten die folgenden Beziehungen



$$\begin{aligned}x' &= x \cos \varphi + y \sin \varphi \\y' &= -x \sin \varphi + y \cos \varphi\end{aligned}$$

Die *Rotationsmatrix* um den Winkel  $\varphi$  sei definiert durch

$$\rho(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$$

dann gelten die *Transformationsformeln*

$$\begin{aligned}(x', y') &= (x, y) \cdot \rho(\varphi) \\(e'_1, e'_2) &= (e_1, e_2) \cdot \rho(\varphi)\end{aligned}$$

Analog definieren wir *Rotationsmatrizen* im Raum  $V = \mathbb{R}e_1 \oplus \mathbb{R}e_2 \oplus \mathbb{R}e_3$

$$\begin{aligned}\rho_1(\varphi) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} & \rho_2(\varphi) &= \begin{pmatrix} \cos \varphi & 0 & \sin \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \varphi & 0 & \cos \varphi \end{pmatrix} \\ \rho_3(\varphi) &= \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

die jeweils Drehungen um die  $x$ -,  $y$ - und  $z$ -Achse repräsentieren. Rotationsmatrizen erfüllen die Gleichung  $\rho(-\varphi) = {}^t \rho(\varphi) = \rho(\varphi)^{-1}$ .

**B.2. Übergangsmatrix.** Wir betrachten zwei Ebenen  $E, E'$  mit gegebenen Basisvektoren  $e_1, e_2$  resp.  $e'_1, e'_2$ . Eine lineare Transformation  $t : E \rightarrow E'$  ist durch die Bilder  $t(e_1)$  und  $t(e_2)$  festgelegt, etwa

$$\begin{aligned}t(e_1) &= ae'_1 + be'_2 \\ t(e_2) &= ce'_1 + de'_2\end{aligned}$$

In dem Diagramm

$$(14) \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{\sim} & E \\ m(t) \downarrow & & \downarrow t \\ \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{\sim} & E' \end{array} \quad \begin{array}{l} (x, y) \mapsto xe_1 + ye_2 \\ (x', y') \mapsto x'e_1 + y'e_2 \end{array}$$

ist die Matrix  $m(t)$  der linearen Transformation  $t$  dann gegeben durch

$$m(t) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Wenn die Basis  $e'_1, e'_2$  orthonormal ist, gilt

$$(15) \quad m(t) = \begin{pmatrix} t(e_1) \cdot e'_1 & t(e_1) \cdot e'_2 \\ t(e_2) \cdot e'_1 & t(e_2) \cdot e'_2 \end{pmatrix}$$

In der Bahnprojektion in §2.3 verwenden wir auf der linken Seite von (14) die METAFONT-Transformation  $t = (0, 0, a, c, b, d)$  [2, chap. 15]

$$(x, y) \text{ transformed } t = (ax + cy, bx + dy) = (x, y) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

## ANHANG C. METAPOST CODE

Die ersten Rechnungen, die zu diesem Artikel führten, machte ich im April 2010, nachdem ich im Februar die neue Ausgabe des *L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X Graphics Companion* [1] erstanden und besonders die Zeichnungen von ROEGEL ([1, lunar orbit, Seite xx], [4]) bewundert hatte. Diese Rechnungen hatten zum Ziel, einige der überaus cleveren METAPOST Konstruktionen bei ROEGEL überflüssig zu machen und sie durch mathematische Konzepte zu ersetzen.

**C.1. Transparente Kugel mit Großkreisen.** Die Definition von `halfell( $a, b, \theta$ )` beschreibt eine Halbellipse um den Mittelpunkt  $(0, 0)$  mit den Halbachsen  $a, b$ , die um den Winkel  $\theta$  gedreht wurde. Aus der Hauptachsengleichung (8)  $(z_1 \cdot u)x + (z_2 \cdot u)y = 0$  ergibt sich der Winkel zu  $\theta = \text{angle}(-(z_2 \cdot u), (z_1 \cdot u))$ .

Im Abschnitt 1.2 haben wir *Kugelkoordinaten* eingeführt

$$\begin{aligned} z &= g(\varphi, \lambda) = (\cos \varphi \cos \lambda, \cos \varphi \sin \lambda, \sin \varphi) \\ z_1 &= g(0, \lambda + \pi/2) = (-\sin \lambda, \cos \lambda, 0) \\ z_2 &= g(\varphi + \pi/2, \lambda) = (-\sin \varphi \cos \lambda, -\sin \varphi \sin \lambda, \cos \varphi) \end{aligned}$$

Diese werden im METAPOST Code in dem Makro `circle` als Funktion `g(phi, lambda)` verwendet. `circle` wird in §C.2 erläutert. Der hier wesentliche Teil besteht aus

```
p1 = halfell(a,c0*a,angle(-c2,c1)); % visible path
p2 = halfell(a,c0*a,angle(c2,-c1)); % invisible path
```

Der METAPOST-Code für die Zeichnung ist wie folgt

```
% -----
% Figure 5 -- great circles, parametrized
% -----
beginfig(5);
phi:=30; % latitude
lambda:=25; % longitude
vector e[];
e1=(1,0,0);
e2=(0,1,0);
e3=(0,0,1);
draw fullcircle scaled 2a;
circle(e1,0,a,3);
circle(e2,0,a,3);
circle(e3,0,a,3);
endfig;
```

**C.2. Kreise in allgemeiner Lage.** Der METAPOST Code ist wieder sehr einfach:

```
% -----
% Figure 8 -- circles of latitude
% -----
beginfig(8);
phi:=15; % latitude
lambda:=50; % longitude
vector e[];
e1=(1,0,0); % vector e1, pointing to vernal equinox
e2=(0,cosd(del),-sind(del)); % vector e2, axial tilt
e3=(0,sind(del),cosd(del)); % vector e3 as North pole, axial tilt
draw fullcircle scaled 2a;
circle(e1,0,a,3);
circle(e2,0,a,3);
circle(e3,0,a,3);
```

```

for psi:= 23.5,45,66.5, -23.5,-45,-66.5:
    circle(e3,psi,a,2);          % circles of latitude psi
endfor;
endfig;

```

Den Parameter  $s$  wählen wir jetzt als  $s = \sin \psi$  mit  $-\pi/2 < \psi < +\pi/2$ ,  $c = \cos \psi$ . Ein Kreis in allgemeiner Lage  $K(\sin \psi, u)$  wird durch  $p_z$  in eine Ellipse projiziert, die mit dem Makro `circle(u,  $\psi$ ,  $a$ ,  $f$ )` in der METAPOST-Ebene  $T_z$  gezeichnet wird.

Im Falle eines Großkreises ( $\psi = 0$ ) wird die Vereinfachung aus Abschnitt C.1 genutzt. Im Falle von Schnittpunkten von  $p_z(K(s, u))$  mit  $x^2 + y^2 = 1$  werden die Formeln (9) bei der Definition der Vektoren  $z_3, z_4$  verwendet. Wir bilden den Schnittpunkt der Geraden vom Mittelpunkt der Ellipse zu den Schnittpunkten  $z_3, z_4$ , nehmen ihre Zeitparameter (`intersectiontimes`)  $c_3, c_4$  und zeichnen den *sichtbaren* Teil der Ellipse, der dem Kreisbogen  $K(s, u) \cap \mathbb{S}_z^{\geq}$  auf der sichtbaren Hemisphäre entspricht, *durchgezogen* (`path p1`) und den *unsichtbaren* Teil der Ellipse, der dem Kreisbogen  $K(s, u) \cap \mathbb{S}_z^{<}$  entspricht, *gestrichelt* (`path p2`). Im Code sind noch einige Feinheiten ablesbar, etwa die Sichtbarkeit der Ellipsen im Falle fehlender Schnittpunkte betreffend.

Der Parameter  $a$  dient der Skalierung (size unit). Der Parameter  $f$  dient als Flag:  $f = 0$  zeichnet nur den sichtbaren Pfad  $p_1$ ,  $f = 1$  zeichnet auch den Vektor  $p_z(u)$  (path  $p_0$ ),  $f = 2$  zeichnet den unsichtbaren Pfad  $p_2$  gestrichelt und  $f = 3$  zeichnet beide.

```

% -----
% circle parms
% u: input vector u, to be projected via z=g(phi,lambda)
% psi: latitude relative to vector u in range -90 < psi < + 90
% a: size, scale unit
% f: flag f=0,1,2,3
%     f=0 draws only the visible path p1
%     f=2, 3 draws the invisible path p2
%     f=1, 3 draws vector path p0 to p_z(u)
% -----
def circle(expr u,psi,a,f)=
    numeric s, c, e, c[]; path p[]; pair q[];

    c0=dot(u,g(phi,lambda));
    c1=dot(u,g(0,lambda+90));
    c2=dot(u,g(phi+90,lambda));

    e = 1+-c0;          % epsilon excentricity
    s = sind(psi); c = cosd(psi); %
    q1 = (a,0); q2 = (0,a); % base vectors of METAPOST plane
    w$:=q0=c1*q1 + c2*q2; % p_z(u), saved in global variable w$
    p0 = origin--q0; % vector arrow
    p9 = ellipse(c*a,abs(c0)*c*a,angle(c2,-c1)) shifted (s*q0);

    if (psi=0): % great circle
        p1 = halfell(a,c0*a,angle(-c2,c1)); % visible path
        p2 = halfell(a,c0*a,angle(c2,-c1)); % invisible path
    elseif (abs(c0)>c): % circles of latitude psi, no intersection
        if (s*c0>0): % visibility of complete ellipse
            p1=p9;
            p2=origin;
        else: % invisibility of complete ellipse
            p1=origin;
            p2=p9;
        fi
    else: % intersection |s|<= e, circle of latitude psi

```

```

c5=e+-+s; c6=e*e;
q3=((c1*s+c2*c5)*a/c6,(c2*s-c1*c5)*a/c6);
q4=((c1*s-c2*c5)*a/c6,(c2*s+c1*c5)*a/c6);
c3=xpart(p9 intersectiontimes ((s*q0)--1.1q3));
c4=xpart(p9 intersectiontimes ((s*q0)--1.1q4));
if (psi>0):
  p3 = subpath(c4,8) of p9 & subpath(0,c3) of p9;
  p4 = subpath(c3,c4) of p9;
else:
  p3 = subpath(c4,c3) of p9;
  p4 = subpath(c3,8) of p9 & subpath(0,c4) of p9;
fi

if (c0>0):
  p1=p3; p2=p4;
else:
  p1=p4; p2=p3;
fi

fi

draw p1;
if (f>1):
  draw p2 dashed evenly;
fi
if (f=1) or (f=3):
  drawarrow p0 dashed evenly;
fi

endif;

```

C.3. **Bahnelemente.** Damit die im Makro `circle` berechneten Vektoren  $p_z(u)$  jeweils in der Zeichnung mit labels markiert werden können, werden ihre Koordinaten (der METAPOST-Ebene) in der globalen Variablen `w$` gespeichert. Der GAUSS Vektor  $u_1 = G(\omega, i, \Omega)$  ist mit der Funktion `G(omega,incl,Omega)` bezeichnet. Ansonsten ist der Code naheliegend.

```

% -----
% Figure 12 -- orbital elements
% -----
beginfig(12);

phi:=25; % latitude
lambda:=28; % longitude
Omega:=35; % longitude of ascending node
incl:=30; % inclination
omega:=43; % longitude of periapsis in orbital plane
vector e[],u[];
e1=(1,0,0); % aries - vernal equinox
e2=(0,1,0); % e2=e x e1 - not used
e3=(0,0,1); % e3=e=ENP
u0=g(0,Omega); % ascending node
u1=G(omega,incl,Omega); % Gauss vector 1, pointing to periapsis
u2=G(omega+90,incl,Omega); % Gauss vector 2
u3=g(90-incl,Omega-90); % orbital angular momentum, vector u

draw fullcircle scaled 21; % circumference
circle(e1,0,1,3); % vernal equinox e1, circle thru e and e2

```

```

label.bot(aries,w$);
z1=w$;
circle(e3,0,1,3);           % ecliptic thru e1 and e2
label.lrt(btex $e$ etex,.9w$); % ecliptical north pole e
circle(u0,0,1,3);           % ascending node, circle thru e and u
z0=w$;
label.bot(ascnode,z0);      % ascending node
label.top(descnode,-z0);    % descending node
circle(u3,0,1,3);           % orbit in T_u
label.llft(btex $u$ etex,0.9w$); % orbital angular momentum vector u
circle(u1,0,1,3);           % circle thru u and u2
z1'=w$;                      % z1'=p_z(u1)
label.ulft(btex $u_1$ etex,.9z1');
circle(u2,0,1,3);           % circle thru u and u1
label.urt(btex $u_2$ etex,w$); % u2

label(btex $\Omega$ etex,.5[.9z1,.9z0]);
label(btex $\omega$ etex,.5[.9z0,.9z1']);
label.lrt(btex $i$ etex,.2[z0,1.2z1']);

endfig;

```

#### LITERATUR

- [1] Michel Goossens, Frank Mittelbach, Sebastian Rahtz, Denis Roegel, and Herbert Voß, *The L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X Graphics Companion*, 2nd ed., Tools and Techniques for Computer Typesetting, Addison–Wesley, 2008.
- [2] Donald E. Knuth, *The METAFONTbook*, Addison–Wesley, 1992.
- [3] Oliver Montenbruck, *Grundlagen der Ephemeridenrechnung*, Spektrum Akademischer Verlag, 2005.
- [4] Denis Roegel, *Spheres, great circles and parallels*, TUGboat **30** (2009), no. 1, 80–87.
- [5] Berndt E. Schwerdtfeger, *Invariants of Curves of second order* (2013), available at <http://berndt-schwerdtfeger.de/wp-content/uploads/pdf/c2.pdf>.



## INDEX

<b>A</b>	
Äquatorebene .....	2
astronomische Koordinaten .....	6
<b>B</b>	
Bahn von Himmelskörpern .....	7, 8
Bahnebene .....	7–9
Bahnelemente .....	6, 8
Bahnprojektion .....	8, 12
Basiswechsel .....	7
Beispiel	
allgemeine Kreise .....	6
Bahn mit Bahnelementen .....	8
transparente Kugel .....	4
Breite .....	2
Breitenkreise .....	6
Brennpunkt .....	9
<b>C</b>	
charakteristisches Polynom .....	10
CRAMER .....	4
<b>D</b>	
Determinante .....	10
<b>E</b>	
ebene Kurve zweiter Ordnung .....	8
Eigenwerte .....	10
Einheitsvektor .....	2
Ekliptik .....	7, 9
ekliptikalen Nordpol ENP .....	9
ekliptikaler Nordpol ENP .....	7
Ellipse .....	2, 10
$p_z(K(s, u))$ .....	4, 5, 11
$p_z(K(u))$ .....	3
Ellipsengleichung .....	4
$p_z(K(u))$ .....	4
Ellipsenmittelpunkt .....	11
elliptischer Fall $A_{33} > 0$ .....	10
Exzentrizität .....	2
<b>F</b>	
Frühlingspunkt .....	7
<b>G</b>	
GAUSS'sche Vektoren .....	8
geographische Koordinaten .....	2, 6
Gradnetz .....	3
GRASSMANN .....	1
Großkreis .....	3
<b>H</b>	
Hauptachse .....	4, 5, 10
Herbstpunkt .....	7
Himmelskugel .....	6, 7
Himmelsmechanik .....	3
Horizont System .....	7
<b>I</b>	
Inklination .....	7
Invarianten der Ellipse .....	4
Invarianten ebener Kurven 2. Ordnung ..	10
<b>K</b>	
kanonische Zerlegung .....	2
Knoten .....	7, 9
Knotenlinie .....	7, 9
Kugelkoordinaten .....	2, 6, 13
<b>L</b>	
Länge .....	2, 8
aufsteigender Knoten .....	7
LAGRANGE .....	1
Links-System .....	7
<b>M</b>	
Mittelpunkt .....	5, 10
<b>N</b>	
Neigungswinkel .....	7
<b>O</b>	
orthogonale Projektion .....	1–3, 8, 9
orthogonale Vektoren .....	1
orthogonale Zerlegung .....	2
orthogonales Komplement .....	2
orthogonales Paar .....	2
orthonormale Basis .....	2–4, 11
<b>P</b>	
Periapsis .....	8, 9
Poldistanz .....	7
<b>R</b>	
Referenzsystem .....	7
Rotationsmatrix .....	12
<b>S</b>	
Satellitenbahnen .....	6
Schiefe der Ekliptik .....	7
sichtbar .....	5
Sphäre .....	2, 6
sphärische Transformationsformel .....	7
sphärische Koordinaten .....	6
<b>T</b>	
Tangentialebene .....	1–3
teilweise sichtbar .....	5
Transformation	
lineare .....	12
METAFONT .....	12
Transformationsformel .....	12
<b>U</b>	
Übergangsmatrix .....	9, 12
unsichtbar .....	5
<b>V</b>	
versteckte Spur .....	4