Kohomologie S–arithmetischer Untergruppen der $SL(2)$ über einem Funktionenkörper und arithmetische Eigenschaften automorpher Formen

vorgelegt von
Berndt E. Schwerdtfeger
Mathematisches Institut
Bonn 1979

Inaugural – Dissertation zur Erlangung des Doktorgrades
der Mathematisch – Naturwissenschaftlichen Fakultät der
Rheinischen Friedrich – Wilhelms – Universität zu Bonn

2010 *Mathematics Subject Classification.* Primary 11F75; Secondary 11F70,11F67

Key words and phrases. Cohomology of Arithmetic Groups, Automorphic Representations

Zusammenfassung. In dieser Arbeit beschäftige ich mich mit den Kohomologiegruppen $H^i(\Gamma, M)$ einer S-arithmetischen Untergruppe $\Gamma \subset SL(2, F)$ über einem globalen Körper $F/\mathbf{F}_q$ in Charakteristik p.
Die Arbeit ist in drei Teile gegliedert. Während ich im ersten Teil die rationale Kohomologie $M = \mathbf{Q}$ berechne, ist im dritten Teil $M = \mathbf{F}_\ell$. Der zweite Teil ist unabhängig vom ersten und bereitet den Übergang mod ℓ vor. Zum genauen Studium der arithmetischen Eigenschaften automorpher Formen wird die Theorie der Eisensteinreihen dargestellt und bei der Konstruktion von Kohomologieklassen verwendet.
Die Methoden des ersten Teils sind im wesentlichen lokal, im übrigen dominiert der globale Aspekt. Jeder Teil enthält eine Einleitung mit weiteren Informationen zu Inhalt und Motivation der sich anschließenden Untersuchung.

Ich danke Herrn Harder für die Anregung zur vorliegenden Arbeit und für sehr nützliche Gespräche.

Bielefeld, Februar 1979 Berndt E. Schwerdtfeger

Angefertigt mit Genehmigung der
Mathematisch – Naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Bonn
Referent: Prof. Dr. F. Hirzebruch
Koreferent: Prof. Dr. G. Harder

Tag der Promotion: 20. April 1979

Vorwort zur TEX Version

Der Text der Arbeit von 1979 ist bis auf ein paar sprachliche Formulierungen unverändert geblieben. Das Format wurde 1997 vom *SCRIPT Mathematical Formula Formatter* der IBM auf LATEX umgestellt.

Mainz, 25. Mai 1997 Berndt E. Schwerdtfeger

Version 1.5. Das package `hyperref` wird jetzt mit der option `colorlinks` geladen und statt `german.sty` wird `babel` verwendet.

Berlin, 4. März 2015 Berndt E. Schwerdtfeger

 version 1.5, rev. 517, 4. März 2015

Inhaltsverzeichnis

Teil 1

Kohomologie S–arithmetischer Gruppen

1. Einleitung

In diesem Teil wird das Verschwinden der Kohomologiegruppen $H^i(\Gamma, \mathbf{Q})$ S–arithmetischer Untergruppen $\Gamma \subset SL(2,F)$ für einen Funktionenkörper $F/\mathbf{F}_q$ in den Dimensionen $i \neq 0$, $\operatorname{card}(S)$ gezeigt.

Diese Kohomologiegruppen werden topologisch berechnet durch die Kohomologie von X/Γ, wo $X = \prod_{v\in S} X_v$ das Produkt der Bruhat–Tits–Gebäude an den Stellen $v \in S$ ist. Die Struktur des Quotientenraumes X/Γ wird mit Hilfe der Reduktionstheorie der $SL(2)$ aufgeklärt. Diese Reduktionstheorie wird im ersten Teil vorausgesetzt und auf das Produktgebäude übertragen. Im zweiten Teil werden die wichtigsten Sätze dieser Theorie direkt hergeleitet; sie ergeben sich aus globalen Argumenten (Satz von Riemann-Roch für Ebenenbündel). Die Methoden des ersten Teils sind ansonsten lokal.

Nach den Vorbereitungen wird im Abschnitt 3 die topologische Struktur der Spitzenumgebungen bestimmt und mit deren Hilfe im Abschnitt 4 ein Satz über die quadratische Integrierbarkeit der Kohomologieklassen bewiesen. Nach einem aus der Theorie der C^∞–Mannigfaltigkeiten bekannten Hodge – Formalismus bleibt im Abschnitt 5 nur noch das Verschwinden harmonischer Formen in den angegebenen Dimensionen zu beweisen. Das Verschwinden in den Spitzen wird direkt eingesehen und dann die Mittelwerteigenschaft harmonischer Formen ausgenutzt, die auch in diesem Kalkül gilt.

2. Vorbereitungen

2.1. Bezeichnungen. $F/\mathbf{F}_q$ ist ein Funktionenkörper in einer Variablen mit Konstantenkörper $\mathbf{F}_q$ der Charakteristik p. S ist eine endliche nichtleere Menge von Stellen von F und $\mathcal{O}_S \subset F$ ist der Dedekindring der außerhalb von S holomorphen Funktionen aus F. Die Stellen von F werden mit v, w, …, bezeichnet. Sei F_v die Komplettierung von F bei v und $\mathfrak{o}_v \subset F_v$ der lokale Ring der ganzen Elemente von F_v : der Restklassenkörper $k(v)$ von $\mathfrak{o}_v$ hat den Grad $\deg v = [k(v) : \mathbf{F}_q]$ und hat $\mathrm{N}v = q_v = q^{\deg v}$ Elemente. Die normierte Bewertung von F_v sei $\operatorname{ord}_v : F_v^\times \to \mathbf{Z}$, und der normierte Betrag ist damit $|x|_v = \mathrm{N}v^{-\operatorname{ord}_v x}$. Ein Element $\pi_v \in \mathfrak{o}_v$ mit $\operatorname{ord}_v \pi_v = 1$ ist eine *Ortsuniformisierende*. $\mathfrak{p}_v = \pi_v \mathfrak{o}_v$ ist das maximale Ideal des lokalen Rings.

$G = SL(2)/\mathbf{F}_q$ ist die algebraische Gruppe der 2×2 Matrizen mit der Determinante 1. $B = \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \subset G$ ist die Standard–Borel–Untergruppe, $U = R_u(B) = \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ihr unipotentes Radikal, $T = \begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix}$ der Standard–Torus, $N = \mathcal{N}(T)$ sein Normalisator. $G_v := G(F_v)$, $G_S = G_\infty := \prod_{v\in S} G_v$ und entsprechende Bedeutung für die anderen algebraischen Gruppen (B_v, B_S, U_v, T_∞, …).

Es gibt in G_v zwei Konjugationsklassen maximal kompakter Untergruppen, die typischen Vertreter („gerader“ und „ungerader“ Typ) sind : $\mathfrak{K}_v^0 = G(\mathfrak{o}_v) = SL(2, \mathfrak{o}_v)$ und $\mathfrak{K}_v^1 = \Pi^{-1}\mathfrak{K}_v^0\Pi = \begin{pmatrix} \mathfrak{o}_v & \mathfrak{p}_v^{-1} \\ \mathfrak{p}_v & \mathfrak{o}_v \end{pmatrix}$, wobei $\Pi := \begin{pmatrix} \pi_v & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL(2, F_v)$. Für beliebiges $n \in \mathbf{Z}$ setzen wir $\mathfrak{K}_v^n := \Pi^{-n}\mathfrak{K}_v^0\Pi^n = \begin{pmatrix} \mathfrak{o}_v & \mathfrak{p}_v^{-n} \\ \mathfrak{p}_v^n & \mathfrak{o}_v \end{pmatrix}$.

Der Durchschnitt $\mathfrak{I}_v := \mathfrak{K}_v^0 \cap \mathfrak{K}_v^1$ heißt Standard–*Iwahorigruppe* von G_v, ihre Konjugierten sind die *Iwahorigruppen*. Die Iwahorigruppen sind ihre eigenen Normalisatoren: $\mathcal{N}(\mathfrak{I}_v) = \mathfrak{I}_v$ und das gleiche gilt auch von den maximal kompakten Gruppen in G_v, so daß also die Nebenklassen $\mathfrak{I}_v\backslash G_v$, $\mathfrak{K}_v^0\backslash G_v$ und $\mathfrak{K}_v^1\backslash G_v$ jeweils die Konjugationsklassen der Iwahorigruppen resp. der maximal kompakten Gruppen vom geraden Typ resp. die maximal kompakten vom ungeraden Typ repräsentieren.

Schließlich ist $\Gamma_S = G(\mathcal{O}_S) \subset G_F = G(F)$ durch Diagonalabbildung in das Produkt eine diskrete Untergruppe von G_∞. Wenn es aus dem Kontext heraus klar ist, wird nur Γ statt Γ_S (oder Γ_∞) geschrieben.

2.2. Gruppenkohomologie. Für die Definition vgl. Serre [10, chap. VII]. Die hier verwendete Methode zur Berechnung der Kohomologiegruppen stützt sich auf den nachfolgenden Vergleichssatz [4, 5.3.1, cor., p. 204], an dessen Beweis kurz erinnert sei.

Es sei X ein topologischer Raum, auf dem eine diskrete Gruppe Γ stetig operiere, $\mathcal{A}$ sei eine Γ–Garbe auf X. Dann gibt es zwei Spektralsequenzen, die gegen den gleichen Limes konvergieren und deren Anfangsterme lauten [4, th. 5.2.1]

$$E_2^{a,b} = H^a\big(X/\Gamma, \mathcal{H}^b(\Gamma, \mathcal{A})\big),$$
$$E_2^{a,b} = H^a\big(\Gamma, H^b(X, \mathcal{A})\big)$$

Bei *diskontinuierlicher* Operation ist der Halm der Kohomologiegarbe $\mathcal{H}^b(\Gamma, \mathcal{A})$ auf X/Γ in einem Punkt $\bar{x} = x\,\Gamma \in X/\Gamma$ $(x \in X)$ [4, th. 5.3.1]

$$\mathcal{H}^b(\Gamma, \mathcal{A})_{\bar{x}} \simeq H^b(\Gamma_x, \mathcal{A}_x)$$

Wir wenden das jetzt an auf den Fall, daß $\mathcal{A} = M_X$ eine konstante Garbe ist, wobei Γ trivial auf der abelschen Gruppe M operiere. Wenn ferner M keine p–Torsion hat für alle Primteiler p der Fixgruppenordnungen $\mathrm{card}(\Gamma_x)$, $x \in X$, bricht die erste Spektralsequenz offenbar zusammen und es ist $\mathcal{H}^0(\Gamma, M_X) = M_{X/\Gamma}$.

Hieraus ergibt sich der

Vergleichssatz: *Es ist* $H^i(\Gamma, M) = H^i(X/\Gamma, M)$*, falls gilt:*
1. Γ *operiert diskontinuierlich auf* X*,*
2. Γ *operiert trivial auf M und* $\forall x \in X$, $\forall p \mid \mathrm{card}(\Gamma_x)$ *gilt:* M *hat keine* p*–Torsion,*
3. X *ist kohomologisch trivial und zusammenhängend.*

2.3. Gebäude und Titskomplex von $SL(2)$. Wir beschreiben jetzt den Raum X, der die Voraussetzungen in dem Vergleichssatz für eine S–arithmetische Gruppe erfüllt.

Das Paar $(\mathfrak{I}_v, N_v)$ ist ein Titssystem (BN–Paar), [2, IV], in G_v mit unendlicher Weylgruppe, dem ein *Kammer–Komplex* [13, Theor. 3.2.6] zugeordnet ist :

$$Z_v = \mathfrak{K}_v^0\backslash G_v \cup \mathfrak{K}_v^1\backslash G_v \cup \mathfrak{I}_v\backslash G_v$$

Die Vertices (oder 0–Zellen) sind $Z_v^0 := \mathfrak{K}_v^0\backslash G_v \cup \mathfrak{K}_v^1\backslash G_v$, die 1–Zellen sind $Z_v^1 := \mathfrak{I}_v\backslash G_v$. Die Inklusionen $\mathfrak{I}_v \subset \mathfrak{K}_v^0$, $\mathfrak{I}_v \subset \mathfrak{K}_v^1$ liefern kanonische Abbildungen auf dem Kammer–Komplex:

$$\partial_v^0 : Z_v^1 \longrightarrow \mathfrak{K}_v^0\backslash G_v \subset Z_v^0$$
$$\partial_v^1 : Z_v^1 \longrightarrow \mathfrak{K}_v^1\backslash G_v \subset Z_v^0$$

Diese *Randoperatoren* ordnen jeder 1-Zelle ihre beiden Endpunkte zu.

Wenn man die Nebenklassen mit den Konjugationsklassen identifiziert, ist dies nur eine geometrische Sprechweise der Tatsache, daß jede Iwahorigruppe Durchschnitt zweier maximal kompakter Gruppen vom geraden und ungeraden Typ ist. ∂_v^0 ordnet einer Iwahorigruppe die gerade maximal kompakte Gruppe zu, in der sie liegt, analog ∂_v^1 für die ungerade maximal kompakte Gruppe.

Die geometrische Realisierung dieses Titskomplexes ist das sogenannte *Bruhat–Tits–Gebäude*: $X_v \subset Z_v \times [0,1]$ von $SL(2)$ an der Stelle v [3, p. 32]. Die Gruppe G_v operiert auf X_v von rechts durch die kanonische Operation auf Z_v.

Bemerkung: Intuitiv parametrisiert X_v gerade die maximal kompakten Untergruppen von G_v, wobei die beiden Konjugationsklassen passend durch 1-Zellen (Iwahorigruppen) verbunden sind. X_v spielt also die Rolle eines $\mathfrak{p}$*–adischen symmetrischen Raumes*. Vgl. auch Weil [14, p. 24 ff.], der die Terminologie „Normen" verwendet, oder auch Serre [12, p. 117] mit der Terminologie „Gitter".

Es gibt eine sogenannte Strukturabbildung [3, §2.2]:

$$\alpha_v : \mathbf{R} \longrightarrow X_v$$

die so konstruiert wird:
für $n \in \mathbf{Z}$ ist $\alpha_v(n) = (\mathfrak{K}_v^i.g, i)$ mit $i = 0$ resp. $i = 1$ wenn n gerade resp. ungerade ist, und $g^{-1}\mathfrak{K}_v^i g = \mathfrak{K}_v^n$;
für $r \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$ sei $n \in \mathbf{Z}$ mit $n < r < n+1$, dann ist $\alpha_v(r) = (\mathfrak{I}_v.g, i)$ mit $i = r - n$ resp. $i = n + 1 - r$ wenn n gerade resp. ungerade ist, und $g^{-1}\mathfrak{I}_v g = \mathfrak{K}_v^n \cap \mathfrak{K}_v^{n+1}$ (i läuft also stetig von 0 bis 1 und zurück).
α_v ist offensichtlich ein Homöomorphismus auf das Bild und $\mathbf{Z}$ geht dabei auf die Vertices. Das Bild $A_v := \alpha_v(\mathbf{R})$ heißt *Standardappartement*. Ein *Appartement* ist eine Menge der Form $A_v g$, $g \in G_v$. Für ein Intervall $J \subset \mathbf{R}$ wird $J_v = \alpha_v(J)$ gesetzt. Nach Konstruktion ist also $X_v = [0,1]_v.G_v$ und $X_v/G_v \simeq [0,1]$.

Auf A_v, also auch auf jedem Appartement, gibt es einen eindeutigen Abstandsbegriff via α_v. Nun liegen je zwei Punkte $x, y \in X_v$ in einem gemeinsamen Appartement (im Kontext der „Normen" ist dies [14, II, prop. 4]), und man weiß, daß ihr Abstand unabhängig vom gewählten Appartement ist, [3, §2.5]. Insbesondere ist das Gebäude ein metrischer Raum, der Abstand sei $d : X_v \times X_v \longrightarrow \mathbf{R}_+$.

Dieser Abstand läßt sich auch rein gruppentheoretisch definieren: für $x \in X_v$ sei $\mathfrak{K}_x$ die Fixgruppe (sie ist also genau für die Vertices maximal kompakt und sonst eine Iwahorigruppe). Für Vertices x, y ist leicht zu sehen, daß der Index

$$(\mathfrak{K}_x : \mathfrak{K}_x \cap \mathfrak{K}_y) = (\mathrm{N}v + 1)\mathrm{N}v^{d(x,y)-1}$$

Insbesondere hat jeder Vertex (0-Zelle) genau $\mathrm{N}v + 1$ Nachbarn ($d(x, y) = 1$).

Eine wichtige Eigenschaft des Gebäudes ist, daß sich je zwei Punkte durch eine eindeutig bestimmte *Geodäte* verbinden lassen, d.h. es gibt eine Abbildung [3, 2.5.13, 2.5.15]

$$\begin{aligned} [0,1] \times X_v \times X_v &\longrightarrow X_v \\ (t, x, y) &\longmapsto tx + (1-t)y \end{aligned}$$

X_v ist *zusammenziehbar*.

X_v erhält eine *Orientierung*, indem einer 0-Zelle vom Typ $\mathfrak{K}_v^0$ das Vorzeichen $+1$, einer 0-Zelle vom Typ $\mathfrak{K}_v^1$ das Vorzeichen -1 gegeben wird, und eine 1-Zelle von $-$ nach $+$ gerichtet ist. Dies ist so eingerichtet, daß G_v orientierungstreu operiert.

Der Stabilisator eines Appartement ist der Normalisator eines Torus, für A_v und $N_v = T_v \cup \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right).T_v$ haben wir die Operationen ($r \in \mathbf{R}, t \in F_v^\times$) :

$$\alpha_v(r).\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix} = \alpha_v(r + 2\,\mathrm{ord}_v\, t) \qquad \alpha_v(r).\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \alpha_v(-r)$$

Aus der *Iwasawa – Zerlegung* (Doppel–Titssystem [3, §5])

$$G_v = \mathfrak{I}_v.N_v.U_v$$

folgt:

$$X_v = A_v.U_v$$

Aus [3, Prop. 2.5.8] folgt, daß A_v Fundamentalgebiet für U_v ist

$$A_v \simeq X_v/U_v.$$

Wie leicht zu sehen ist, gilt für $u \in F_v$, $u \neq 0$

$$A_v \cap A_v \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = [-\operatorname{ord}_v u, \infty)_v$$

Nach diesen lokalen Betrachtungen setzen wir

$$X = X_S = X_\infty := \prod_{v \in S} X_v$$

das Produkt der Gebäude an den Stellen in S. Es ist klar, daß $\Gamma = \Gamma_S$ auf X diskontinuierlich operiert, denn die Operation von G_∞ auf X_∞ ist *eigentlich*. Ferner ist X zusammenziehbar und damit sind die Voraussetzungen im Vergleichssatz erfüllt.

2.4. Reduktionstheorie. Wir wollen die Sätze 2.1.1 und 2.1.2, sowie 2.2.2 der *Minkowskische Reduktionstheorie über Funktionenkörpern* von Harder [5] auf das Produktgebäude X übertragen (siehe auch §7 *Reduktionstheorie*).

Sei $\mathfrak{K}_x = \{g \in G_S \mid xg = x\}$ die Fixgruppe von $x \in X_\infty$, und

$$\mathfrak{K}(x) = \mathfrak{K}_x \times \prod_{v \notin S} \mathfrak{K}_v^0$$

Die $\mathfrak{K}(x)$ sind *Standarduntergruppen* von $G_{\mathbf{A}} = SL(2, \mathbf{A})$ im Sinne von [5, §1]. Hier bezeichnet $\mathbf{A}$ den Adelering von $F/\mathbf{F}_q$.

Auf F_v sei das Haarsche Maß μ_v durch $\mu_v(\mathfrak{o}_v) = 1$ normiert; auf $\mathbf{A}$ werde das Produktmaß $\mu = \otimes_v \mu_v$ genommen. Sei $\mathrm{Bor}(F)$ die Menge der Boreluntergruppen von G/F. Zu jedem $P \in \mathrm{Bor}(F)$ werde $R_u(P)_{\mathbf{A}}$ mit dem Bildmaß μ_P bezüglich eines Isomorphismus der additiven Gruppe $\mathbf{G}_a \simeq R_u(P)/F$ versehen (wegen Artins Produktformel ist μ_P vom gewählten Isomorphismus unabhängig).

Wir definieren jetzt eine Funktion

$$n : X \times \mathrm{Bor}(F) \longrightarrow \mathbf{R}_+^\times$$
$$n(x, P) := \mu_P(\mathfrak{K}(x) \cap R_u(P)_{\mathbf{A}})$$

Diese Zahl wird in [5] mit $\nu_\alpha(P, \mathfrak{K}(x))$ bezeichnet. Es ist dabei $\alpha : P \to \mathbf{G}_m$ die positive Wurzel. Setze $p^\alpha := \prod_{v \in S} |\alpha(p_v)|_v$, es gelten folgende

Eigenschaften:

(1) $n(x.\gamma, \gamma^{-1}P\gamma) = n(x, P)$, für alle $\gamma \in \Gamma$.

(2) $n(x.p, P) = p^{-\alpha}.n(x, P)$, für alle $p \in P_S$.

(1) ergibt sich daraus, daß die Konjugation das Maß μ_P in $\mu_{\gamma^{-1}P\gamma}$ überführt und $\mathfrak{K}(x\gamma) = \mathfrak{K}(x)^\gamma$, denn γ ist ganz außerhalb S. (2) folgt aus der Definition der normierten Beträge $|\ |_v$ als Modul der Maße μ_v.

Es gelten folgende **Reduktionssätze**

(1) *Es gibt eine Konstante $N_1 > 0$, so daß gilt: zu jedem $x \in X$ gibt es ein $P \in \mathrm{Bor}(F)$ mit $n(x, P) \geq N_1$.*
(2) *Es gibt eine Konstante $N_2 > N_1$, so daß gilt: für alle $x \in X$, $P, P' \in \mathrm{Bor}(F)$ folgt aus $n(x, P) \geq N_1$ und $n(x, P') \geq N_2$, daß $P = P'$.*

Beweis aus den Sätzen [5, 2.1.1, 2.1.2]: Es bezeichne $N_1(\mathfrak{K})$ eine Konstante für die 2.1.1 bezüglich $(G_{\mathbf{A}}, \mathfrak{K})$ gilt. Sei $N_1 := \min N_1(\mathfrak{K}(x_0))$, wo $x_0 \in [0,1]_S$ durchläuft (da es sich um $3^{|S|}$ Gruppen handelt, ist $N_1 > 0$). Zu jedem $x \in X$ existiert genau ein $x_0 \in [0,1]_S$ und ein $g \in G_S$ mit $x = x_0.g$. Setze g durch 1 außerhalb S zu $g_1 = (g,1) \in G_{\mathbf{A}}$ fort. Nach [5, 2.1.1] existiert ein P mit $n(x,P) = \nu_\alpha(P, \mathfrak{K}(x_0)^{g_1}) \geq N_1(\mathfrak{K}(x_0)) \geq N_1$, qed. für die erste Behauptung. Es bezeichne $N_2(\mathfrak{K})$ eine Konstante, für die [5, 2.1.2] bezüglich $(G_{\mathbf{A}}, \mathfrak{K}, N_1)$ richtig ist. Wähle $N_2 := \max N_2(\mathfrak{K}(x_0))$, $x_0 \in [0,1]_S$. Dann folgt aus den Voraussetzungen im zweiten Reduktionssatz, daß die Voraussetzungen in [5, 2.1.2] erfüllt sind, und folglich ist $P = P'$, qed.

Bemerkung: Bei Bedarf kann die Konstante N_2 noch vergrößert werden; wir werden dann annehmen, N_2 sei von vorneherein passend gewählt worden.

Aus dem Satz [5, 2.2.2] ergibt sich nun sofort das

Kompaktheitskriterium: *$L \subset X$ ist genau dann relativ kompakt modulo Γ, wenn es N' gibt mit : zu jedem $x \in L$ existiert $P \in \mathrm{Bor}(F)$ mit $N_1 \leq n(x,P) \leq N'$.*

3. Die topologische Struktur der Spitzen

3.1. Die Zerlegung des Quotienten. Die Reduktionssätze geben eine erste Einsicht in die Struktur des Quotientenraumes $Y = X/\Gamma$. Es sei für $P \in \mathrm{Bor}(F)$, $N \in \mathbf{R}_+^\times$

$$X_P(N) := \{x \in X \mid n(x,P) \geq N\}$$

Mit den Konstanten $N_2 > N_1$ aus den Reduktionssätzen folgt

(1) $X = \bigcup_P X_P(N_1)$
(2) $X_P(N_1) \cap X_{P'}(N_2) \neq \emptyset \quad \Longrightarrow \quad P = P'$

Sei $X' := \bigcup_P X_P(N_2), \quad X'_P := X_P(N_2), \quad L := X - X'$.

Dann ist $L = \bigcup_P (X_P(N_1) - X_P(N_2))$, folglich nach dem Kompaktheitskriterium relativ kompakt modulo Γ.

Wegen der Eigenschaft (1) der n–Funktion ist für $\gamma \in \Gamma : X_P(N).\gamma = X_{P^\gamma}(N)$. Insbesondere sind L und X' Γ–stabil. Wir werden später sehen, daß X' abgeschlossen ist (Satz 3.2).

Es sei jetzt $f : X \longrightarrow Y$ die Quotientenabbildung, und

$$M := L/\Gamma, \quad Y' := X'/\Gamma, \quad Y'_P := f(X'_P)$$

Die Mengen Y'_P heißen *Spitzen* (oder eigentlich *Spitzenumgebungen*).

Seien $x, x\gamma \in X'_P$ mit $\gamma \in \Gamma$, dann ist $X'_P \cap X'_P.\gamma = X'_P \cap X'_{P^\gamma} \neq \emptyset$, damit nach dem 2. Reduktionssatz $P = P^\gamma$, d.h. $\gamma \in \Gamma \cap P_F$ und die Spitze $Y'_P \simeq X'_P/\Gamma \cap P_F$. Eine Spitze hängt also offenbar nur von der Γ–Konjugationsklasse der sie definierenden Borelgruppe ab. Es bezeichne im folgenden $C \subset G_F$ ein Repräsentantensystem dieser Klassen:

$$C \simeq \Gamma \backslash G_F / B_F \simeq \Gamma \backslash \mathrm{Bor}(F)$$

Es ist wohlbekannt, daß C eine endliche Menge ist; die Klassenzahl $h_S = \mathrm{card}(C)$ ist gerade die *Idealklassenzahl* des Dedekindringes $\mathcal{O}_S$.

Wir haben damit die disjunkte Zerlegung von Y :

$$Y = M \cup \bigcup_{c \in C} Y'_c$$

mit $\overline{M}$ kompakt und den Spitzen $Y'_c \simeq X'_{cBc^{-1}}/\Gamma \cap cB_Fc^{-1}$.

Für die Berechnung der Kohomologie von Y brauchen wir sehr explizite Informationen über die Spitzen.

3.2. Die Standardspitze. Es sei A das Standardappartement in X, das ist einfach das Produkt der lokalen Standardappartements. Jetzt ist eine exponentielle Schreibweise zweckmäßig:

$$A(n) := A \cap X_B(q^n)\ , \qquad n \in \mathbf{Z}$$

Es seien auch die Konstanten in den Reduktionssätzen so gewählt $N_1 = q^{n_1}$, $N_2 = q^{n_2}$ und ferner $n_2 > 2g - 2$ (vgl. die Bemerkung in 2.4). Hier bezeichnet g das Geschlecht des Funktionenkörpers.

Jedem Punkt aus dem Appartement A ordnen wir einen S–Divisor zu, indem über die Strukturabbildung $\alpha : \mathbf{R}^S \to A$ jeder reellen Koordinate die nächstkleinere ganze Zahl, und dieser der zugehörige Divisor zugeordnet wird (bei additiver Schreibweise der Divisorengruppe von $F/\mathbf{F}_q$):

$$\operatorname{div}(x) := \sum_{v \in S} [r_v].v\ , \qquad x = \alpha(r) \in A$$

Lemma. Für $x \in A$ gilt: $n(x, B) = \mathrm{N}(\operatorname{div} x)$.

Beweis: Für $x \in \alpha(\mathbf{Z}^S)$ ist dies unmittelbar klar: $\mathfrak{K}_v^n \cap U_v = U(\pi^{-n}\mathfrak{o}_v)$. Für eine Zahl $r \in \mathbf{R} - \mathbf{Z}$ ist $\mathfrak{K}_{\alpha_v(r)} = \mathfrak{K}_v^n \cap \mathfrak{K}_v^{n+1}$ wo $n = [r]$, und $\mathfrak{K}_v^n \cap \mathfrak{K}_v^{n+1} \cap U_v = \mathfrak{K}_v^n \cap U_v$, woraus die Behauptung folgt.

Umgekehrt werde jedem S–Divisor $\mathfrak{a}$ eine Teilmenge $\mathfrak{a}_S := \{x \in A \mid \operatorname{div} x = \mathfrak{a}\} \subset A$ des Standardappartements zugeordnet.

Es ist $A = \bigcup_{\mathfrak{a}} \mathfrak{a}_S$ und nach dem **Lemma** ist

$$A(n) = \bigcup_{\deg \mathfrak{a} \geq n} \mathfrak{a}_S$$

Die Untergruppe $U_S(\mathfrak{a}) := \{\left(\begin{smallmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \mid \operatorname{ord}_v u + \operatorname{ord}_v \mathfrak{a} \geq 0, v \in S\} \subset U_S$ operiert trivial auf $\mathfrak{a}_S$.

Nach Eigenschaft (2) der n–Funktion ist $n(x.u, B) = n(x, B)$; andererseits ist $X = A.U_S$, also

$$X_B(q^n) = A(n).U_S$$

Aus dem Satz von Riemann-Roch folgt für $\deg \mathfrak{a} > 2g - 2$ [14, VI, Th. 2, Cor. 3]:

$$U_S = U_S(\mathfrak{a}).(\Gamma \cap U_F)$$

Damit haben wir bewiesen:

Satz. $\quad X'_B = A(n_2).(\Gamma \cap U_F)\ , \qquad Y'_B = A(n_2)/(\Gamma \cap T_F).$

Ich gebe jetzt noch ein Fundamentalgebiet für die Standardspitze an. Wir identifizieren $\mathcal{O}_S^\times \simeq \Gamma \cap T_F$. Wie oben beschrieben, operiert ein $t \in \mathcal{O}_S^\times$ durch Addition des S–Divisors $2 \operatorname{div}_S t$. Es sei $\Lambda := 2 \operatorname{div}(\mathcal{O}_S^\times) \subset Div_S$, das ist eine freie abelsche Gruppe vom Rang $|S| - 1$. Wenn wir die Divisorengruppe $Div_S = \mathbf{Z}^S$ identifizieren, gibt es eine Basis von Λ der folgenden Form (mit $r = |S| - 1$) :

$$\begin{array}{rcl} \lambda_1 & = & (a_1, *, *, \ldots, \ldots) \\ \lambda_2 & = & (0, a_2, *, \ldots, \ldots) \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_r & = & (0, 0, \ldots, 0, a_r, *) \end{array}$$

wobei die $a_i \in \mathbf{N}$ sind. Dann ist

$$D := \{x = (x_1, \ldots, x_{r+1}) \in \mathbf{R}^{r+1} \mid 0 \leq x_i < a_i,\ 1 \leq i \leq r,\ \deg x \geq n_2\}$$

ein Fundamentalgebiet. Hier ist $\deg x = \deg(x_1, \ldots, x_{r+1}) = \sum_{i=1}^{r+1} [x_i] \deg v_i$. Die Identifikationen auf dem Rand von $\overline{D}$ sind klar. Beispielsweise ist für $S = \{v, w\}$ und einer Grundeinheit $\varepsilon \in \mathcal{O}_S^\times$ mit $k = \operatorname{ord}_v \varepsilon > 0$

$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leq x < 2k,\ [y] \deg w \geq n_2 - [x] \deg v\}$$

Wenn v, w beide rational sind, ist die Identifikation auf dem Rande von $\overline{D}$ durch $(0, y) \sim (2k, y - 2k)$ gegeben.

Korollar. Die Standardspitze ist homöomorph zu $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{S}_1^r$, wo r der Rang der Einheitengruppe $\mathcal{O}_S^\times$ ist, also $r = |S| - 1$.

Beweis: $A(n_2)$ ist homöomorph einem Halbraum $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^r$, wobei das Gitter Λ auf dem zweiten Faktor operiert, qed.

3.3. Andere Spitzen. Wir wollen das obige Ergebnis auf die übrigen Spitzen übertragen.

Sei $P = c.B.c^{-1}$ mit $c \in C \subset G_F$. Wir müssen uns überlegen, wie die n–Funktion mit c variiert. Nach Definition ist $\mathfrak{K}(x) = \mathfrak{K}_x \times \mathfrak{K}_e$ wo $\mathfrak{K}_e$ das Produkt der $\mathfrak{K}_v^0$ an den Stellen außerhalb S ist, und

$$n(x, P) = \mu_P(\mathfrak{K}_x \times \mathfrak{K}_e \ \cap\ c.U_{\mathbf{A}}.c^{-1}) = \mu_B(\mathfrak{K}_{x.c} \times \mathfrak{K}_e^c \ \cap\ U_{\mathbf{A}}).$$

Für diese Stellen sei $c = k_v.t_v.u_v \in \mathfrak{K}_v^0.T_v.U_v$ die lokale Iwasawa–Zerlegung, und sei $\underline{t}_c \in \mathbf{A}^\times$ das Idel mit den Komponenten 1 bei $v \in S$ und t_v bei $v \notin S$. Hier wird $t = \left(\begin{smallmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{smallmatrix}\right)$ abgekürzt. Da $\mathfrak{K}_v^c \cap U_v = U(t_v^{-2}.\mathfrak{o}_v)$ ist, folgt die Formel

$$n(x, P) = n(x.c, B).|\underline{t}_c|^{-2}$$

Diese Formel erlaubt uns die Zurückführung auf die Standardspitze, und zwar durch ein globales Argument. Zunächst haben wir den Isomorphismus

$$\begin{array}{ccc} X'_P & \longrightarrow & X_B(q^{n_c}) \\ x & \longmapsto & x.c \end{array}$$

wo $n_c := n_2 - 2 \deg \underline{t}_c$. Sei nun

$$G_{\mathbf{A}}^\infty := G_S \times \mathfrak{K}_e\ , \quad B_{\mathbf{A}}^\infty := B_{\mathbf{A}} \cap G_{\mathbf{A}}^\infty.$$

und analog für U, T.

Sei $c = \underline{x}_c \underline{t}_c \underline{u}_c$ die globale (in $G_{\mathbf{A}}$) Zerlegung von c mit $\underline{x}_c \in G_{\mathbf{A}}^\infty$, $\underline{t}_c$ wie oben, $\underline{u}_c \in U_{\mathbf{A}}$ und setze $\underline{b}_c := \underline{t}_c \underline{u}_c$.

Lemma.

(1)

$$\begin{aligned} U_F \cap c^{-1}\Gamma c &= U_F \cap \underline{t}_c^{-1} U_{\mathbf{A}}^\infty \underline{t}_c \\ B_F \cap c^{-1}\Gamma c &= B_F \cap \underline{t}_c^{-1} B_{\mathbf{A}}^\infty \underline{t}_c \end{aligned}$$

(2) Die kanonische exakte Sequenz

$$1 \longrightarrow U_F \longrightarrow B_F \longrightarrow T_F \longrightarrow 1$$

enthält die exakte Sequenz von Untergruppen

$$1 \longrightarrow U_F \cap c^{-1}\Gamma c \longrightarrow B_F \cap c^{-1}\Gamma c \longrightarrow T_F \cap \Gamma \longrightarrow 1$$

(3) Für jeden S–Divisor $\mathfrak{a}$ vom Grad $\geq n_c$ ist

$$U_S = U_S(\mathfrak{a}).(U_F \cap c^{-1}\Gamma c)$$

Beweis: (1) folgt aus $\Gamma = G_F \cap G_{\mathbf{A}}^\infty$.

(2) Für $b = t.u \in B_F = T_F.U_F$ ist

$$\underline{b}_c.b.\underline{b}_c^{-1} = t.\underline{u}' \qquad \text{mit} \quad \underline{u}' \in U_{\mathbf{A}}.$$

Wenn $b \in B_F \cap c^{-1}\Gamma c$, so also $t \in \Gamma$ nach (1). Die untere Sequenz in (2) ist also sinnvoll. Der Kern ist ebenfalls klar. Sei $t \in \Gamma \cap T_F \subset T_{\mathbf{A}}^\infty$. Es ist $u \in U_F$, $\underline{u}' \in U_{\mathbf{A}}^\infty$ zu finden, so daß obige Gleichung gilt. Nach starker Approximation ist (vgl. §7.3)

$$U_{\mathbf{A}} = (\underline{t}_c^{-1} U_{\mathbf{A}}^\infty \underline{t}_c).U_F \qquad ; \text{ man zerlege:}$$

$$t^{-1}\underline{u}_c t \underline{u}_c^{-1} = (\underline{t}_c^{-1}\underline{u}'\underline{t}_c).u^{-1} \qquad , \text{ fertig.}$$

(3) Sei $\underline{t}$ ein S–Idel mit Divisor $\mathfrak{a}$, da $\deg \underline{t}.\underline{t}_c^2 \geq n_2 > 2g-2$ ist nach Riemann-Roch [14, VI, Th. 2, Cor. 3] mit $\mathfrak{o} := \prod \mathfrak{o}_v$

$$U_{\mathbf{A}} = U(\underline{t}^{-1}\underline{t}_c^{-2}\mathfrak{o}).U_F$$

also auch

$$\underline{t}_c^{-1} U_{\mathbf{A}}^\infty \underline{t}_c = U(\underline{t}^{-1}\underline{t}_c^{-2}\mathfrak{o}).(U_F \cap \underline{t}_c^{-1} U_{\mathbf{A}}^\infty \underline{t}_c)$$

und (3) ist die S–Komponente hiervon.

Mit diesem Lemma sind die weiteren Schritte ganz mechanisch. Aus (3) folgt wie beim Satz in 3.2

$$X_B(q^{n_c}) = A(n_c).(U_F \cap c^{-1}\Gamma c)$$

und da $X_P' = X_B(q^{n_c}).c^{-1}$ ist, folglich $X_P' = A(n_c)c^{-1}.(R_u(P)_F \cap \Gamma)$.

Nach 3.1 ist für die c–Spitze mit (2)

$$Y_c' = X_P'/P_F \cap \Gamma = A(n_c)c^{-1}/c(T_F \cap \Gamma)c^{-1} \simeq A(n_c)/T_F \cap \Gamma \simeq \mathbf{R}_+ \times \mathbf{S}_1^r$$

3.4. Spitzenzerlegung für Kongruenzuntergruppen. Es sei $\mathfrak{m} \neq 0$ ein Ideal von $\mathcal{O}_S$ (d.h. ein Divisor fremd zu S) und

$$\Gamma_{\mathfrak{m}} := \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma \equiv 1 \mod \mathfrak{m}\}$$

die Kongruenzuntergruppe von Γ. Dieser Abschnitt legt einige Notationen fest und zeigt, daß sich beim Übergang von Γ zu $\Gamma_{\mathfrak{m}}$ „nichts ändert“.

Sei $Y_{\mathfrak{m}} := X/\Gamma_{\mathfrak{m}}$, $f_{\mathfrak{m}} : X \longrightarrow Y_{\mathfrak{m}}$ die Projektion. $Y_{\mathfrak{m},P}' := f_{\mathfrak{m}}(X_P')$ heißt wieder Spitze. Sei $C_{\mathfrak{m}} \subset G_F$ ein Repräsentantensystem der $\Gamma_{\mathfrak{m}}$–Konjugationsklassen der Borelgruppen. Der ganze Abschnitt 3.1 überträgt sich auf die neue Situation und wir erhalten eine disjunkte Zerlegung

$$Y_{\mathfrak{m}} = M_{\mathfrak{m}} \cup \bigcup_{c \in C_{\mathfrak{m}}} Y_{\mathfrak{m},c}'$$

mit kompaktem $\overline{M_{\mathfrak{m}}}$ und $Y_{\mathfrak{m},c}' = X_P'/\Gamma_{\mathfrak{m}} \cap P_F$, wo $P = cBc^{-1}$.

Wenn wir $n_2 > 2g - 2 + \deg \mathfrak{m}$ gewählt haben, sagt uns der Riemann–Roch wie im Satz im Abschnitt 3.2

$$X_B(q^{n_2}) = A(n_2).(\Gamma_{\mathfrak{m}} \cap U_F)$$

und die Standardspitze ist wieder

$$Y_{\mathfrak{m},B}' \simeq \mathbf{R}_+ \times \mathbf{S}_1^r.$$

Die Formel für die n–Funktion in Abschnitt 3.3 ändert sich nicht. Die Aussagen des Lemmas 3.3 modifizieren sich wie folgt. Sei

$$G_{\mathbf{A}}^\infty(\mathfrak{m}) := G_S \times \mathfrak{K}_e(\mathfrak{m}) \ , \quad B_{\mathbf{A}}^\infty(\mathfrak{m}) := B_{\mathbf{A}} \cap G_{\mathbf{A}}^\infty(\mathfrak{m}).$$

mit $\mathfrak{K}_e(\mathfrak{m}) \subset \mathfrak{K}_e$ die Kongruenzuntergruppe.

Für $\mathfrak{m} \neq 1$ (d.h. $\mathfrak{m} \neq \mathcal{O}_S$) ist nun aber $G_{\mathbf{A}}^\infty(\mathfrak{m})B_{\mathbf{A}} \neq G_{\mathbf{A}}$, d.h. es gibt mehrere $G_{\mathbf{A}}^\infty(\mathfrak{m})$–*Geschlechter* von Borelgruppen, während für $\mathfrak{m} = 1$ ja gilt $G_{\mathbf{A}} = G_{\mathbf{A}}^\infty B_{\mathbf{A}}$. Die Menge dieser Geschlechter ist $G_{\mathbf{A}}^\infty(\mathfrak{m})\backslash G_{\mathbf{A}}/B_{\mathbf{A}}$.

Es ist $\Gamma_{\mathfrak{m}} = G_F \cap G_{\mathbf{A}}^{\infty}(\mathfrak{m})$ und die natürliche Abbildung

$$\Gamma_{\mathfrak{m}} \backslash G_F / B_F \longrightarrow G_{\mathbf{A}}^{\infty}(\mathfrak{m}) \backslash G_{\mathbf{A}} / B_{\mathbf{A}}$$

ordnet jeder Spitze ein Geschlecht zu. Sie ist surjektiv, weil $G_{\mathbf{A}} = G_{\mathbf{A}}^{\infty}(\mathfrak{m}) G_F$ (starke Approximation, vgl. §7.3). Insbesondere ist $G_{\mathbf{A}}^{\infty} = G_{\mathbf{A}}^{\infty}(\mathfrak{m})\Gamma$.

Die Gruppe $\Gamma/\Gamma_{\mathfrak{m}} = G_{\mathbf{A}}^{\infty}/G_{\mathbf{A}}^{\infty}(\mathfrak{m})$ enthält $\Gamma_0(\mathfrak{m})/\Gamma_{\mathfrak{m}} = B_{\mathbf{A}}^{\infty}/B_{\mathbf{A}}^{\infty}(\mathfrak{m})$, wo $\Gamma_0(\mathfrak{m}) = \Gamma \cap G_{\mathbf{A}}^{\infty}(\mathfrak{m}) B_{\mathbf{A}}^{\infty}$ die Hecke–Gruppe ist (Matrizen $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ mit $c \equiv 0 \mod \mathfrak{m}$). Somit haben wir

$$G_{\mathbf{A}} = \bigcup_{\gamma \in \Gamma/\Gamma_0(\mathfrak{m})} G_{\mathbf{A}}^{\infty}(\mathfrak{m}).\gamma.B_{\mathbf{A}}$$

Wenn $C_{\mathfrak{m}}^1$ die Spitzen im Hauptgeschlecht repräsentiert, läßt sich

$$C_{\mathfrak{m}} = \bigcup_{\gamma \in \Gamma/\Gamma_0(\mathfrak{m})} \gamma C_{\mathfrak{m}}^1$$

wählen.

Übrigens ist $C_{\mathfrak{m}}^1 \simeq G_{\mathbf{A}}^{\infty}(\mathfrak{m}) \backslash G_{\mathbf{A}}^{\infty}(\mathfrak{m}) B_{\mathbf{A}} / B_F \simeq B_{\mathbf{A}}^{\infty}(\mathfrak{m}) \backslash B_{\mathbf{A}} / B_F \simeq T_{\mathbf{A}} / T_{\mathbf{A}}^{\infty}(\mathfrak{m}) T_F$ („Strahlklassengruppe").

Für $c \in C_{\mathfrak{m}}^1$ sei $c = \underline{x}_c.\underline{b}_c = \underline{x}_c.\underline{t}_c.\underline{u}_c$ mit $\underline{x}_c \in G_{\mathbf{A}}^{\infty}(\mathfrak{m})$, dann ist offenbar

$$U_F \cap c^{-1}\Gamma_{\mathfrak{m}} c = U_F \cap \underline{t}_c^{-1} U_{\mathbf{A}}^{\infty}(\mathfrak{m}) \underline{t}_c$$

$$B_F \cap c^{-1}\Gamma_{\mathfrak{m}} c = B_F \cap \underline{b}_c^{-1} B_{\mathbf{A}}^{\infty}(\mathfrak{m}) \underline{b}_c$$

und der Quotient dieser beiden Gruppen ist $T_F \cap \Gamma_{\mathfrak{m}}$. Jetzt (spätestens) ist klar, daß der Rest wie für $\mathfrak{m} = 1$ funktioniert.

4. Quadratisch integrierbare Kohomologieklassen

4.1. Kokettenkomplex, Randoperator. X und Y (resp. $Y_{\mathfrak{m}}$) sind in natürlicher Weise CW-Räume. Wir versehen X mit einer *Orientierung*, indem wir S total ordnen; auf jedem Faktor haben wir eine kanonische Orientierung.

Der *Zellenkomplex* von X ist das Produkt der Titskomplexe $Z_X = \prod_{v \in S} Z_v$. Für $R \subset S$ setze $Z_X^R = \prod_{v \in R} Z_v^1 \times \prod_{v \notin R} Z_v^0$, für diese Zellen sagen wir auch R–Zellen. Analog bezeichne

$$Z_X^r = \bigcup_{R \subset S, \mathrm{card}(R) = r} Z_X^R$$

die Menge der r–Zellen ($0 \leq r \leq \mathrm{card}(S)$). Auf dem Zellenkomplex operiert Γ und der Zellenkomplex von Y ist einfach $Z_Y = Z_X/\Gamma$. Der *Kettenkomplex* mit Koeffizienten $\mathbf{Z}$ ist

$$C_*(X) = \coprod_{z \in Z_X^*} \mathbf{Z}.z$$

Der *Kokettenkomplex* mit Koeffizienten M ist

$$C^*(X, M) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(C_*(X), M) = C(Z_X^*, M).$$

Analoge Definitionen für Y. Offenbar ist dann

$$C^*(Y, M) = C^*(X, M)^{\Gamma} \subset C^*(X, M)$$

Im Abschnitt 2.3 haben wir $\partial_v^0, \partial_v^1$ definiert. Mit unserer Wahl der Orientierung ist der Randoperator an der Stelle v für eine R–Zelle

$$\partial_v z = \epsilon_v(R)\big((\cdots, \partial_v^0 z_v, \cdots) - (\cdots, \partial_v^1 z_v, \cdots)\big)$$

mit dem Vorzeichen $\epsilon_v(R) = (-1)^k \quad , \qquad k = \mathrm{card}\{w \in R \mid w < v\}$

Es ist dann

$$\partial_v \partial_w + \partial_w \partial_v = 0 \quad , \qquad \partial\partial = 0 \ , \qquad \partial := \sum_{v \in S} \partial_v .$$

Auf dem Kokettenkomplex hat man die Transponierte d_v:

$$(d_v \varphi)(c) := \varphi(\partial_v c)$$

und es gelten die gleichen Relationen

$$d_v d_w + d_w d_v = 0 \ , \qquad dd = 0 \ , \qquad d = \sum_{v \in S} d_v .$$

Da die ∂_v die Operation von Γ respektieren, bildet der Randoperator d die Γ–invarianten Formen $C^*(Y, M)$ in sich ab.

Die Kohomologie von Y wird durch diesen Kokettenkomplex berechnet:

$$H^*(Y, M) := H^*(C^*(Y, M)).$$

4.2. Korand– und Laplace–Operator. Für r–Formen $\varphi : Z^r_X \longrightarrow \mathbf{C}$ mit kompaktem Träger auf X wird ein Skalarprodukt definiert:

$$(\varphi, \psi)_X := \sum_{z \in Z^r_X} \varphi(z)\overline{\psi(z)}$$

Wenn man $\sum$ als Maß auf Z^r_X interpretiert, so ist auf Z^r_Y eindeutig ein Quotientenmaß definiert, und damit ein Skalarprodukt auf $C^r_{cp}(Y, \mathbf{C})$:

$$(\varphi, \psi)_Y := \sum_{z \in Z^r_Y} \frac{1}{q(z)} \varphi(z)\overline{\psi(z)} \qquad\qquad \varphi, \psi \in C^r_{cp}(Y)$$

mit $q(z) := \mathrm{card}(\Gamma_{\dot z})$, der Ordnung der Fixgruppe von Γ einer Zelle $\dot z$ über z (sie ist unabhängig von der Wahl des Vertreters !).

Diese Skalarprodukte sind jeweils auch definiert, wenn nur eine der Formen kompakten Träger hat. Insbesondere läßt sich der Adjungierte δ zu d auf dem Raum aller Formen definieren. Im Prinzip müßte man δ_X und δ_Y unterscheiden, es ist aber $\delta_Y = \delta_X | C^*(Y)$, denn $(\delta_X \varphi, \psi)_Y = (\delta_X \varphi, \psi_0)_X = (\varphi, d\psi_0)_X = (\varphi, d\psi)_Y = (\delta_Y \varphi, \psi)_Y$ wo $\psi_0 \in C^*_{cp}(X)$ eine Liftung von ψ ist, d.h. $\psi(f(z)) = \sum_{\gamma \in \Gamma} \psi_0(z\gamma)$.

Analog sei δ_v der Adjungierte zu d_v. Dann ist natürlich wieder

$$\delta_v \delta_w + \delta_w \delta_v = 0 \ , \qquad \delta\delta = 0 \ , \qquad \delta = \sum_{v \in S} \delta_v .$$

Es gilt jetzt sogar:

Lemma. *Für $v \neq w$ ist $\delta_v d_w + d_w \delta_v = 0$.*

Bevor ich das Lemma beweise, gebe ich eine explizite Formel für δ_v an.

Setze $\psi = \chi_z$ die charakteristische Funktion einer R–Zelle $z \in Z^R_X$. Dann gilt $(\delta_v \varphi)(z) = (\varphi, d_v \psi)$, also

$$(\delta_v \varphi)(z) = \epsilon_v(R)\big(\sum_{\partial^0_v z' = z} \varphi(z') - \sum_{\partial^1_v z' = z} \varphi(z') \big)$$

In der Klammer steht tatsächlich nur eine der beiden Summen, weil entweder z_v ein Vertex vom Typ $\mathfrak{K}^0_v$ oder vom Typ $\mathfrak{K}^1_v$ ist.

Beweis des Lemmas. Sowohl $\delta_v d_w \varphi(z)$ als auch $d_w \delta_v \varphi(z)$ sind Summen von Termen der Form $\pm\varphi(z')$, wobei jedes Mal über die gleichen z' summiert wird. Die

Vorzeichen sind $\epsilon_v(R).\epsilon_w(R \cup \{v\})\varepsilon$ resp. $\epsilon_w(R).\epsilon_v(R - \{w\})\varepsilon$ ($\varepsilon = \pm 1$, wenn z_v vom Typ $\mathfrak{K}_v^0$ resp. $\mathfrak{K}_v^1$), und ihre Summe ist 0.

Der Operator $\Delta_v = d_v\delta_v + \delta_v d_v$ ist der *Laplace–Operator* an der Stelle v und $\Delta = d\delta + \delta d$ ist der *Laplace–Operator* von X.

Eine Form ω mit $\Delta\omega = 0$ heißt *harmonisch*.

Nach Konstruktion sind alle Laplace–Operatoren positiv und selbstadjungiert. Wegen der eben bewiesenen Vertauschungsregeln ist $\Delta = \sum_{v \in S} \Delta_v$ (vgl. auch Borel [1]).

4.3. Quadratisch integrierbare Formen. Es bezeichne $C_2^*(Y) \subset C^*(Y)$ den Hilbertraum der quadratisch integrierbaren Formen.

Lemma. *$dC_2^*(Y) \subset C_2^*(Y)$ und d ist stetig auf $C_2^*(Y)$. Ebenso für δ, Δ und die lokalen Operatoren.*

Beweis: Es genügt für d_v eine Abschätzung der Gestalt

$$(d_v\varphi, d_v\varphi) \leq A(\varphi, \varphi)$$

anzugeben, mit einer Konstanten A. Es ist $|d_v\varphi(z)|^2 \leq (|\varphi(z_0)|^2 + |\varphi(z_1)|^2)$ mit gewissen Seitenzellen z_0, z_1 von z. Nun ist natürlich $q(z_0)/q(z) \leq \mathrm{N}v + 1$, da $\Gamma_{z_0}/\Gamma_z \hookrightarrow \mathfrak{K}_{z_0}/\mathfrak{K}_z \simeq \mathfrak{K}_v/\mathfrak{I}_v$, und das liefert die gewünschte Abschätzung. Ferner ist klar, daß $\delta = d^*$ der Adjungierte von d im Hilbertraum – Sinne ist, denn $(d\varphi, \psi)_Y = (\varphi, \delta\psi)_Y$ gilt für Formen mit kompakten Trägern und $C_{cp}^*(Y)$ liegt dicht in $C_2^*(Y)$. Daraus folgt unser Lemma.

Satz 1. *Der Raum der quadratisch integrierbaren Formen hat die „Hodge – Zerlegung" in orthogonale Teilräume*

$$C_2^*(Y) = \mathbf{H}_2^* \oplus \overline{dC_2^*} \oplus \overline{\delta C_2^*}$$

wo $\mathbf{H}_2^* := \{\omega \in C_2^*(Y) \mid \Delta\omega = 0\}$ der Raum der harmonischen quadratisch integrierbaren Formen auf Y ist.

Beweis: Die Orthogonalität der Räume folgt aus den Adjunktionsformeln. Aus $(\Delta\omega, \omega)_Y = (d\omega, d\omega)_Y + (\delta\omega, \delta\omega)_Y$ folgt, daß eine Form harmonisch ist genau dann, wenn sie geschlossen und kogeschlossen ist. Wenn schließlich $\omega \in (dC_2^* + \delta C_2^*)^\perp$, so ist $(\delta\omega, \delta\omega) = (d\delta\omega, \omega) = 0$ und $(d\omega, d\omega) = (\delta d\omega, \omega) = 0$, also ω harmonisch, qed.

Der folgende Satz erlaubt einen Vergleich mit den Kohomologiegruppen:

Satz 2 $\qquad \overline{dC_2^*(Y)} \subset dC^*(Y)$

Beweis: Sei $r \geq 1$, $\varphi \in \overline{dC_2^r(Y)}$, gesucht ist ein $\psi \in C^r(Y)$ mit $d\psi = \varphi$. Sei also $\varphi_n \in dC_2^r(Y)$ eine Folge mit $\varphi_n \to \varphi$ im Hilbertraum. Dann folgt $\forall z \quad \varphi_n(z) \to \varphi(z)$ in $\mathbf{C}$, also auch $\forall c \in C_{r+1}(Y) \quad \varphi_n(c) \to \varphi(c)$.

Die Kette $c \in C_{r+1}(Y)$ sei ein Zykel: $\partial c = 0$, dann ist für $\varphi_n \in dC_2^r(Y) : \varphi_n(c) = 0$, also im Limes $\varphi(c) = 0$. Das Verschwinden auf den Zykeln bedeutet, daß φ über ∂C_{r+1} faktorisiert:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & Z_{r+1} \arrow[r] & C_{r+1} \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "\varphi"'] & C_r \arrow[dl, dashed, "\psi"] \\ & & \mathbf{C} & \end{tikzcd}$$

Mit ψ ist irgendeine Fortsetzung bezeichnet, die das Diagramm kommutativ macht. Das bedeutet aber gerade : $\varphi = d\psi$! qed.

Bemerkung : Man kann zeigen, daß sich ψ quadratisch integrierbar wählen läßt: $\overline{dC_2^*(Y)} = dC_2^*(Y)$. Hiervon mache ich aber keinen Gebrauch (vgl. Harder [7], Korollar (3.1.5)).

Wir nennen eine Kohomologieklasse quadratisch integrierbar, wenn sie eine quadratisch integrierbare Form enthält.

Satz 3. *Jede Kohomologieklasse ist quadratisch integrierbar.*

Beweis: Sei $\xi = [\varphi] \in H^r(Y)$ eine Kohomologieklasse, $\varphi \in C^r(Y)$, $d\varphi = 0$, ein Repräsentant.

Zunächst sei $r = s = \mathrm{card}(S)$.

Wir haben $Y = \overline{M} \cup Y'$ mit kompaktem $\overline{M}$ und für jede Zusammanhangskomponente $Y'_c \subset Y'$ gilt $Y'_c \simeq \mathbf{R}_+ \times \mathbf{S}_1^{s-1}$ nach §3. Folglich verschwinden die höchsten Kohomologiegruppen der Spitzen $H^s(Y') = 0$. Aus der langen exakten Kohomologiesequenz des Paares (Y, Y') entnehmen wir das Stück

$$\cdots \longrightarrow H^s(Y, Y') \longrightarrow H^s(Y) \longrightarrow H^s(Y') = 0.$$

Wir dürfen also annehmen, daß φ seinen Träger in $\overline{M}$ hat und damit sicherlich quadratisch integrierbar ist.

Sei nun $r = 0$.

ξ ist also eine Konstante. Wir müssen sehen, daß

$$(1,1)_Y = \sum_{z \in Z_Y^0} \frac{1}{q(z)}$$

konvergiert.

Bis auf endlich viele Summanden liegen die Zellen in den Spitzen, so daß es genügt, das Wachstum der Fixgruppenordnungen $q(x) = \mathrm{card}(\Gamma_x)$ für $x \in X'_B$ zu untersuchen. Es ist

$$\Gamma_x = \Gamma \cap \mathfrak{K}_x$$

und

$$\mathfrak{K}_x = \prod_{v \in S} \mathfrak{K}_v^{n_v}$$

wenn $\mathrm{div}\, x = \sum_{v \in S} n_v v$ (siehe 3.2). Für $d = \deg \mathrm{div}\, x > 2g - 2$ ist $\Gamma_x \subset B_\infty$ und nach Riemann–Roch ist :

$$q(x) = (q-1)q^{d+1-g}.$$

Die Reihe konvergiert also, weil die Anzahl der Zellen mit demselben d unterhalb einer festen Schranke liegt.

Sei schließlich $0 < r < s$.

Wir halten eine Stelle $v \in S$ fest. Durch einen elementaren Integrationsprozeß werden wir die Form φ auf den Spitzen teilweise beranden :

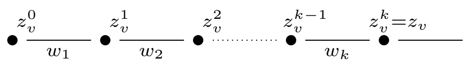
$(*)$ $\quad \exists \quad \psi \in C^{r-1}(Y) \quad$ mit der Eigenschaft:

$$\forall\, R \subset S,\ v \in R, \forall z \in Z_{Y'}^R \qquad \varphi(z) = d\psi(z).$$

Es genügt offenbar, ψ auf einer Spitze Y'_c zu konstruieren.

Wir schreiben die Zellen in der Form $z = (z', z_v)$. Wenn z_v eine 1-Zelle ist, setze $\psi(z) = 0$.

Andernfalls betrachte die eindeutig bestimmte Geodäte in X_v durch die Vertices



so daß die Zelle (z', z_v^0) auf dem Rand der Spitze Y_c' liegt. Setze dann

$$\psi(z) = \sum_{i=1}^{k} (-1)^i \varphi(z', w_i)$$

wo $w_i =< z_v^{i-1}, z_v^i >$ die verbindende 1–Zelle ist. Es ist dann klar, daß $(*)$ bei passender Wahl des Vorzeichens gilt.

Ich behaupte jetzt, daß die zu φ kohomologe Form $\varphi' = \varphi - d\psi$ quadratisch integrierbar ist.

Wenn $z = (z', z_v)$ in einer Spitze liegt und z_v eine 0–Zelle ist, so betrachte einen Nachbarpunkt z_v':

$$\bullet^{z_v} \underset{w}{\text{———}} \bullet^{z_v'}$$

$\varphi'(z', z_v') - \varphi'(z', z_v) = \pm d\varphi'(z', w) = 0$, d.h. φ' ist in der Variablen v auf jeder Spitze konstant. Die gleiche Schlußweise wie für die Konstanten $(r = 0)$ ergibt jetzt die quadratische Integrierbarkeit von φ'. q.e.d.

Nach **Satz 1** und **Satz 2** schreibt sich eine quadratisch integrierbare geschlossene Form φ als $\varphi = \omega + d\psi$ mit ω harmonisch und quadratisch integrierbar. Aus **Satz 3** erhalten wir das folgende

Korollar. *Jede Kohomologieklasse in $H^*(Y)$ besitzt einen quadratisch integrierbaren harmonischen Repräsentanten und :*

$$H^*(Y) \simeq \mathbf{H}_2^*.$$

Es ist auch klar, daß sich die Ergebnisse dieses Abschnittes auf die Kongruenzuntergruppen übertragen : insbesondere enhält jede Kohomologieklasse in $H^*(Y_\mathfrak{m})$ eine quadratisch integrierbare harmonische Form.

5. Verschwindungssätze für rationale Kohomologie

5.1. ***S*–arithmetische Gruppen.** Wir schreiben jetzt wieder Γ_S statt Γ für $SL_2(\mathcal{O}_S)$.

Eine Untergruppe $\Gamma \subset G_F$ heißt *S–arithmetisch*, wenn Γ mit Γ_S kommensurabel ist, d.h. $\Gamma \cap \Gamma_S$ hat endlichen Index in Γ und Γ_S.

In folgenden nehmen wir an, daß die Anzahl der Stellen $s = \mathrm{card}(S) \geq 2$ ist. Nach Serre [11, th. 2, cor. 3] gibt es dann zu jeder S–arithmetischen Gruppe Γ ein Ideal $\mathfrak{m}$ von $\mathcal{O}_S$ mit $\Gamma_\mathfrak{m} \subset \Gamma$. Die Gruppe $\Gamma_\mathfrak{m}$ wird von den Γ_S–Konjugierten der Gruppe $\Gamma_\mathfrak{m} \cap U_F$ erzeugt (loc.cit.).

Die abelsch gemachte Gruppe $\Gamma^{ab} = \Gamma/[\Gamma, \Gamma]$ einer S–arithmetischen Gruppe Γ ist endlich [11, th. 3, cor] und somit

$$H^1(\Gamma, \mathbf{Q}) = \mathrm{Hom}(\Gamma^{ab}, \mathbf{Q}) = 0.$$

Dies können wir jetzt verallgemeinern:

Satz. *Γ sei eine S–arithmetische Gruppe in G_F und M eine endlichdimensionale rationale Darstellung von Γ. Für $r \neq 0, s$ ist dann*

$$H^r(\Gamma, M) = 0.$$

Beweis: Zunächst zeigen wir, daß es genügt, $H^r(\Gamma_\mathfrak{m}, \mathbf{Q}) = 0$ zu beweisen.

Nach [11, th. 3, th. 4] ist nämlich der Kern der Darstellung $\rho : \Gamma \longrightarrow GL_{\mathbf{Q}}(M)$ eine S–arithmetische Gruppe. Nach dem vorgehenden gibt es also ein Ideal $\mathfrak{m} \neq 0$ mit $\Gamma_{\mathfrak{m}} \subset \Gamma$ und trivialer Operation auf M . Da die Restriktionsabbildung

$$\mathrm{Res} : H^r(\Gamma, M) \longrightarrow H^r(\Gamma_{\mathfrak{m}}, M)$$

injektiv ist [10, VII, §7, prop. 6], genügt wegen

$$H^r(\Gamma_{\mathfrak{m}}, M) = H^r(\Gamma_{\mathfrak{m}}, \mathbf{Q}) \oplus \cdots \oplus H^r(\Gamma_{\mathfrak{m}}, \mathbf{Q}) \ , \quad d = \dim_{\mathbf{Q}} M \text{ Summanden,}$$

der Beweis für $\Gamma = \Gamma_{\mathfrak{m}}, M = \mathbf{Q}$.

Nun ist nach dem Vergleichssatz in §2.2

$$H^r(\Gamma_{\mathfrak{m}}, \mathbf{Q}) \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{C} = H^r(\Gamma_{\mathfrak{m}}, \mathbf{C}) = H^r(X/\Gamma_{\mathfrak{m}}, \mathbf{C}) = H^r(Y_{\mathfrak{m}}, \mathbf{C})$$

und nach §4.3 besitzt jede Kohomologieklasse $\xi \in H^r(Y_{\mathfrak{m}})$ einen quadratisch integrierbaren harmonischen Repräsentanten ω: $\xi = [\omega]$. Wir werden $\omega = 0$ zeigen, indem wir aus der Harmonizität zunächst auf das Verschwinden in den Spitzen schließen und dann mittels der Mittelwerteigenschaft harmonischer Formen auf das Verschwinden im Innern.

5.2. Das Verschwinden auf der Spitze. Sei z eine I–Zelle in einer Spitze; nach 3.3 können wir die Standardspitze nehmen. Für die folgende Betrachtung identifizieren wir : das Appartement $A = \mathbf{R}^s$, die Zellenstruktur wird durch das Gitter $\mathbf{Z}^s$ gegeben, die kanonische Basis sei $(e_i)_{i \in S}$; $I \subset \{1, 2, \ldots, s\} = S$ und die Zelle z hat die Form $a_I = \prod_{j \notin I} \{a_j\} \times \prod_{i \in I} (a_i, a_i + 1)$ für ein $a \in \mathbf{Z}^s$ von großem Grad $\deg a = \sum a_i \deg v_i \geq n_2$.

Nun ist

$$0 = (\Delta\omega, \omega)_Y = \sum_{v \in S} (\Delta_v \omega, \omega)_Y = \sum_{v \in S} \big((d_v \omega, d_v \omega)_Y + (\delta_v \omega, \delta_v \omega)_Y \big)$$

also

$$\forall \quad v \in S \qquad d_v \omega = 0 \quad \text{und} \quad \delta_v \omega = 0 \quad .$$

Wir definieren $\omega_I(a) := \omega(a_I)$ für $a \in \mathbf{Z}^s$ von großem Grad. Aus $d_v \omega = 0$ für $v \notin I$ folgt dann sofort

(1) $$\omega_I(a) = \omega_I(a + e_j) \qquad\qquad j \notin I.$$

Um zu sehen, was die Harmonizität für $i \in I$ impliziert, sei ψ die charakteristische Funktion der $(I - \{i\})$–Zelle $(a + e_i)_{I - \{i\}}$.

Der Träger von $d_i \psi$ ist $\{a_I, (a + e_i)_I\}$:

$$\overset{a_i}{\bullet} \!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\! \overset{a_i+1}{\bullet} \!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\! \overset{a_i+2}{\bullet}$$

Die Fixgruppenordnungen einer Zelle a_I in der Standardspitze hängt nur vom Grad des Divisors des Punktes a ab (Lemma in 3.2). Genauer:

Sei $\underline{t}$ ein Idel mit $\underline{t} = (t_\infty, \underline{t}_e)$, $\operatorname{div} a = \operatorname{div} t_\infty, \operatorname{div} \underline{t}_e = \mathfrak{m}^{-1}$, so ist für $\mathfrak{m} \neq 1$ (echte Kongruenzuntergruppe)

$$\Gamma_{\mathfrak{m}, a} = \Gamma_{\mathfrak{m}} \cap \mathfrak{K}_a = G_F \cap U(\underline{t}^{-1} \mathfrak{o})$$

mit $\mathfrak{o} := \prod_v \mathfrak{o}_v$ über alle Stellen, und $q(a_I) = q^{\deg \underline{t} + 1 - g}$. Für $\mathfrak{m} = 1$ tritt noch der Faktor $q - 1 = \operatorname{card}(\mathbf{F}_q^\times)$ auf. Folglich ist der Quotient $q((a + e_i)_I)/q(a_I) = q^{\deg v_i} =: q_i$.

Nun ist nach Definition (das genaue Vorzeichen interessiert nicht) $(d_i \psi)(a_I) = (d_i \psi)((a + e_i)_I) = \pm 1$ und damit wird

$$0 = (\delta_i \omega, \psi)_Y = (\omega, d_i \psi)_Y = \pm \Big(\frac{1}{q(a_i)} \omega_I(a) + \frac{1}{q((a + e_i)_I)} \omega_I(a + e_i) \Big),$$

also

(2) $$\omega_I(a+e_i) = -q_i\omega_I(a) \qquad i \in I.$$

Da $1 \leq r = \mathrm{card}(I) \leq s-1$, gibt es wenigstens ein $j \notin I$ und ein $i \in I$.

Sei $\varepsilon \in \mathcal{O}^\times_{\{v_i,v_j\}} \subset \mathcal{O}^\times_S$ eine nichttriviale Einheit mit $\varepsilon \equiv 1 \mod \mathfrak{m}$. Da ω invariant unter $\Gamma_\mathfrak{m}$ ist, folgt aus den beiden Gleichungen **(1), (2)** mit $\lambda = 2\,\mathrm{div}(\varepsilon) \in \mathbf{Z}^s$

$$\omega_I(a) = \omega_I(a+\lambda) = (-q_i)^{2\,\mathrm{ord}_i\,\varepsilon}\omega_I(a)$$

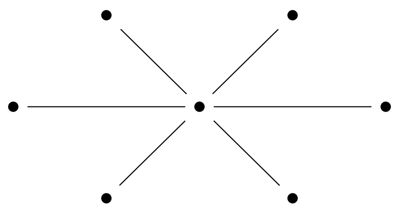
und da $\mathrm{ord}_i\,\varepsilon \neq 0$ folglich $\omega_I(a) = 0$.

Damit ist das Verschwinden in den Spitzen gezeigt.

5.3. Das Verschwinden im Innern. Wir wissen jetzt, daß der Träger der harmonischen Form in der kompakten Menge $\overline{M_\mathfrak{m}}$ liegt. Es gibt also nur endlich viele Zellen mit $\omega(z) \neq 0$. Sei $C := \max|\omega(z)|$ und sei z eine Zelle, in der ω dies Maximum annimmt. Sei v eine Stelle, für die z_v eine 0–Zelle ist. Nun ist

$$0 = \Delta_v\omega(z) = (\delta_v d_v\omega)(z) = \pm\sum d_v\omega(z') = (\mathrm{N}v+1)\omega(z) - \sum \omega(z''),$$

wo in der Summe über die z'' summiert wird, für die $z''_w = z_w (w \neq v)$ und z''_v die Vertices in X_v vom Abstand $= 1$ von z_v durchläuft.



Damit ist dann

$$C \leq |\omega(z)| \leq \frac{1}{\mathrm{N}v+1}\sum|\omega(z'')| \leq C$$

und für jedes z'' muß also $|\omega(z'')| = C$ sein.

Betrachte nun ein z' in einer Spitze, deren Komponenten an den Stellen $w \neq v$ mit z übereinstimmt, und verbinde z mit z' durch eine Geodäte (genauer gesagt, das Bild im Quotienten einer Geodäten zwischen gelifteten Zellen). Wie wir gerade sahen, bleibt $|\omega|$ langs dieser Geodäten konstant $= C$, nach dem letzten § ist diese Konstante $C = 0$. Damit ist der Satz in 5.1 bewiesen.

Teil 2

Das kontinuierliche Spektrum von $L^2(G_{\mathbf{A}}/G_F)$

6. Einleitung

Das allgemeine Problem, mit dem wir uns hier beschäftigen wollen, betrifft einige arithmetische Eigenschaften der Zerlegung einer automorphen Form f in eine Summe aus einer Spitzenform und orthogonalem Komplement

$$f = f_0 + f_1$$

mit f_0 Spitzenform und $f_1 \perp f_0$.

Unter „arithmetischen Eigenschaften" wollen wir speziell Aussagen der folgenden Art verstehen:
„Wenn f ganzzahlige Werte (über $\mathbf{Q}$ oder einer endlichen Erweiterung) hat, so auch f_0 und f_1."

Tatsächlich gelten solche Aussagen nicht allgemein und genau dies Phänomen wollen wir studieren.

Sei also eine automorphe Form

$$f : G_{\mathbf{A}}/G_F \longrightarrow \mathbf{Z}$$

gegeben, die wir als *quadratisch integrierbar* voraussetzen.

$$f = f_0 + f_1$$

sei die orthogonale Zerlegung im Hilbertraum $L^2(G_{\mathbf{A}}/G_F, \mathbf{C})$. Nun hat f_0 einen kompakten Träger, so daß für $\underline{x}$ außerhalb des Trägers der Spitzenform $f_1(\underline{x}) = f(\underline{x}) \in \mathbf{Z}$ ist und wir auch gleich annehmen können, daß f einen kompakten Träger hat.

Eine Formel, die f_1 in Termen von f ausdrückt, wird durch die Theorie der Eisensteinreihen geliefert. Deshalb müssen wir erst einmal etwas ausführlicher an diese Theorie erinnern. Bei den Anwendungen, die wir im Auge haben, interessieren uns nur solche automorphe Formen, die sich (links) unter einer maximal kompakten Untergruppe $\mathfrak{K}$ der Adelegruppe $G_{\mathbf{A}}$ in ganz bestimmter Weise transformieren, nämlich nach solchen Klassen $\kappa \in \mathcal{E}(\mathfrak{K})$, $\kappa = \otimes \kappa_v$, so daß jedes κ_v in $C^\infty(\mathfrak{K}_v/\mathfrak{B}_v)$ vorkommt. Die Eisensteinreihen werden wie bei Langlands [8] gebildet, mit den entsprechenden Modifikationen für den Funktionenkörperfall. Wenn $\forall\ v\ \kappa_v = 1$ (unverzweigter Fall), so findet man eine ausführliche Diskussion für beliebige reduktive Gruppen bei Harder [6]. Für die Gruppe $PGL(2)$ siehe auch Schleich [9]. Hier behandele ich $G = SL(2)$.

Wir diskutieren der Reihe nach

Vorher legen wir noch die verwendeten Bezeichnungen und Maße fest. Ich verwende weitgehend die Schreibweise von Weil [14], insbesondere aus Chapter VI,VII. Zu dem Funktionenkörper $F/\mathbf{F}_q$ ist es oft zweckmäßig auch die nichtsinguläre projektive Kurve $V/\mathbf{F}_q$ zu betrachten. Die Elemente von V sind gerade die Stellen v von F. Das Geschlecht der Kurve wird mit g bezeichnet. Ferner bezeichne $\mathbf{A}$ den Adele–Ring des globalen Körpers und $\mathfrak{o}$ den maximal kompakten Teilring der überall ganzen Adele.

In der maximal kompakten Untergruppe $\mathfrak{K} := G(\mathfrak{o}) \subset G(\mathbf{A})$ wählen wir das normierte Haar–Maß $d\underline{k}$ mit $\mathrm{vol}_{d\underline{k}}(\mathfrak{K}) = 1$. $T_{\mathbf{A}}$ erhält das Haar–Maß $d^\times \underline{t}$ mit der Normierung $\mathrm{vol}_{d^\times \underline{t}}(T_{\mathfrak{o}}) = q-1$. Diese Festlegung ist so gemacht, daß auf der (diskreten)

Picardgruppe $Pic(V/\mathbf{F}_q) = T_{\mathbf{A}}/T_{\mathfrak{o}}T_F$ die gewöhnliche Summation induziert wird. $U_{\mathbf{A}}$ erhält das Tamagawa–Maß $d\underline{u}$ mit $\mathrm{vol}_{d\underline{u}}(U_{\mathbf{A}}/U_F) = 1$. Dann ist $\mathrm{vol}_{d\underline{u}}(U_{\mathfrak{o}}) = q^{1-g}$. $B_{\mathbf{A}}$ erhält das rechtsinvariante Maß $d_r\underline{b} = d\underline{u}\, d^\times\underline{t} = \underline{b}^\alpha\, d^\times\underline{t}\, d\underline{u} = |\underline{t}|^2\, d^\times\underline{t}\, d\underline{u}$. $G_{\mathbf{A}}$ erhält das (invariante !) Haar–Maß $d\underline{x} = d\underline{k}\, d_r\underline{b}$; es ist $\mathrm{vol}_{d\underline{x}}(\mathfrak{K}) = (q-1)q^{1-g}$.

Auf der Gruppe der (nicht notwendig unitären) Charaktere der Idelklassengruppe

$$\Omega = \mathrm{Hom}(\mathbf{A}^\times/F^\times, \mathbf{C}^\times)$$

werden gewisse Linienintegrale betrachtet, die mit einem invariantem Maß gebildet werden und die wir jetzt normieren. Die Zusammenhangskomponente

$$\Omega^\circ = \{\omega_s \mid \omega_s(\underline{t}) = |\underline{t}|^s\ ,\ \underline{t} \in \mathbf{A}^\times\ ,\ s \in \mathbf{C}\}$$

ist isomorph zur multiplikativen Gruppe

$$\begin{array}{ccc} \Omega^\circ & \xrightarrow{\sim} & \mathbf{C}^\times \\ \omega_s & \longmapsto & z = q^{-s} \end{array}$$

und dz/z ist ein invariantes Maß.

Diejenigen Charaktere mit Werten in $|z| = q^{-\sigma}, \sigma \in \mathbf{R}$, nennen wir vom *Realteil* $\mathrm{Re}\ \lambda = \sigma$. Die Untergruppe der unverzweigten Charaktere

$$\Lambda = \mathrm{Hom}(\mathbf{A}^\times/\mathfrak{o}^\times F^\times, \mathbf{C}^\times)$$

hat $h = \mathrm{card}(Pic^0(V/\mathbf{F}_q))$ Zusammenhangskomponenten (die Anzahl der Klassen von Geradenbündel vom Grad 0 ist endlich, es ist die Anzahl rationaler Punkte der Jacobi–Varietät von $V/\mathbf{F}_q$).

Das Maß $d_\sigma\lambda$ auf der kompakten Menge der Charaktere vom Realteil σ sei jetzt so normiert, daß $\mathrm{vol}_{d_\sigma\lambda}(\Lambda_\sigma) = 1$ ist, mit $\Lambda_\sigma = \{\lambda \mid \mathrm{Re}\ \lambda = \sigma\}$.

7. Reduktionstheorie

7.1. 1. Reduktionssatz. Die Reduktionstheorie ist mehr oder weniger identisch mit dem Minkowski'schen Gitterpunktsatz in der Adele–Sprache. Die allgemeine Theorie steht bei Harder [5]. Unsere Situation ist hier aber so speziell. daß wir direkt argumentieren wollen.

Definition. Sei zu $d \in \mathbf{Z}$

$$B_{\mathbf{A}}(d) := \left\{ \underline{b} = \begin{pmatrix} \underline{t} & * \\ 0 & \underline{t}^{-1} \end{pmatrix} \in B_{\mathbf{A}} \mid \deg \underline{t} \geq d \right\}.$$

Reduktionssatz.

$$G_{\mathbf{A}} = \mathfrak{K} B_{\mathbf{A}}(-g) G_F$$

Beweis: Wir bedienen uns der geometrischen Terminologie („Bündel“), verwenden aber die Adele–Technik („Gitter“), vgl. Weil [14]. Dort wird der Satz von Riemann–Roch für Vektorbündel auf $V/\mathbf{F}_q$ bewiesen, das sind lokalfreie, offene und kompakte $\mathfrak{o}$–Moduln (i.e. kohärente „Gittersysteme“ in [14, VI, p. 97]). Wir benötigen den Satz hier für Rang 2.

Betrachte zu $\underline{x} \in GL(2, \mathbf{A})$ das zugehörige Ebenenbündel

$$\mathcal{F}(\underline{x}) = \underline{x}^{-1}(\mathfrak{o} \oplus \mathfrak{o}) \subset \mathbf{A} \oplus \mathbf{A} = \mathbf{A}e_1 + \mathbf{A}e_2$$

und seien

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{L}(\underline{x}) & = & \mathcal{F}(\underline{x}) \cap \mathbf{A}e_1 \\ \mathcal{L}'(\underline{x}) & = & \mathrm{pr}_2\big(\mathcal{F}(\underline{x})\big) \subset \mathbf{A}e_2 \end{array}$$

das Unter- resp. Quotienten–Geradenbündel von $\mathcal{F}(\underline{x})$ zur Sequenz

$$0 \to \mathbf{A}e_1 \longrightarrow \mathbf{A}e_1 + \mathbf{A}e_2 \longrightarrow \mathbf{A}e_2 \to 0$$

also

$$0 \to \mathcal{L}(\underline{x}) \longrightarrow \mathcal{F}(\underline{x}) \longrightarrow \mathcal{L}'(\underline{x}) \to 0$$

Mit $\underline{x} = \underline{k}.\begin{pmatrix} \underline{t}_1 & * \\ 0 & \underline{t}_2 \end{pmatrix}$ wo $\underline{k} \in GL(2, \mathfrak{o})$, $\quad \underline{t}_1, \underline{t}_2 \in \mathbf{A}^\times$ ist dann

$$\mathcal{L}(\underline{x}) = \underline{t}_1^{-1}\mathfrak{o}e_1 \qquad \mathcal{L}'(\underline{x}) = \underline{t}_2^{-1}\mathfrak{o}e_2$$

Der Grad dieser Geradenbündel ist dann

$$\deg \mathcal{L}(\underline{x}) = \deg \underline{t}_1 \qquad \deg \mathcal{L}'(\underline{x}) = \deg \underline{t}_2 \ .$$

Sei $\mathcal{L} \subset \mathcal{F}(\underline{x})$ irgendein Geradenbündel. Dann ist entweder

$$\mathcal{L} \hookrightarrow \mathcal{F}(\underline{x}) \longrightarrow \mathcal{L}'(\underline{x})$$

von Null verschieden, also injektiv und der Grad $\deg \mathcal{L} \leq \deg \underline{t}_2$, oder $\mathcal{L}$ liegt im Kern von $\mathcal{F}(\underline{x}) \longrightarrow \mathcal{L}'(\underline{x})$, also $\mathcal{L} \subset \mathcal{L}(\underline{x})$ und $\deg \mathcal{L} \leq \deg \underline{t}_1$.

Der maximale *Reduktionsgrad*

$$\nu(\underline{x}) := \max\{\deg \mathcal{L} \mid \mathcal{L} \subset \mathcal{F}(\underline{x})\}$$

erfüllt somit die Ungleichungen

$$\deg \underline{t}_1 \leq \nu(\underline{x}) \leq \max(\deg \underline{t}_1, \deg \underline{t}_2)$$

Die Kohomologiegruppen der Ebenenbündel $\mathcal{F} \subset \mathbf{A} \oplus \mathbf{A}$ sind

$$\begin{aligned} H^0(V, \mathcal{F}) &= F \oplus F \cap \mathcal{F} \\ H^1(V, \mathcal{F}) &= \mathbf{A} \oplus \mathbf{A}/(F \oplus F + \mathcal{F}) \end{aligned}$$

Der Dualitätssatz lautet: $\mathrm{Hom}_{\mathbf{F}_q}(H^1(V, \mathcal{F}), \mathbf{F}_q) \simeq H^0(V, \Omega^1_V \otimes \mathcal{F}^\vee)$ und wird in der Adele–Situation explizit durch einen unitären Charakter $\tau : \mathbf{A}/F \longrightarrow \mathbf{S}_1$ gegeben. Diese Beziehung ist ganz kanonisch : der F–Vektorraum der Differentialformen $\Omega^1_F = \Omega^1_{V,F}$ = generischer Halm von Ω^1_V entspricht via Residuenabbildung $1-1$ dem F–Vektorraum dieser Charaktere; beide sind eindimensional.

Der Riemann–Roch'sche Satz lautet für ein Vektorbündel vom Rang n

$$\chi(\mathcal{F}) = \dim_{\mathbf{F}_q} H^0(V, \mathcal{F}) - \dim_{\mathbf{F}_q} H^1(V, \mathcal{F}) = \deg \mathcal{F} + n(1-g) \qquad [14, \text{VI, th. 1}]$$

Für das Tamagawa–Maß auf $\mathbf{A} \oplus \mathbf{A}$ gilt $\mathrm{vol}_{d\tau}(\mathcal{F}) = q^{\chi(\mathcal{F})}$. Alles dies wird von Weil in [14, VI] bewiesen. Wir wenden das jetzt an für $n = 2$.

Der Beweis des Reduktionssatzes geschieht nun durch das klassische Argument von Minkowski : bei genügend großem Volumen enthält das Gitter einen Punkt $s \neq 0$.

Sei nämlich $\mathcal{F} = \mathcal{O}_V(\underline{t}) \otimes \mathcal{F}(\underline{x})$ mit $\underline{x} \in G_{\mathbf{A}}$ und $\underline{t} \in \mathbf{A}^\times$ vom Grad $\deg \underline{t} = g$ ($\mathcal{O}_V(\underline{t}) = \underline{t}^{-1}\mathfrak{o}$), dann ist der Grad $\deg \mathcal{F} = 2g$ und $\dim H^0(V, \mathcal{F}) \geq \chi(\mathcal{F}) = 2$, es gibt also einen Schnitt $s \neq 0$

$$s = (u, v) \in H^0(V, \mathcal{F}) = F^2 \cap \underline{t}^{-1}\mathcal{F}(\underline{x}).$$

Sei $\underline{x} = \underline{k}.\underline{b}$ die Iwasawa–Zerlegung von $\underline{x}$, mit $\underline{b} = \begin{pmatrix} \underline{t}_1 & \underline{u} \\ 0 & \underline{t}_1^{-1} \end{pmatrix}$, so ist

$$(u, v) \in \mathfrak{o}(\underline{t}^{-1}\underline{t}_1^{-1}, 0) + \mathfrak{o}(-\underline{t}^{-1}\underline{u}\,,\, \underline{t}^{-1}\underline{t}_1).$$

Wenn $v = 0$ ist, so $u \neq 0$ und aus $u.\underline{t}.\underline{t}_1 \in \mathfrak{o}$ folgt $\deg(u.\underline{t}.\underline{t}_1) = \deg \underline{t} + \deg \underline{t}_1 \geq 0$, insbesondere ist $\nu(\underline{x}) \geq \deg \underline{t}_1 \geq -g$ und $\underline{x} \in \mathfrak{K}B_{\mathbf{A}}(-g)$.

Im Falle $v \neq 0$ setze
$$a = \begin{pmatrix} u & -v^{-1} \\ v & 0 \end{pmatrix} \in G_F$$
Es ist $(u,v) = \alpha(\underline{t}^{-1}\underline{t}_1^{-1}, 0) + \beta(-\underline{t}^{-1}\underline{u}, \underline{t}^{-1}\underline{t}_1)$ mit ganzen Adelen $\alpha, \beta \in \mathfrak{o}$. Damit ist
$$\underline{b}.a = \begin{pmatrix} \underline{t}_1.u + \underline{u}.v & -\underline{t}_1.v^{-1} \\ \underline{t}_1^{-1}.v & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha.\underline{t}^{-1} & * \\ \beta.\underline{t}^{-1} & 0 \end{pmatrix} = \underline{k}'.\underline{b}'$$
und für $\underline{b}' = \left(\begin{smallmatrix} \underline{t}' & * \\ 0 & * \end{smallmatrix}\right)$ ist $\underline{t}\underline{t}' \in \mathfrak{o}$, d.h. $\deg \underline{t}' \geq -\deg \underline{t} = -g$, also wieder $\nu(\underline{x}) = \nu(\underline{b}) = \nu(\underline{b}.a) = \nu(\underline{b}') \geq \deg \underline{t}' \geq -g$ und $\underline{x}.a = \underline{k}.\underline{k}'.\underline{b}' \in \mathfrak{K}B_{\mathbf{A}}(-g)$.

Insbesondere wurde $\underline{x} \in \mathfrak{K}.B_{\mathbf{A}}(-g).G_F$ gezeigt, qed.

7.2. 2. Reduktionssatz. Eine Art Eindeutigkeitsaussage macht der folgende

Satz. *Seien $\underline{x}, \underline{y} \in \mathfrak{K}.B_{\mathbf{A}}(d_1)$ mit $d_1 \leq -g$ und $\underline{y} = \underline{x}.a$ für ein $a \in G_F$. Wenn dann sogar $\underline{x} \in \mathfrak{K}.B_{\mathbf{A}}(1-d_1)$, so ist $a \in B_F$.*

Beweis: Sei $\underline{y} = \underline{k}.\underline{t}.\underline{u}$ die Iwasawa–Zerlegung mit $\deg \underline{t} \geq d_1$. Sei $\mathcal{L} \subset \mathcal{F}(\underline{y})$ ein Geradenbündel von maximalem Grad $\deg \mathcal{L} = \nu(\underline{y})$.

Wäre $\mathcal{L} \not\subset \mathcal{L}(\underline{y})$, so $\mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L}'(\underline{y})$ nicht trivial, also injektiv und $\nu(\underline{y}) \leq \deg \mathcal{L}'(\underline{y}) = -\deg \underline{t} \leq -d_1$, aber dies ist im Widerspruch zu $\nu(\underline{y}) = \nu(\underline{x}) \geq 1 - d_1$. Also muß $\mathcal{L}$ in $\mathcal{L}(\underline{y})$ liegen und wegen der Maximalität $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\underline{y})$ sein. Insbesondere hat $\mathcal{L} = a^{-1}\mathcal{L}(\underline{x})$ maximalen Grad in $a^{-1}\mathcal{F}(\underline{x}) = \mathcal{F}(\underline{y})$, es muß also $a^{-1}\mathcal{L}(\underline{x}) = \mathcal{L}(\underline{y})$, d.h. $a \in B_F$ sein, qed.

Für die Diskussion der Spitzenformen benötigen wir noch das

Lemma. *Sei $\mathfrak{K}' \subset \mathfrak{K}$ eine offene Untergruppe, und etwa*
$$\mathfrak{K}' \cap U_{\mathbf{A}} \supset U(\underline{t}.\mathfrak{o}) \qquad \underline{t} \in \mathbf{A}^{\times}.$$
Dann ist für $d_2 \geq \frac{1}{2}(2g - 1 + \deg \underline{t})$
$\forall \quad \underline{b} \in B_{\mathbf{A}}(d_2) \qquad (\underline{b}^{-1}\mathfrak{K}'\underline{b} \cap U_{\mathbf{A}}).U_F = U_{\mathbf{A}}$

Beweis: Man erkennt unschwer in Weil [14, VI, th. 2, cor. 3].

7.3. Starker Approximationssatz. Erinnert sei auch an den *starken Approximationssatz* :

Satz. *$S \neq \emptyset$ sei eine endliche Menge von Stellen und $\mathfrak{m}$ ein zu S primer positiver Divisor. Dann ist*
$$G_{\mathbf{A}} = G_{\mathbf{A}_S}(\mathfrak{m}).G_F$$
wo $\mathbf{A}_S = \bigoplus_{v \in S} F_v \oplus \prod_{v \notin S} \mathfrak{o}_v$ die S–Adele und
$$G_{\mathbf{A}_S}(\mathfrak{m}) = \prod_{v \in S} G_v \times \prod_{v \notin S} \mathfrak{K}_v(\mathfrak{m})$$
die Kongruenzuntergruppe von $G_{\mathbf{A}_S}$ mod $\mathfrak{m}$ bezeichnet.

Beweis: Zunächst bemerken wir, daß die Behauptung für die additive Gruppe U gilt : nach dem Approximationssatz für den Dedekindring $\mathbf{A}_S \cap F$ von F ist
$(*) \qquad \mathbf{A} = \mathbf{A}_S(\mathfrak{n}) + F \qquad$ für alle $\mathfrak{n}$ prim zu S.

Wir zeigen nun : das Bild $\Gamma_{T,S}$ von $G_F \cap G_{\mathbf{A}_T}$ in $G_{T-S} = \prod_{v \in T-S} G_v$ für eine endliche Menge $T \supset S$ liegt dicht in G_{T-S}. Denn zunächst sei $u \in U_{T-S}$, setze u durch 0 außerhalb T zu einem Adel $\underline{u}$ fort. Dann sagt $(*)$: zu jedem noch so großen $\mathfrak{n}$ mit Träger in $T - S$ gibt es ein $\underline{v} \in U_{\mathbf{A}_S}(\mathfrak{n})$, ein $w \in U_F$ mit $\underline{u} = \underline{v}.w$. Die v–Komponente für $v \notin T$ genommen: $w \in \Gamma_{T,S}$, und für $v \in T - S$ besagt es : w liegt in einer Umgebung von u. Analog folgt $U^-_{T-S} \subset \overline{\Gamma_{T,S}}$, wenn $U^- = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ * & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Die von U_{T-S} und U^-_{T-S} erzeugte Gruppe, i.e. G_{T-S} liegt also in der Gruppe $\overline{\Gamma_{T,S}}$, d.h. $\overline{\Gamma_{T,S}} = G_{T-S}$.

Aus der Dichtigkeit von $\Gamma_{T,S}$ in G_{T-S} folgt der Satz (und umgekehrt) : Sei $\underline{x} \in G_{\mathbf{A}}$ und setze

$$T := \{v \mid \mathrm{ord}_v\, \mathfrak{m} \neq 0\} \cup \{v \mid \underline{x}_v \notin \mathfrak{K}_v\} \cup S$$

Aus der Dichtheit folgt : $\exists \quad a \in \Gamma_{T,S}$ mit $a \in \mathfrak{K}_v(\mathfrak{m}).x_v \quad \forall v \in T-S$, und hieraus folgt $\underline{x}.a^{-1} \in G_{\mathbf{A}_S}(\mathfrak{m})$, qed.

7.4. Reduktionssatz für offene Untergruppen. Mithilfe der starken Approximation können wir nun auch den Reduktionssatz für eine offene Untergruppe $\mathfrak{K}' \subset \mathfrak{K}$ beweisen:

Satz. *Es gibt $d_1 \leq -g$ und Borelgruppen $B^{(1)}, \ldots, B^{(r)}$ so daß gilt*

$$G_{\mathbf{A}} = \bigcup_{i=1}^{r} \mathfrak{K}'.B^{(i)}_{\mathbf{A}}(d_1).G_F$$

Hier ist $B^{(i)}_{\mathbf{A}}(d_1) := a_i.B_{\mathbf{A}}(d_1).a_i^{-1}$, wenn $B^{(i)} = a_i.B.a_i^{-1}$ ist.

Beweis: Ohne Einschränkung habe $\mathfrak{K}'$ die Form $\mathfrak{K}' = \prod_v \mathfrak{K}'_v$. Es gibt eine Stelle w mit $\mathfrak{K}'_w = \mathfrak{K}_w$, setze $S = \{w\}$. Ferner gibt es $\mathfrak{m}$ fremd zu S mit

$$\mathfrak{K}(\mathfrak{m}) \subset \mathfrak{K}' \subset \mathfrak{K}.$$

Schreibe $\mathfrak{K} = \bigcup_{i=1}^{r} \mathfrak{K}'.\underline{k}_i$, wobei $\underline{k}_{i,w} = 1$ sei. Nach starker Approximation 7.3 ist

$$\underline{k}_i = \underline{y}_i.a_i, \quad \underline{y}_i \in G_{\mathbf{A}_S}(\mathfrak{m}), \; a_i \in G_F.$$

Sei $\underline{k}'_i$ definiert durch $\quad \underline{k}'_{i,v} := \underline{y}_{i,v}$ für $v \neq w$, $\quad \underline{k}'_{i,w} := 1$ für $v = w$. Da $\underline{k}'_i \in \mathfrak{K}(\mathfrak{m}) \subset \mathfrak{K}'$ ist

$$\mathfrak{K} = \bigcup_{i=1}^{r} \mathfrak{K}'.\underline{z}_i.a_i$$

wo $\underline{z}_i = \underline{k}_i^{'-1}.\underline{y}_i$ die Komponenten

$$\begin{array}{rcll} z_{i,v} & = & 1 & v \neq w \\ z_{i,w} & = & a_i^{-1} & \text{hat} \end{array}$$

und es ist $a_i \in \mathfrak{K}_v$ ganz außerhalb w.

Nach 7.1 ist

$$\begin{aligned} G_{\mathbf{A}} = \mathfrak{K}.B_{\mathbf{A}}(-g).G_F &= \bigcup_{i=1}^{r} \mathfrak{K}'.\underline{z}_i.a_i.B_{\mathbf{A}}(-g).G_F \\ &= \bigcup_{i=1}^{r} \mathfrak{K}'.\underline{z}_i.B^{(i)}_{\mathbf{A}}(-g).G_F \end{aligned}$$

mit $B^{(i)} = a_i B a_i^{-1}$.

Nun ist $\underline{z}_i \in G_{\mathbf{A}} = \mathfrak{K}.B^{(i)}_{\mathbf{A}}$ (Iwasawa–Zerlegung), etwa $\underline{z}_{i,w} = \underline{k}_{i,w}.\underline{b}_{i,w}$, $\underline{b}_{i,w} \in B^{(i)}_w$.

$$\mathfrak{K}'.\underline{z}_i.B^{(i)}_{\mathbf{A}}(-g) = \mathfrak{K}'.\underline{b}_{i,w}.B^{(i)}_{\mathbf{A}}(-g)$$

$$\underline{b}_{i,w}.B^{(i)}_{\mathbf{A}}(-g) = B^{(i)}_{\mathbf{A}}(-g + \deg \underline{b}_i) \subset B^{(i)}_{\mathbf{A}}(d_1)$$

wenn nur $d_1 \leq -g + \deg \underline{b}_i$ für jedes i gewählt wurde. Damit ist der Satz bewiesen (und der Beweis liefert eine Konstruktion).

8. Spitzenformen und θ–Reihen

8.1. Definition von Spitzenformen. Eine Funktion

$$f : G_{\mathbf{A}}/G_F \longrightarrow \mathbf{C}$$

heißt *cuspidal*, wenn für alle $\underline{x} \in G_{\mathbf{A}}$ gilt:

$$\int_{U_{\mathbf{A}}/U_F} f(\underline{x}.\underline{u})\, d\underline{u} = 0$$

und eine *Spitzenform*, wenn sie außerdem eine *automorphe* Form ist, d.h. den beiden folgenden Bedingungen genügt:

(C^∞) $\quad f$ ist links $\mathfrak{K}$–endlich

(Ad) $\quad \dim_{\mathbf{C}} C^\infty_{cp}(\mathfrak{K}'\backslash G_{\mathbf{A}}/\mathfrak{K}') * f < \infty$ für jede offene Untergruppe $\mathfrak{K}' \subset \mathfrak{K}$.

(Ad) ist die Zulässigkeitsbedingung in der Darstellungstheorie. Nach (C^∞) transformiert sich f unter Linkstranslationen gemäß endlich vieler $\kappa \in \mathcal{E}(\mathfrak{K})$ (Äquivalenzklassen κ irreduzibler Darstellungen von $\mathfrak{K}$). Wenn f zulässig ist (i.e. (Ad)), ist auch die Multiplizität für jedes κ endlich.

Wir schreiben

$$\mathcal{A}(G_{\mathbf{A}}/G_F, \mathbf{C})$$

für den Raum der automorphen Formen und $\mathcal{A}_0(G_{\mathbf{A}}/G_F, \mathbf{C})$ für den Teilraum der Spitzenformen. Nach (C^∞) ist

$$\mathcal{A}(G_{\mathbf{A}}/G_F, \mathbf{C}) = \bigcup_{\mathfrak{K}'\subset\mathfrak{K}} \mathcal{A}(\mathfrak{K}'\backslash G_{\mathbf{A}}/G_F, \mathbf{C}).$$

Tatsächlich ist jede cuspidale $\mathfrak{K}$–endliche Funktion

$$f : G_{\mathbf{A}}/G_F \longrightarrow \mathbf{C}$$

automatisch zulässig, also eine Spitzenform. Wegen

$$C^\infty_{cp}(\mathfrak{K}'\backslash G_{\mathbf{A}}/\mathfrak{K}') * f \subset C_0(\mathfrak{K}'\backslash G_{\mathbf{A}}/G_F, \mathbf{C})$$

für ein $f \in C_0(\mathfrak{K}'\backslash G_{\mathbf{A}}/G_F, \mathbf{C})$ folgt dies aus dem nächsten Lemma (der Index 0 bezieht sich natürlich auf „cuspidal“).

8.2. Endliche Dimensionalität cuspidaler Funktionen.

Lemma. *Für jede offene Untergruppe $\mathfrak{K}' \subset \mathfrak{K}$ ist der Raum der $\mathfrak{K}'$–invarianten cuspidalen Funktionen endlich dimensional:* $\dim_{\mathbf{C}} C_0(\mathfrak{K}'\backslash G_{\mathbf{A}}/G_F, \mathbf{C}) < \infty$.

Beweis: Nach dem Reduktionssatz in 7.4 ist

$$G_{\mathbf{A}} = \bigcup_{i=1}^{r} \mathfrak{K}'.B^{(i)}_{\mathbf{A}}(d_1).G_F$$

und nach dem Lemma in 7.2 gibt es eine weitere Konstante d_2 mit

$$(\underline{b}^{-1}\mathfrak{K}'\underline{b} \cap U^{(i)}_{\mathbf{A}}).U^{(i)}_F = U^{(i)}_{\mathbf{A}}$$

für alle $\underline{b} \in B^{(i)}_{\mathbf{A}}(d_2)$. Sei $\underline{b} \in B^{(i)}_{\mathbf{A}}(d_2)$ und $f \in C_0(\mathfrak{K}'\backslash G_{\mathbf{A}}/G_F, \mathbf{C})$, dann ist für $\underline{u} \in U^{(i)}_{\mathbf{A}}$, $\underline{u} = \underline{v}.w$ mit $\underline{v} \in (\underline{b}^{-1}\mathfrak{K}'\underline{b} \cap U^{(i)}_{\mathbf{A}})$, $w \in U^{(i)}_F$ und

$$\begin{aligned} \underline{b}.\underline{u} &= \underline{b}.\underline{v}.\underline{b}^{-1}.\underline{b}.w \\ f(\underline{b}.\underline{u}) &= f(\underline{b}) \end{aligned}$$

Nun ist aber f cuspidal, also

$$f(\underline{b}) = \int_{U^{(i)}_{\mathbf{A}}/U^{(i)}_F} f(\underline{b}.\underline{u})\, d\underline{u} = 0.$$

Folglich verschwindet f auf $\bigcup_{i=1}^r \mathfrak{K}'.B_{\mathbf{A}}^{(i)}(d_2).G_F$ und der Träger von f liegt in

$$C = \bigcup_{i=1}^r \mathfrak{K}'.B_{\mathbf{A}}^{(i)}(d_1, d_2).G_F$$

wo $B_{\mathbf{A}}(d_1, d_2) := \left\{ \underline{b} = \begin{pmatrix} \underline{t} & * \\ 0 & \underline{t}^{-1} \end{pmatrix} \mid d_1 \leq \deg \underline{t} \leq d_2 \right\}$ und analog für die konjugierten Borelgruppen.

Wegen der Kompaktheit von $B_{\mathbf{A}}^{(i)}(d_1, d_2)/B_F^{(i)}$ ist C/G_F kompakt und $\mathfrak{K}'\backslash C/G_F$ eine endliche Menge, und das Lemma ist bewiesen.

Bemerkung: Eine Abschätzung für die Dimension dieses Raumes von Spitzenformen

$$\mathcal{A}_0(\mathfrak{K}'\backslash G_{\mathbf{A}}/G_F, \mathbf{C}) = C_0(\mathfrak{K}'\backslash G_{\mathbf{A}}/G_F, \mathbf{C})$$

im unverzweigten Fall ($\mathfrak{K}' = \mathfrak{K}$) und für die Gruppe $PGL(2)$ gibt Schleich [9].

8.3. Definition der θ–Reihen. Wir betrachten C^∞–Funktionen mit kompaktem Träger auf $G_{\mathbf{A}}/B_F U_{\mathbf{A}}$. Als Funktionen auf $G_{\mathbf{A}}$ liegt der Träger in einer Menge der Form $\mathfrak{K}.B_{\mathbf{A}}(d_1, d_2)$. Die Menge $G_F/B_F \subset G_{\mathbf{A}}/B_F U_{\mathbf{A}}$ ist eine diskrete Teilmenge und trifft den Träger eines $\varphi \in C_{cp}^\infty(G_{\mathbf{A}}/B_F U_{\mathbf{A}}, \mathbf{C})$ nur endlich oft.

Die folgende Summe ist also endlich und wird *θ–Reihe* von φ genannt:

$$\theta_\varphi(\underline{x}) := \sum_{a \in G_F/B_F} \varphi(\underline{x}.a)$$

Weil $\mathfrak{K}.B_{\mathbf{A}}(d_1, d_2).G_F/G_F \subset G_{\mathbf{A}}/G_F$ eine kompakte Teilmenge ist, hat die θ–Reihe einen kompakten Träger. Ferner ist sie links $\mathfrak{K}$–endlich, die Bildung der θ–Reihen $\varphi \mapsto \theta_\varphi$ ist verträglich mit der Gruppenoperation von links und es ist ja

$$C_{cp}^\infty(G_{\mathbf{A}}/B_F U_{\mathbf{A}}, \mathbf{C}) = \bigcup_{\mathfrak{K}'} C_{cp}^\infty(\mathfrak{K}'\backslash G_{\mathbf{A}}/B_F U_{\mathbf{A}}, \mathbf{C}).$$

Der Raum der θ–Reihen sei

$$C_\theta^\infty(G_{\mathbf{A}}/G_F, \mathbf{C}) \subset C_{cp}^\infty(G_{\mathbf{A}}/G_F, \mathbf{C})$$

Bemerkung: Die Darstellung von $G_{\mathbf{A}}$ im Raum der θ–Reihen ist *glatt* (C^∞), aber nicht zulässig; θ–Reihen sind also nicht automorph.

8.4. Zerlegung von $L^2(G_{\mathbf{A}}/G_F)$. $f : G_{\mathbf{A}}/G_F \longrightarrow \mathbf{C}$ sei lokal integrierbar, $f^0 : G_{\mathbf{A}}/B_F U_{\mathbf{A}} \longrightarrow \mathbf{C}$ der konstante Fourierkoeffizient

$$f^0(\underline{x}) := \int_{U_{\mathbf{A}}/U_F} f(\underline{x}.\underline{u})\, d\underline{u};$$

dann zeigt eine elementare Rechnung

$$\begin{aligned} \int_{G_{\mathbf{A}}/G_F} f(\underline{x})\theta_\varphi(\underline{x})\, d\underline{x} &= \int_{G_{\mathbf{A}}/B_F} f(\underline{x})\varphi(\underline{x})\, d\underline{x} = \\ = \int_{G_{\mathbf{A}}/B_F U_{\mathbf{A}}} \int_{U_{\mathbf{A}}/U_F} f(\underline{x}.\underline{u})\, d\underline{u} \quad \varphi(\underline{x})\, d\underline{x} &= \int_{G_{\mathbf{A}}/B_F U_{\mathbf{A}}} f^0(\underline{x})\varphi(\underline{x})\, d\underline{x} \end{aligned}$$

Also ist

$$< f, \theta_\varphi >_{G_{\mathbf{A}}/G_F} \quad = \quad < f^0, \varphi >_{G_{\mathbf{A}}/B_F U_{\mathbf{A}}}$$

Spitzenformen und θ–Reihen haben kompakte Träger, sind insbesondere quadratisch integrierbar. Seien

$$\begin{aligned} L_0^2(G_{\mathbf{A}}/G_F, \mathbf{C}) &\supset \mathcal{A}_0(G_{\mathbf{A}}/G_F, \mathbf{C}) \\ L_\theta^2(G_{\mathbf{A}}/G_F, \mathbf{C}) &\supset C_\theta^\infty(G_{\mathbf{A}}/G_F, \mathbf{C}) \end{aligned}$$

jeweils die Hilbertraumabschlüsse in $L^2(G_{\mathbf{A}}/G_F,\mathbf{C})$. Aus obiger Rechnung folgt, daß $C_\theta^\infty(G_{\mathbf{A}}/G_F,\mathbf{C})^\perp = L_0^2(G_{\mathbf{A}}/G_F,\mathbf{C})$ ist. Folglich haben wir die orthogonale Hilbertraumsumme

$$L^2(G_{\mathbf{A}}/G_F,\mathbf{C}) = L_0^2(G_{\mathbf{A}}/G_F,\mathbf{C}) \oplus L_\theta^2(G_{\mathbf{A}}/G_F,\mathbf{C})$$

Die Konstanten stehen senkrecht auf den Spitzenformen, d.h. $\mathbf{C} \subset L_\theta^2(G_{\mathbf{A}}/G_F,\mathbf{C})$, wie jetzt gezeigt wird:

Lemma. *Sei $f \in \mathcal{A}_0(\mathfrak{K}'\backslash G_{\mathbf{A}}/G_F,\mathbf{C})$, dann ist*

$$\int_{G_{\mathbf{A}}/G_F} f(\underline{x})\,d\underline{x} = 0.$$

Beweis: Der Operator $T_{\underline{x}}$, $\underline{x} \in G_{\mathbf{A}}$

$$T_{\underline{x}} f(\underline{y}) = \int_{\mathfrak{K}'.\underline{x}.\mathfrak{K}'} f(\underline{z}.\underline{y})\,d\underline{z}$$

läßt $\mathcal{A}_0(\mathfrak{K}'\backslash G_{\mathbf{A}}/G_F,\mathbf{C})$ und sein $\perp$–Komplement invariant. Man zerlege

$$1 = f_0 + f_1 \in \mathcal{A}_0(\mathfrak{K}'\backslash G_{\mathbf{A}}/G_F,\mathbf{C}) \oplus \mathcal{A}_0(\mathfrak{K}'\backslash G_{\mathbf{A}}/G_F,\mathbf{C})^\perp.$$

Aus $\mathrm{vol}(\mathfrak{K}'\underline{x}\mathfrak{K}') = T_{\underline{x}}(1) = T_{\underline{x}}(f_0) + T_{\underline{x}}(f_1)$ ergibt sich also $T_{\underline{x}}(f_0) = \mathrm{vol}(\mathfrak{K}'\underline{x}\mathfrak{K}').f_0$.

Da f_0 kompakten Träger hat, wähle $\underline{y}$ so, daß $|f_0(\underline{y})| \geq |f_0(\underline{z})|$ für alle $\underline{z}$ und ferner $\underline{x}$ so, daß $f_0(\underline{x}.\underline{y}) = 0$; dann ist auch in einer Umgebung V von $\underline{x}$: $f_0(\underline{z}.\underline{y}) = 0$ für $\underline{z} \in V$.

Damit wird

$$T_{\underline{x}} f_0(\underline{y}) = \int_{\mathfrak{K}'.\underline{x}.\mathfrak{K}'} f_0(\underline{z}.\underline{y})\,d\underline{z} = \int_{\mathfrak{K}'.\underline{x}.\mathfrak{K}'-V} f_0(\underline{z}.\underline{y})\,d\underline{z}$$
$$\mathrm{vol}(\mathfrak{K}'.\underline{x}.\mathfrak{K}')|f_0(\underline{y})| = |T_{\underline{x}} f_0(\underline{y})| \leq \mathrm{vol}(\mathfrak{K}'.\underline{x}.\mathfrak{K}'-V)|f_0(\underline{y})|$$

und es muß $f_0(\underline{y}) = 0$ sein, folglich überhaupt $f_0 = 0$, qed.

Bemerkung: Vgl. auch eine analoge Schlußweise am Ende von Teil 1.

Es bezeichne $L_1^2(G_{\mathbf{A}}/G_F,\mathbf{C}) \subset L_\theta^2(G_{\mathbf{A}}/G_F,\mathbf{C})$ das orthogonale Komplement der Konstanten. Wir erhalten damit die orthogonale Zerlegung

$$L^2(G_{\mathbf{A}}/G_F,\mathbf{C}) = L_0^2(G_{\mathbf{A}}/G_F,\mathbf{C}) \oplus \mathbf{C} \oplus L_1^2(G_{\mathbf{A}}/G_F,\mathbf{C})$$

9. Darstellungen von $\mathfrak{K}$ und Hauptserie

Ich gebe hier nur einen kurzen Überblick; wir benötigen nur einige Details aus der Darstellungstheorie.

Jede irreduzible Darstellung ρ von $\mathfrak{K}$ ist Tensorprodukt $\rho = \otimes_v \rho_v$ lokaler irreduzibler Darstellungen ρ_v von $\mathfrak{K}_v$, und für fast alle Stellen v ist ρ_v trivial. Es genügt also, den lokalen Fall zu betrachten.

Eine (komplexe) Darstellung $\rho_v : \mathfrak{K}_v \longrightarrow GL(V)$ heißt *cuspidal*, wenn es keine Fixvektoren unter der unipotenten kompakten Gruppe $\mathfrak{U}_v = U(\mathfrak{o}_v)$ gibt: $V^{\mathfrak{U}_v} = 0$. Wir werden cuspidale Darstellungen nicht verwenden.

Andernfalls zerlegt sich

$$V^{\mathfrak{U}_v} = \bigoplus V(\lambda_0)$$

nach unitären Charakteren $\lambda_0 : \mathfrak{o}_v^\times \to \mathbf{S}_1$, wo mit den Bezeichnungen $\mathfrak{B}_v = B(\mathfrak{o}_v)$, $b = \left(\begin{smallmatrix} t & * \\ 0 & * \end{smallmatrix}\right) \in \mathfrak{B}_v$, $t \in \mathfrak{o}_v^\times$, $\lambda_0(b) = \lambda_0(t)$,

$$V(\lambda_0) := \{v \in V \mid \rho_v(b)v = \lambda_0(b^{-1}).v\}$$

Wenn V irreduzibel ist, ist $\dim_{\mathbf{C}} V < \infty$ und $\dim_{\mathbf{C}} V(\lambda_0) = 1$, falls überhaupt $V(\lambda_0) \neq 0$ (d.h. λ_0 *kommt vor*).

Auf dem Vektorraum der $\mathfrak{K}_v$–endlichen komplexen Funktionen $C^\infty(\mathfrak{K}_v, \mathbf{C})$ operiert $\mathfrak{K}_v$ durch Translation von rechts und links (reguläre Darstellung). Zu $\lambda_0 : \mathfrak{o}_v^\times \to \mathbf{S}_1$ bestehe $C^\infty(\mathfrak{K}_v, \lambda_0) \subset C^\infty(\mathfrak{K}_v, \mathbf{C})$ aus den Funktionen $\phi_0 : \mathfrak{K}_v \longrightarrow \mathbf{C}$, die sich rechts wie $\phi_0(k.b) = \lambda_0(b)^{-1}\phi_0(k)$ transformieren.

$C^\infty(\mathfrak{K}_v, \lambda_0)$ ist $\mathfrak{K}_v$–Modul durch Operation von links. Dieser Raum enthält jede nicht–cuspidale Darstellung, in der λ_0 vorkommt, genau einmal. Er läßt sich auf vielerlei Weise zu einem G_v–Modul machen:

$\lambda : T_v \to \mathbf{C}^\times$ sei ein (nicht notwendig unitärer) Charakter und $\lambda_0 = \lambda|\mathfrak{o}_v^\times$ seine Restriktion. Analog zu $C^\infty(\mathfrak{K}_v, \lambda_0)$ bilde man den Raum $C^\infty(G_v, \lambda)$ der $\mathfrak{K}_v$–endlichen komplexen Funktionen $\phi : G_v \longrightarrow \mathbf{C}$, für die gilt: $\phi(x.b) = \omega_1\lambda(b^{-1}).\phi(x)$.

$C^\infty(G_v, \lambda)$ ist die *Hauptserien–Darstellung* von G_v (durch Linkstranslation) zum Parameter λ. Hier ist $\omega_1(b) = |t|_v = \mathrm{N}v^{-\operatorname{ord}_v t}$. Als $\mathfrak{K}_v$–Modul ist

$$\begin{array}{ccc} C^\infty(G_v, \lambda) & \xrightarrow{\sim} & C^\infty(\mathfrak{K}_v, \lambda_0) \\ \phi & \longmapsto & \phi_0 = \phi|\mathfrak{K}_v \end{array}$$

weil $G_v = \mathfrak{K}_v.B_v$. ϕ ist durch das Paar (ϕ_0, λ) eindeutig charakterisiert.

Die Hauptserie ist irreduzibel außer für $\lambda = \omega_s$ an den Stellen $s = +1, -1, \pi i/\log \mathrm{N}v$ (d.h. $\mathrm{N}v^{-s} = q_v^{-1}, q_v, -1$ respektive).

Die globale Definition der Hauptserien–Darstellungen ist analog

$$C^\infty(G_{\mathbf{A}}, \lambda) = \{\phi : G_{\mathbf{A}} \to \mathbf{C} \mid \phi(\underline{x}.\underline{b}) = \omega_1\lambda(\underline{b}^{-1}).\phi(\underline{x})\}$$

Hier durchläuft λ die Charaktere der Idelklassengruppe Ω.

Wir betrachten zu den Äquivalenzklassen κ irreduzibler Darstellungen von $\mathfrak{K}$ eine Darstellung ρ aus der Klasse κ. Es bezeichne d_κ den Grad der Darstellung und $e_\kappa(\underline{k}) = d_\kappa \mathrm{Spur}\,\rho(\underline{k})$. Dann ist der d_κ–dimensionale Raum, der sich wie κ transformierenden Funktionen

$$C^\infty(G_{\mathbf{A}}, \kappa, \lambda) = e_\kappa * C^\infty(G_{\mathbf{A}}, \lambda)$$

als linker $\mathfrak{K}$–Modul isomorph zur konjugierten (kontragredienten) Darstellung $\overline{\rho}$.

Da, wie wir eben feststellten, der Teilraum $C^\infty(G_{\mathbf{A}}, \kappa, \lambda)(\lambda_0)$ 1–dimensional ist, gibt es genau eine Funktion

$$\begin{array}{rcl} \varepsilon(.., \kappa, \lambda) & \in & C^\infty(G_{\mathbf{A}}, \kappa, \lambda)(\lambda_0) \\ \varepsilon(1, \kappa, \lambda) & = & d_\kappa \end{array}$$

10. Eisensteinreihen

10.1. Definition. Die mit einer Funktion $\phi \in C^\infty(G_{\mathbf{A}}, \lambda)$ analog zur θ–Reihe gebildete (unendliche) Reihe

$$E_\phi(\underline{x}) = \sum_{a \in G_F/B_F} \phi(\underline{x}.a)$$

heißt *Eisensteinreihe*. Wir werden später sehen, daß sie automorph ist (10.4). Der Operator $\phi \mapsto E_\phi$ bildet also die Hauptserie in automorphe Formen ab und vermittelt eine entsprechende Abbildung der Hauptserien Darstellung als automorphe Darstellung. Weil ϕ durch (ϕ_0, λ) bestimmt ist, wird auch $E(\underline{x}, \phi_0, \lambda) = E(\underline{x}, \phi) = E_\phi(\underline{x})$ geschrieben.

Ein $\varphi \in C^\infty_{cp}(G_\mathbf{A}/B_F U_\mathbf{A}, \mathbf{C})$ läßt sich als Fourierintegral schreiben

$$\varphi(\underline{x}) = \int_{\Omega_\sigma} \widehat{\varphi}(\underline{x}, \lambda)\, d_\sigma \lambda$$

mit

$$\widehat{\varphi}(\underline{x}, \lambda) = \int_{T_\mathbf{A}/T_F} \varphi(\underline{x}.\underline{t}) \omega_1 \lambda(\underline{t})\, d^\times \underline{t}$$

Bei der Integration über die Charaktere vom Realteil Re $\lambda = \sigma$ wird der offenen und kompakten Teilmenge der unverzweigten Charaktere das Maß 1 gegeben (siehe 6).

Die Funktion $\widehat{\varphi}(\lambda)$, $\underline{x} \mapsto \widehat{\varphi}(\underline{x}, \lambda)$, liegt in der Hauptserie zum Parameter λ und hat in Ω_σ einen kompakten Träger.

Dort wo die Eisensteinreihe absolut konvergiert ($\sigma > 1$, siehe 10.2) kann die Summation mit der Integration vertauscht werden und es ergibt sich die Integraldarstellung der θ–Reihen

$$\theta_\varphi(\underline{x}) = \int_{\Omega_\sigma} E(\underline{x}, \widehat{\varphi}(\lambda), \lambda)\, d_\sigma \lambda\,, \quad \sigma > 1$$

10.2. Konvergenzsatz. *$E(\underline{x}, \phi_0, \lambda)$ konvergiert absolut für Re $\lambda = \sigma > 1$ und ist dort holomorph in λ. Es gilt die Abschätzung für $\deg \underline{t} \geq g+1$*

$$|E(\underline{t}, \phi_0, \lambda)| \leq \|\phi_0\|_\mathfrak{K} \cdot \frac{h|\underline{t}|^{-1-\sigma}}{1-q^{1-\sigma}}$$

Beweis: Es bezeichne

$$\rho : G_\mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{R}_+$$

die Funktion $\rho(\underline{k}.\underline{t}.\underline{u}) = |\underline{t}|$, $\quad \underline{k} \in \mathfrak{K}, \underline{t} \in T_\mathbf{A}, \underline{u} \in U_\mathbf{A}$.

Dann gilt für $\phi \in C^\infty(G_\mathbf{A}, \lambda)$ mit Re $\lambda = \sigma \quad |\phi(\underline{y})| \leq \|\phi_0\|_\mathfrak{K}.\rho(\underline{y})^{-1-\sigma}$ und

$$|E(\underline{y}, \phi_0, \lambda)| \leq \|\phi_0\|_\mathfrak{K} \cdot E(\underline{y}, 1, \omega_\sigma)$$

$$E(\underline{y}, 1, \omega_\sigma) = \sum_{a \in G_F/B_F} \rho(\underline{y}.a)^{-1-\sigma}$$

Die Summe führt man üblicherweise auf eine Integration zurück:

Sei $f \in C_{cp}(\mathfrak{K}\backslash G_\mathbf{A}/B_F U_\mathbf{A})$, dann liefert das Integral über die Doppelklasse $\mathfrak{K}\underline{y}G_F$ (als Vereinigung von linken Nebenklassen $\mathfrak{K}\underline{y}.a$ ausgewertet) direkt die Formel

$$\int_{\mathfrak{K}\underline{y}G_F/B_F} f(\underline{x})\, d\underline{x} = \frac{\mathrm{vol}_{\,d\underline{x}}(\mathfrak{K})}{\mathrm{card}(\mathfrak{K}^{\underline{y}} \cap G_F)} \sum_{a \in G_F/B_F} f(\underline{y}.a)$$

Wir werden den Faktor gleich auswerten; sei $q(\underline{y}) := \mathrm{card}(\mathfrak{K}^{\underline{y}} \cap G_F)/\mathrm{vol}_{\,d\underline{x}}(\mathfrak{K})$ gesetzt.

Für $a \in G_F$ ist der maximale Reduktionsgrad $\nu(\underline{y}.a) = \nu(\underline{y})$, also

$$\begin{array}{rcl} \underline{y}.a & \in & \mathfrak{K}.B_\mathbf{A}(-\infty, \nu(\underline{y})) \\ \mathfrak{K}\underline{y}G_F & \subset & \mathfrak{K}.B_\mathbf{A}(-\infty, \nu(\underline{y})) \end{array}$$

Damit wird jetzt (mit früheren Konventionen der Maße, siehe die Einleitung 6)

$$\begin{aligned}\sum_{a\in G_F/B_F} f(\underline{y}.a) &= q(\underline{y})\int_{\mathfrak{K}\underline{y}G_F/B_F} f(\underline{x})\,d\underline{x}\\ &\le q(\underline{y})\int_{\mathfrak{K}B_{\mathbf{A}}(-\infty,\nu(\underline{y}))/B_F} f(\underline{x})\,d\underline{x}\\ &= q(\underline{y})\int_{\mathfrak{K}} d\underline{k}\int_{T_{\mathbf{A}}(-\infty,\nu(\underline{y}))/T_F} f(\underline{t})|\underline{t}|^2\,d^\times\underline{t}\int_{U_{\mathbf{A}}/U_F} d\underline{u}\\ &= q(\underline{y})\int_{T_{\mathbf{A}}(-\infty,\nu(\underline{y}))/T_F} f(\underline{t})|\underline{t}|^2\,d^\times\underline{t}\\ &= q(\underline{y})\sum_{\deg\xi\le\nu(\underline{y})} f(\xi)|\xi|^2\end{aligned}$$

Hier durchläuft $\xi\in Pic(V/\mathbf{F}_q)$ die *Picardgruppe*. Die Eisensteinsumme hat also die Abschätzung

$$\begin{aligned}E(\underline{y},1,\omega_\sigma)=\sum_{a\in G_F/B_F}\rho(\underline{y}.a)^{-1-\sigma} &\le q(\underline{y})\sum_{\deg\xi\le\nu(\underline{y})}\rho(\xi)^{-1-\sigma}|\xi|^2\\ &= q(\underline{y})\sum_{\deg\xi\le\nu(\underline{y})}|\xi|^{1-\sigma}\\ &= q(\underline{y})\cdot h\sum_{n=-\nu(\underline{y})}^{\infty} q^{n(1-\sigma)}\\ &= q(\underline{y})\cdot h\cdot\frac{q^{-\nu(\underline{y})(1-\sigma)}}{1-q^{1-\sigma}}\end{aligned}$$

da $\sigma>1$.

Wir berechnen jetzt den Koeffizienten $q(\underline{y})$: wir wissen, daß $\mathrm{vol}_{d\underline{x}}(\mathfrak{K})=(q-1)q^{1-g}$. Auf der anderen Seite ist für $\nu(\underline{y})>g$ nach Riemann–Roch

$$\begin{aligned}\mathrm{card}(\mathfrak{K}^{\underline{y}}\cap G_F)=\mathrm{card}(\mathfrak{K}^{\underline{y}}\cap B_F) &= \mathrm{card}(\mathfrak{K}\cap T_F)\cdot\mathrm{card}(\mathfrak{K}^{\underline{y}}\cap U_F)=\\ &= (q-1)\cdot q^{2\nu(\underline{y})+1-g}\end{aligned}$$

und $q(\underline{y})=q^{2\nu(\underline{y})}$. Also wenn $\nu(\underline{y})>g$ und $\sigma>1$, ist

$$E(\underline{y},1,\omega_\sigma)\le h\cdot\frac{q^{-\nu(\underline{y})(-1-\sigma)}}{1-q^{1-\sigma}}$$

Damit ist die Abschätzung und der Konvergenzsatz bewiesen.

10.3. Verhalten im Unendlichen. Diese Abschätzung ist tatsächlich recht gut : wir können nämlich den unverzweigten Fall auf der Spitze direkt berechnen, d.h. $E(\underline{x},1,\omega_s)$ für $\nu(\underline{x})>g$.

Nach der Reduktionstheorie gibt es auf der Spitze einen Repräsentanten $\mathfrak{K}.\underline{x}.G_F=\mathfrak{K}.\underline{t}.G_F$ mit $\deg\underline{t}=\nu(\underline{x})>g$ und

$$E(\underline{x},1,\omega_s)=E(\underline{t},1,\omega_s)=\sum_{a\in G_F/B_F}\rho(\underline{t}.a)^{-1-s}$$

Jetzt verwenden wir die Bruhat–Zerlegung $G_F=B_F\cup U_F.j.B_F$ mit $j=\left(\begin{smallmatrix}0&-1\\1&0\end{smallmatrix}\right)$. Also ist

$$E(\underline{t},1,\omega_s)=\rho(\underline{t})^{-1-s}+\sum_{u\in U_F}\rho(\underline{t}.u.j)^{-1-s}$$

Nun ist

$$\int_{U_{\mathbf{A}}} \rho(\underline{t}.\underline{u}.j)^{-1-s}\, d\underline{u} = \int_{U_{\mathbf{A}}/U_F} \sum_{u \in U_F} \rho(\underline{t}.\underline{u}.u.j)^{-1-s}\, d\underline{u} = \sum_{u \in U_F} \rho(\underline{t}.u.j)^{-1-s}$$

da wegen $\deg \underline{t} > g \quad U_{\mathbf{A}} = \underline{t}^{-1} U(\mathfrak{o}) \underline{t}.U_F$. Ferner

$$\begin{aligned}\int_{U_{\mathbf{A}}} \rho(\underline{t}.\underline{u}.j)^{-1-s}\, d\underline{u} &= \int_{U_{\mathbf{A}}} \rho(\underline{u}.\underline{t}.j)^{-1-s} |\underline{t}|^{-2}\, d\underline{u} = \\ \int_{U_{\mathbf{A}}} \rho(\underline{u}.j.\underline{t}^{-1})^{-1-s} |\underline{t}|^{-2}\, d\underline{u} &= |\underline{t}|^{-1+s} \int_{U_{\mathbf{A}}} \rho(\underline{u}.j.)^{-1-s}\, d\underline{u}\end{aligned}$$

also

$$E(\underline{t}, 1, \omega_s) = |\underline{t}|^{-1-s} + c(s) \cdot |\underline{t}|^{-1+s}$$

mit

$$c(s) = \int_{U_{\mathbf{A}}} \rho(\underline{u}.j)^{-1-s}\, d\underline{u} = q^{1-g} \prod_v c_v(s)$$

wo

$$c_v(s) = \int_{U_v} \rho(u.j)^{-1-s}\, d_1 u$$

mit dem normierten Maß $d_1 u$ auf $U_v \simeq F_v$, $\mathrm{vol}_{d_1 u}(\mathfrak{o}_v) = 1$.
Wenn wir $F_v = \mathfrak{o}_v \cup \bigcup_{n<0} \pi^n \mathfrak{o}_v^\times$ disjunkt zerlegen, ergibt sich

$$c_v(s) = 1 + \sum_{n>0} \int_{\mathfrak{o}_v^\times} \rho \begin{pmatrix} u\pi^{-n} & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1-s} q_v^n\, d_1 u$$

Die Faktorisierung

$$\begin{pmatrix} u\pi^{-n} & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ u^{-1}\pi^n & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u\pi^{-n} & -1 \\ 0 & u^{-1}\pi^n \end{pmatrix}$$

ergibt

$$\rho \begin{pmatrix} u\pi^{-n} & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = q_v^n$$

Ferner ist

$$\mathrm{vol}_{d_1 u}(\mathfrak{o}_v^\times) = 1 - 1/q_v$$

somit

$$c_v(s) = 1 + \sum_{n>0} (1 - \frac{1}{q_v}) q_v^{-ns} = \frac{1 - q_v^{-1-s}}{1 - q_v^{-s}}$$

und global erhalten wir also

$$c(s) = q^{1-g} \frac{L(\omega_s)}{L(\omega_{1+s})}$$

Man sieht auch, daß $E(\underline{x}, 1, \omega_s)$ für Re $s > 1$ nicht integrierbar, insbesondere nicht quadratisch integrierbar ist.

Es ist

$$L(\omega_s) = \frac{P(q^{-s})}{(1 - q^{-s})(1 - q^{1-s})}$$

wo $P(z) \in \mathbf{Z}[z]$ ein Polynom vom Grade $2g$ ist, das der Funktionalgleichung

$$P(z) = q^g z^{2g} P(q^{-1} z^{-1})$$

genügt (siehe Weil [14, VII, §6, th. 4]).

Es ist

$$c(s) = q^{1-g} \frac{P(q^{-s})}{P(q^{-1-s})} \cdot \frac{1 - q^{-1-s}}{1 - q^{1-s}}$$

und das „Residuum“

$$\begin{aligned}\lim_{s\to 1}(1-q^{1-s})c(s) &= q^{1-g}\frac{P(q^{-1})}{P(q^{-2})}\cdot(1-q^{-2}) = \\ &= q^{g-1}(q^2-1)\frac{P(1)}{P(q)}.\end{aligned}$$

Die Eisensteinreihe hat auch dies „Residuum“

$$\lim_{s\to 1}(1-q^{1-s})E(\underline{x},1,\omega_s) = q^{g-1}(q^2-1)\frac{P(1)}{P(q)}$$

Wenn nämlich $F(\underline{x})$ die Differenz von linker und rechter Seite bezeichnet, so ist F mit E und den Konstanten senkrecht zu den Spitzenformen. Andererseits zeigt die Rechnung oben, daß der konstante Fourierkoeffizient der Eisensteinreihe

$$E^0(\underline{t},1,\omega_s) = |\underline{t}|^{-1-s} + c(s)\cdot|\underline{t}|^{-1+s}$$

ist und folglich $F^0 = 0$, also ist F auch eine Spitzenform. Dann muß $F = 0$ sein, wie behauptet.

10.4. Eisensteinreihen sind automorph. Eisensteinreihen sind automorphe Formen, wie wir jetzt sehen werden.

Die spezielle Funktion $\varepsilon(\kappa,\lambda)$ (siehe Abschnitt 9) hat auf $\mathfrak{K}$ die Gestalt eines Matrixkoeffizienten:

$$\varepsilon(\underline{k},\kappa,\lambda) = d_\kappa c_{v,v}(\underline{k}) = d_\kappa < \rho(\underline{k})v, v >$$

wo v aus dem Darstellungsraum V die Eigenschaft $< v, v >= 1$, $V(\lambda_0) = \mathbf{C}.v$ hat ($\lambda_0 = \lambda|\mathfrak{o}^\times$ ist die Restriktion des Idelcharakters auf die Einheiten). Weil

$$\begin{array}{ccc} \overline{V} & \xrightarrow{\sim} & C^\infty(G_{\mathbf{A}},\kappa,\lambda) \\ v & \longmapsto & d_\kappa\, c_{v,v} \end{array}$$

ein $\mathfrak{K}$–Modulisomorphismus ist, folgt aus den Schur'schen Relationen

$$\phi_0 = \phi_0 * \varepsilon(\kappa,\lambda)\,, \quad \phi_0 = \phi|\mathfrak{K}$$

Folglich ist für alle $\phi \in C^\infty(G_{\mathbf{A}},\kappa,\lambda)$

$$\phi(\underline{x}) = \int_{\mathfrak{K}} \phi(\underline{k}).\varepsilon(\underline{k}^{-1}.\underline{x},\kappa,\lambda)\,d\underline{k}$$

Für $h \in C^\infty_{cp}(\mathfrak{K}'\backslash G_{\mathbf{A}}/\mathfrak{K}')$ ist auch $h * \phi_0 \in C^\infty_{cp}(\mathfrak{K}'\backslash G_{\mathbf{A}}/\mathfrak{K}')$ falls $\mathfrak{K}'$ passend gewählt wurde. Wegen

$$h * E(\phi,\lambda) = h * \phi_0 * E(\kappa,\lambda)$$

genügt es also, $\phi = \varepsilon(\kappa.\lambda)$ zu betrachten. Hier und im folgenden bezeichnet $E(\kappa,\lambda)$ die Eisensteinreihe zur Funktion $\varepsilon(\kappa,\lambda)$.

Nun ist aber $(h * \varepsilon(\kappa,\lambda))_0 \in C^\infty(\mathfrak{K}'\backslash\mathfrak{K})$ und transformiert sich nach endlich vielen irreduziblen Darstellungen κ' :

$$(h * \varepsilon(\kappa,\lambda))_0 = \sum_{\kappa'}(e_{\kappa'} * h * \varepsilon(\kappa,\lambda))_0$$

$$h * E(\kappa,\lambda) = E(h * \varepsilon(\kappa,\lambda),\lambda) = \sum_{\kappa'}(e_{\kappa'} * h * \varepsilon(\kappa,\lambda))_0 * E(\kappa',\lambda)$$

wo über die selbe endliche Menge von Klassen κ', die in $C^\infty(\mathfrak{K}'\backslash\mathfrak{K})$ vorkommen, summiert wird. Also ist

$$C^\infty_{cp}(\mathfrak{K}'\backslash G_{\mathbf{A}}/\mathfrak{K}') * E(\phi,\lambda)$$

immer endlich dimensional.

10.5. Funktionalgleichung und Rationalität. Analog zur Tate Theorie der Hecke L–Reihen einer Variablen (Weil [14, VII, §4]), lassen sich mit Bruhat–Schwartz–Funktionen in zwei Variablen

$$\phi \in C^\infty_{cp}(\mathbf{A} \oplus \mathbf{A}, \mathbf{C})$$

Funktionen

$$L(\phi, \lambda) \in C^\infty(G_\mathbf{A}, \lambda)$$

aus der Hauptserie definieren :

$$L(\underline{x}, \phi, \lambda) = \int_{T_\mathbf{A}} \phi(\underline{x}.(\underline{t}, 0)\; \omega_1\lambda(\underline{t})\, d^\times \underline{t}$$

denen nach 10.1 Eisensteinreihen

$$E(\underline{x}, \phi, \lambda) = \sum_{a \in G_F/B_F} L(\underline{x}.a, \phi, \lambda)$$

zugeordnet sind.

Es sei wie in 7.1

$$\tau : \mathbf{A}/F \longrightarrow \mathbf{S}_1$$

ein nichttrivialer Charakter auf $\mathbf{A}/F$ und $\widehat{\phi}$ folgende Fouriertransformierte

$$\widehat{\phi}(\underline{\hat{u}}, \underline{\hat{v}}) = \int_\mathbf{A}\int_\mathbf{A} \phi(\underline{u}, \underline{v})\tau(\underline{\hat{u}}.\underline{v} - \underline{u}.\underline{\hat{v}})\, d\underline{u}\, d\underline{v}$$

Es ist dann $\widehat{\widehat{\phi}} = \phi$ und $\phi \mapsto \widehat{\phi}$ mit der Gruppenoperation vertauschbar (weil $\det \underline{x} = \ 1)$:

$$\underline{x}.\widehat{\phi} = \widehat{\underline{x}.\phi}$$

Für eine Funktion in einer Variablen $\alpha \in C^\infty_{cp}(\mathbf{A})$ gilt für die L–Funktion

$$L(\alpha, \lambda) = \int_{\mathbf{A}^\times} \alpha(\underline{t})\lambda(\underline{t})\, d^\times \underline{t}$$

die Funktionalgleichung (vgl. [14, VII, §5, th. 2])

$$L(\alpha, \lambda) = L(\widehat{\alpha}, \omega_1\lambda^{-1})$$

Hieraus folgt eine Funktionalgleichung der L–Funktion in zwei Variablen :

$$\int_{U_\mathbf{A}} L(\underline{x}.\underline{u}.j, \phi, \lambda)\, d\underline{u} = L(\underline{x}, \widehat{\phi}, \lambda^{-1})$$

Es genügt $\underline{x} = 1$ zu betrachten (ersetze ϕ durch $\underline{x}.\phi$). Mit $\alpha(\underline{t}) = \int_\mathbf{A} \phi(\underline{u}, \underline{t})\, d\underline{u}$ ist die linke Seite gerade $L(\alpha, \lambda)$ und die rechte $L(\widehat{\alpha}, \omega_1\lambda^{-1})$ wegen $\widehat{\alpha}(\underline{t}) = \widehat{\phi}(\underline{t}, 0)$.

Die Funktionalgleichung der E–Funktionen lautet

$$E(\underline{x}, \phi, \lambda) = E(\underline{x}, \widehat{\phi}, \lambda^{-1})$$

und wird analog zur Methode für $L(\alpha, \lambda)$ mithilfe der Poissonformel

$$\sum_{F^2} \phi(a, b) = \sum_{F^2} \widehat{\phi}(a, b)$$

bewiesen. Ohne Einschränkung sei wieder $\underline{x} = 1$.

$$\begin{aligned}
E(1, \phi, \lambda) &= L(1, \phi, \lambda) + \sum_{u \in U_F} L(u.j, \phi, \lambda) \\
&= \int_{T_\mathbf{A}/T_F} \Big(\sum_{t \in F^\times} \big(\phi(t.\underline{t}, 0) + \sum_{u \in F} \phi(t.\underline{t}.u, t.\underline{t})\big)\Big)\omega_1\lambda(\underline{t})\, d^\times \underline{t} \\
&= \int_{T_\mathbf{A}/T_F} \Big(\sum_{(a,b) \neq (0,0)} \phi(\underline{t}.a, \underline{t}.b)\Big)\omega_1\lambda(\underline{t})\, d^\times \underline{t}
\end{aligned}$$

Die Summe im Integranden ist endlich und der Träger als Funktion von $\underline{t}$ in einer Menge $T_{\mathbf{A}}(d)$ enthalten.

Sei mit $T^n_{\mathbf{A}} := \{\underline{t} | \deg \underline{t} = n\}$

$$I_n(\phi,\lambda) := \int_{T^n_{\mathbf{A}}/T_F} \Big(\sum_{F^2-\{0\}} \phi(\underline{t}.a,\underline{t}.b)\Big) \omega_1 \lambda(\underline{t})\, d^\times \underline{t}$$

Wegen der Kompaktheit von $T^n_{\mathbf{A}}/T_F$ existieren diese Integrale immer und sind überall holomorph in λ ; ferner ist $I_n = 0$ für kleine n.

Aus der Poissonformel

$$\sum_{(a,b)\neq(0,0)} \phi(\underline{t}.a,\underline{t}.b) = |\underline{t}|^{-2} \sum_{(a,b)\neq(0,0)} \widehat{\phi}(\underline{t}^{-1}.a,\underline{t}^{-1}.b) + |\underline{t}|^{-2}\widehat{\phi}(0) - \phi(0)$$

folgt

$$I_n(\phi,\lambda) = I_{-n}(\widehat{\phi},\lambda^{-1}) + \widehat{\phi}(0)\int_{T^n_{\mathbf{A}}/T_F} \omega_{-1}\lambda(\underline{t})\, d^\times\underline{t} - \phi(0)\int_{T^n_{\mathbf{A}}/T_F} \omega_1\lambda(\underline{t})\, d^\times \underline{t}$$

und folglich für große n

$$I_n(\phi,\lambda) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } \lambda|T^0_{\mathbf{A}} \neq 1 \text{ ist,} \\ h\widehat{\phi}(0)(qz)^n - h\phi(0)(q^{-1}z)^n & \text{wenn } \lambda|T^0_{\mathbf{A}} = 1 \text{ ist} \end{cases}$$

Im zweiten Fall ist λ von der Form ω_s, also durch $\lambda(\underline{t}) = z^{\deg \underline{t}}$, $z = q^{-s}$, gegeben. Hier ist wie früher $h = \mathrm{card}(T^0_{\mathbf{A}}/T_{\mathfrak{o}}T_F) = \mathrm{vol}_{d^\times \underline{t}}(T^0_{\mathbf{A}}/T_F) = P(1)$ die Anzahl der rationalen Punkte der Jacobi–Varietät.

$$\begin{aligned} E(1,\phi,\lambda) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} I_n(\phi,\lambda) \quad &= \quad \sum_{n<0} I_n(\phi,\lambda) + \sum_{n\leq 0} I_n(\widehat{\phi},\lambda^{-1}) \ + \\ &+ \quad \Big[h\widehat{\phi}(0)(qz)^n - h\phi(0)(q^{-1}z)^n\Big] \end{aligned}$$

wobei der Ausdruck $\big[\ldots\big]$ nur für $\lambda = z$ auftaucht (i.e. $\lambda|T^0_{\mathbf{A}} = 1$). Wenn wir wieder ϕ durch $\underline{x}^{-1}.\phi$ ersetzen und definieren $I_n(\underline{x},\phi,\lambda) := I_n(\underline{x}^{-1}.\phi,\lambda)$, erhalten wir schließlich

$$E(\underline{x},\phi,\lambda) = \sum_{n<0} I_n(\underline{x},\phi,\lambda) + \sum_{n\leq 0} I_n(\underline{x},\widehat{\phi},\lambda^{-1}) + \left[\frac{h\widehat{\phi}(0)}{1-qz} - \frac{h\phi(0)}{1-q^{-1}z}\right]$$

der letzte Term nur auf der Zusammenhangskomponente Ω° der $1 = \omega_0$.

Damit ist $E(\phi,\lambda)$ analytisch fortgesetzt. Diese Eisensteinreihen sind auf allen Komponenten bis auf die Zusammenhangskomponente der 1 holomorph in λ. Auf Ω° treten evtl. einfache Pole auf, mit von $\underline{x}$ unabhängigen Residuen bei $\lambda = \omega_1$, falls $\widehat{\phi}(0) \neq 0$, und bei $\lambda = \omega_{-1}$, falls $\phi(0) \neq 0$.

$E(\phi,\lambda) = E(\widehat{\phi},\lambda^{-1})$ liest man unmittelbar ab.

Jetzt betrachten wir eine Klasse $\kappa \in \mathcal{E}(\mathfrak{K}/\mathfrak{B})$ und konstruieren eine spezielle Funktion ϕ_κ wie folgt:

Für $\kappa = 1$ soll $\phi = \chi_{\mathfrak{o}\oplus\mathfrak{o}}$ = charakteristische Funktion von $\mathfrak{o}\oplus\mathfrak{o}$ sein (bei anderer Wahl einer maximal kompakten Untergruppe von $G_{\mathbf{A}}$ wird statt $\mathfrak{o}\oplus\mathfrak{o}$ ein anderes Vektorbündel genommen, dessen Stabilisator diese Gruppe ist).

Für eine Stelle v mit $\kappa_v \neq 1$ soll ϕ_v auf $\mathfrak{o}_v \oplus \mathfrak{o}_v \backslash \mathfrak{p}_v \oplus \mathfrak{p}_v = \mathfrak{K}_v.(1,0)$ konzentriert sein und $\phi_v(k_v.(1,0)) = \varepsilon(k_v,\kappa_v)$ (die Funktion $\varepsilon(\kappa,\lambda)$ ist auf $\mathfrak{K}_v$ unabhängig von λ, weil $\lambda_0 = \lambda|\mathfrak{o}_v^\times = 1$ unverzweigt sein soll).

Wenn $\delta = \mathrm{ord}_v\,\tau$ ist, so ist klar, daß $\widehat{\phi}_v$ auf $\pi_v^{-\delta-1}\mathfrak{o}_v \oplus \pi_v^{-\delta-1}\mathfrak{o}_v \backslash \pi_v^{-\delta}\mathfrak{o}_v \oplus \pi_v^{-\delta}\mathfrak{o}_v$ konzentriert ist und sich unter $\mathfrak{K}_v$ wie κ_v transformiert und sogar (links) $\mathfrak{B}_v$–invariant ist, folglich bis auf einen Faktor mit der auf die Menge $\mathfrak{K}_v.(\pi_v^{-\delta-1},0)$ translatierten Funktion ϕ_v übereinstimmt.

Nach Konstruktion ist

$$L(\underline{x},\phi_\kappa,\lambda) = L(1,\phi_\kappa,\lambda)\varepsilon(\underline{x},\kappa,\lambda)\frac{1}{d_\kappa}$$

mit

$$\begin{aligned} L(1,\phi_\kappa,\lambda) &= (q-1)\prod_{v,\kappa_v=1}\int_{F_v^\times}\phi_v(t_v,0)\omega_1\lambda(t_v)\,d^\times t_v \\ &= (q-1)\prod_{v,\kappa_v=1}L_v(\omega_1\lambda) \\ &= (q-1)L(\omega_1\lambda)\prod_{v,\kappa_v\neq 1}(1-\omega_1\lambda(v)) \end{aligned}$$

mit dem lokalen L–Faktor $L_v(\lambda) = (1-\lambda(v))^{-1}$.

Bemerkung: Alles dies macht übrigens auch in der verzweigten Situation Sinn: dann ist eben $\lambda(v) = 0$ und der Euler–Faktor an dieser Stelle ist $L_v(\lambda) = 1$.

Summation über G_F/B_F liefert jetzt

$$E(\underline{x},\phi,\lambda) = L(1,\phi_\kappa,\lambda).E(\underline{x},\kappa,\lambda)\frac{1}{d_\kappa}$$

womit die Eisensteinreihen zu irreduziblen nicht cuspidalen Darstellungen von $\mathfrak{K}$ (zumindest die aus $\mathcal{E}(\mathfrak{K}/\mathfrak{B})$) als **rationale** Funktionen in λ dargestellt und zugleich analytisch fortgesetzt sind. Ferner gilt die **Funktionalgleichung**

$$E(\underline{x},\kappa,\lambda) = c(\kappa,\lambda)E(\underline{x},\kappa,\lambda^{-1})$$

mit $c(\kappa,\lambda) = L(1,\widehat{\phi}_\kappa,\lambda^{-1})/L(1,\phi_\kappa,\lambda)$.

Eine weitere Formel für $c(\kappa,\lambda)$ ergibt sich bei Betrachtung des konstanten Fourierkoeffizienten der E–Reihen

$$\begin{aligned} E^0(\underline{x},\phi,\lambda) &= L(\underline{x},\phi,\lambda) + \int_{U_\mathbf{A}} L(\underline{x}.\underline{u}.j,\phi,\lambda)\,d\underline{u} \\ &= L(\underline{x},\phi,\lambda) + L(\underline{x},\widehat{\phi},\lambda^{-1}) \end{aligned}$$

nach der Funktionalgleichung der L–Reihen. Durch Vergleich findet man für

$$E^0(\underline{x},\kappa,\lambda) = \varepsilon(\underline{x},\kappa,\lambda) + \int_{U_\mathbf{A}} \varepsilon(\underline{x}.\underline{u}.j,\kappa,\lambda)\,d\underline{u}$$

$$\int_{U_\mathbf{A}} \varepsilon(\underline{x}.\underline{u}.j,\kappa,\lambda)\,d\underline{u} = d_\kappa L(\underline{x},\widehat{\phi},\lambda^{-1})/L(1,\phi,\lambda)$$

und für $\underline{x} = 1$ also

$$c(\kappa,\lambda) = \frac{1}{d_\kappa}\int_{U_\mathbf{A}} \varepsilon(\underline{u}.j,\kappa,\lambda)\,d\underline{u}$$

Für die triviale Darstellung haben wir diese Funktion schon einmal berechnet (in 10.3). Aus der Eindeutigkeit der ε–Funktion ergibt sich andererseits

$$\int_{U_\mathbf{A}} \varepsilon(\underline{x}.\underline{u}.j,\kappa,\lambda)\,d\underline{u} = c(\kappa,\lambda)\varepsilon(\underline{x},\kappa,\lambda^{-1})$$

denn die linke Seite ist als Funktion in $\underline{x}$ ein Vielfaches von $\varepsilon(\underline{x},\kappa,\lambda^{-1})$ und bei $\underline{x} = 1$ ergibt sich der Faktor zu $c(\kappa,\lambda)$.

10.6. Projektion E auf das kontinuierliche Spektrum. Aus der Zerlegung

$$\begin{pmatrix}1 & u\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1/u & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u & 0\\ 0 & 1/u\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1/u\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

folgt

$$U_F.j \subset \mathfrak{K}T_{\mathbf{A}}^{-}U_{\mathbf{A}}$$

mit $T_{\mathbf{A}}^{-}=\{\underline{t}|\deg \underline{t}\le 0\}$.

Wenn $f: G_{\mathbf{A}}/G_F \longrightarrow \mathbf{C}$ einen kompakten Träger hat, etwa

$$C.G_F \qquad \text{mit } C\subset G_{\mathbf{A}} \text{ kompakt,}$$

so liegt der Träger von f^0 in

$$C.G_F.U_{\mathbf{A}} = C.(B_F\cup U_F.j.B_F).U_{\mathbf{A}}\subset C.\mathfrak{K}.T_{\mathbf{A}}^{-}.B_F$$

Folglich konvergiert das Integral

$$\widehat{f}(\underline{x},\lambda)=\int_{T_{\mathbf{A}}/T_F} f^0(\underline{x}.\underline{t})\omega_1\lambda(\underline{t})\,d^{\times}\underline{t}$$

das über $|\underline{t}|\ge$ konst. gebildet wird, für $\mathrm{Re}(\omega_1\lambda)<0$ absolut.
$\widehat{f}(\lambda)$ liegt in der Hauptserie und läßt sich analytisch fortsetzen:

$$(1)\qquad \int_{G_{\mathbf{A}}/G_F} E(\underline{x},\kappa,\lambda^{-1})f(\underline{x})\,d\underline{x}=\int_{G_{\mathbf{A}}/B_F}\varepsilon(\underline{x},\kappa,\lambda^{-1})f(\underline{x})\,d\underline{x}=$$

$$(2)\qquad =\int_{\mathfrak{K}}\int_{T_{\mathbf{A}}/T_F}\int_{U_{\mathbf{A}}/U_F}\varepsilon(\underline{k},\kappa)\omega_{-1}\lambda(\underline{t})f(\underline{k}.\underline{t}.\underline{u})|\underline{t}|^2\,d\underline{k}\,d^{\times}\underline{t}\,d\underline{u}=$$

$$(3)\qquad =\int_{\mathfrak{K}}\varepsilon(\underline{k},\kappa)\widehat{f}(\underline{k},\lambda)\,d\underline{k}$$

für $\mathrm{Re}\,\lambda<-1$. Mit den Eisensteinreihen ist auch $\widehat{f}(\lambda)$ analytisch fortgesetzt.

Die Orthogonalprojektion auf das kontinuierliche Spektrum $L_1^2(G_{\mathbf{A}}/G_F,\mathbf{C})$ in der Zerlegung

$$L^2(G_{\mathbf{A}}/G_F,\mathbf{C})=L_0^2(G_{\mathbf{A}}/G_F,\mathbf{C})\oplus\mathbf{C}\oplus L_1^2(G_{\mathbf{A}}/G_F,\mathbf{C})$$

werde mit E bezeichnet. Es gilt

$$Ef(\underline{x})=\frac{1}{2}\int_{\Omega_0}E(\underline{x},\widehat{f}(\lambda))\,d_0\lambda$$

wie wir jetzt für solche f zeigen wollen, die sich nach Darstellungen aus $\mathcal{E}(\mathfrak{K}/\mathfrak{B})$ transformieren.

Für solche f verschwindet natürlich $\widehat{f}(\lambda)$ auf allen Komponenten, die nicht in Λ liegen und das obige Integral braucht nur über Λ_0 gebildet zu werden.

Es muß gezeigt werden, daß

(1) für $f\in\mathcal{A}_0(G_{\mathbf{A}}/G_F,\mathbf{C})$ $\quad Ef=0$
(2) für $f\in C_\theta^\infty(G_{\mathbf{A}}/G_F,\mathbf{C})$ $\quad Ef=f-P_{\mathbf{C}}f$ gilt, wo $P_{\mathbf{C}}f=<f,1>/<1,1>$ die Projektion auf $\mathbf{C}$ sei.

1 ist natürlich klar.

Zu 2: sei $\varphi\in C_{cp}^\infty(G_{\mathbf{A}}/B_FU_{\mathbf{A}},\kappa)$, $\quad\kappa\in\mathcal{E}(\mathfrak{K}/\mathfrak{B})$. Dann ist (vgl. 10.4)

$$\widehat{\varphi}(\underline{x},\lambda)=\int_{\mathfrak{K}}\widehat{\varphi}(\underline{k},\lambda)\varepsilon(\underline{k}^{-1}\underline{x},\kappa,\lambda)\,d\underline{k}$$

und für Re $\lambda > 1$

$$\int_{U_{\mathbf{A}}} \widehat{\varphi}(\underline{x}.\underline{u}.j,\lambda)\,d\underline{u} = \int_{\mathfrak{K}} \widehat{\varphi}(\underline{k},\lambda) \int_{U_{\mathbf{A}}} \varepsilon(\underline{k}^{-1}\underline{x}.\underline{u}.j,\kappa,\lambda)\,d\underline{u}\,d\underline{k} =$$

$$= \int_{\mathfrak{K}} \widehat{\varphi}(\underline{k},\lambda)c(\kappa,\lambda)\varepsilon(\underline{k}^{-1}\underline{x},\kappa,\lambda)\,d\underline{k} = c(\kappa,\lambda)\widehat{\varphi}(\underline{x},\lambda^{-1})$$

Der konstante Foruierkoeffizient der θ–Reihe ist

$$\theta^0_\varphi(\underline{x}) = \varphi(\underline{x}) + \int_{U_{\mathbf{A}}} \varphi(\underline{x}.\underline{u}.j)\,d\underline{u}$$

Damit wird

$$\widehat{\theta}_\varphi(\underline{x},\lambda) = \widehat{\varphi}(\underline{x},\lambda) + \int_{U_{\mathbf{A}}} \widehat{\varphi}(\underline{x}.\underline{u}.j,\lambda^{-1})\,d\underline{u} \qquad \text{für Re } \lambda < -1$$

Also (nach analytischer Fortsetzung jetzt für alle λ)

$$\widehat{\theta}_\varphi(\underline{x},\lambda) = \widehat{\varphi}(\underline{x},\lambda) + c(\kappa,\lambda^{-1})\widehat{\varphi}(\underline{x},\lambda^{-1})$$

$$\begin{aligned} E\theta_\varphi(\underline{x}) &= \frac{1}{2}\int_{\Lambda_0} E\big(\underline{x},\widehat{\theta}_\varphi(\underline{x},\lambda)\big)\,d_0\lambda \\ &= \frac{1}{2}\int_{\Lambda_0} \Big(E\big(\underline{x},\widehat{\varphi}(\lambda)\big) + c(\kappa,\lambda^{-1})E\big(\underline{x},\widehat{\varphi}(\lambda^{-1})\big)\Big)\,d_0\lambda \\ &= \int_{\Lambda_0} E\big(\underline{x},\widehat{\varphi}(\lambda)\big)\,d_0\lambda \end{aligned}$$

wegen der Funktionalgleichung der Eisensteinreihen. Wenn $\kappa \neq 1$ ist, ergibt sich für $\sigma > 1$

$$E\theta_\varphi(\underline{x}) = \int_{\Lambda_\sigma} E\big(\underline{x},\widehat{\varphi}(\lambda)\big)\,d_\sigma\lambda = \theta_\varphi(\underline{x})$$

weil beim Verschieben der Integration nach rechts keine Pole auftauchen.

Andererseits ist

$$< \theta_\varphi, 1 >= \int_{G_{\mathbf{A}}/G_F} \theta_\varphi(\underline{x})\,d\underline{x} = \int_{G_{\mathbf{A}}/B_F} \varphi(\underline{x})\,d\underline{x} = \int_{\mathfrak{K}} \widehat{\varphi}(\underline{k},\omega_1)\,d\underline{k}$$

und für $\kappa \neq 1$ ist dies auch $= 0$.

Für $\kappa = 1$ hat die Eisensteinreihe bei $\lambda = \omega_1$ einen einfachen Pol, wie wir sahen. Mit der Berechnung des Residuums in §10.3 auf Seite 30 ist

$$\begin{aligned} E\theta_\varphi(\underline{x}) &= \int_{\Lambda_0} \widehat{\varphi}(\lambda)E(\underline{x},1,\lambda)\,d_0\lambda = \\ &= \int_{\Lambda_\sigma} \widehat{\varphi}(\lambda)E(\underline{x},1,\lambda)\,d_\sigma\lambda - \frac{1}{P(1)}(1-q^{1-s})\widehat{\varphi}(\omega_s)E(\underline{x},1,\omega_s)|_{s=1} = \\ &= \theta_\varphi(\underline{x}) - q^{g-1}(q^2-1)\frac{1}{P(q)}\widehat{\varphi}(\omega_1) \end{aligned}$$

und wir sind fertig, weil $\mathrm{vol}_{\,d\underline{x}}(G_{\mathbf{A}}/G_F) = q^{1-g}P(q)/(q^2-1)$ (Harder [6, 3.3]).

10.7. Nenner von E. Es ist $\varepsilon(\underline{k}^{-1},\kappa) = \overline{\varepsilon(\underline{k},\kappa)}$. Für die Anwendung, die wir im Auge haben, genügen solche κ mit reellen Werten (definiert $/\mathbf{R}$):

$$\varepsilon(\underline{k}^{-1},\kappa) = \varepsilon(\underline{k},\kappa)$$

was wir jetzt annehmen. Das ist eine echte Einschränkung, wie man an den Darstellungen sehen kann – aber sie soll uns lediglich eine Reihe lästiger Konjugationszeichen ersparen ; das folgende bleibt mit den entsprechenden Modifikationen allgemein gültig.

Dann ist für $g \in C^\infty(\mathfrak{K},\kappa)$

$$g(\underline{k}) = \int_{\mathfrak{K}} g(\underline{k}.\underline{k}_1^{-1})\varepsilon(\underline{k}_1,\kappa)\,d\underline{k}_1 = \int_{\mathfrak{K}} g(\underline{k}.\underline{k}_1)\varepsilon(\underline{k}_1,\kappa)\,d\underline{k}_1$$

Für eine $\mathfrak{K}$–endliche Funktion $f \in C_{cp}(G_{\mathbf{A}}/G_F)$ ist

$$E\big(\underline{x},\widehat{f}(\lambda)\big) = \sum_{\kappa}\int_{\mathfrak{K}} e_\kappa * \widehat{f}(\underline{k},\lambda)E(\underline{k}^{-1}\underline{x},\kappa,\lambda)\,d\underline{k}$$

Für $g = e_\kappa * \widehat{f}(\lambda)$ wird dann (mit Gleichung 3 auf Seite 34)

$$e_\kappa * \widehat{f}(\underline{k},\lambda) = \int_{\mathfrak{K}} \widehat{f}(\underline{k}.\underline{k}_1)\varepsilon(\underline{k}_1,\kappa)\,d\underline{k}_1 = \int_{G_{\mathbf{A}}/G_F} E(\underline{z},\kappa,\lambda^{-1})f(\underline{k}.\underline{z})\,d\underline{z}$$

und dies setzen wir in die Formel oben ein und erhalten

$$\begin{aligned} E\big(\underline{x},\widehat{f}(\lambda)\big) &= \sum_{\kappa}\int_{\mathfrak{K}}\int_{G_{\mathbf{A}}/G_F} E(\underline{z},\kappa,\lambda^{-1})f(\underline{k}.\underline{z})E(\underline{k}^{-1}\underline{x},\kappa,\lambda)\,d\underline{k}\,d\underline{z} = \\ &= \sum_{\kappa}\int_{\mathfrak{K}}\int_{G_{\mathbf{A}}/G_F} E(\underline{k}.\underline{x},\kappa,\lambda)E(\underline{k}.\underline{z},\kappa,\lambda^{-1})f(\underline{z})\,d\underline{z}\,d\underline{k} \end{aligned}$$

und erhalten für die Projektion von f

$$Ef(\underline{x}) = \frac{1}{2}\sum_{\kappa}\int_{\mathfrak{K}}\int_{\Lambda_0} E(\underline{k}.\underline{x},\kappa,\lambda)\int_{G_{\mathbf{A}}/G_F} E(\underline{k}.\underline{z},\kappa,\lambda^{-1})f(\underline{z})\,d\underline{z}\,d_0\lambda\,d\underline{k}$$

Für die charakteristische Funktion

$$f = \delta_{\mathfrak{K}'\underline{x}_0 G_F} \qquad \mathfrak{K}' \subset \mathfrak{K}$$

und einen Normalteiler $\mathfrak{K}'' < \mathfrak{K}$, $\mathfrak{K}'' \subset \mathfrak{K}'$, der so gewählt sei, daß er im Kern der vorkommenden κ liegt, (d.h. $\mathfrak{K}'' \subset \bigcap \underline{k}\mathfrak{K}'\underline{k}^{-1}$) ist

$$\int_{G_{\mathbf{A}}/G_F} E(\underline{k}.\underline{z},\kappa,\lambda^{-1})f(\underline{z})\,d\underline{z} = \sum_{\mathfrak{K}''\backslash G_{\mathbf{A}}/G_F} \frac{\mathrm{vol}(\mathfrak{K}'')}{|\mathfrak{K}''^{\underline{z}} \cap G_F|}E(\underline{k}.\underline{z},\kappa,\lambda^{-1})f(\underline{z}) =$$

$$= \sum_{\mathfrak{K}''\backslash\mathfrak{K}'} \frac{\mathrm{vol}(\mathfrak{K}'')}{|\mathfrak{K}''^{\underline{x}_0} \cap G_F|}\frac{1}{|\mathfrak{K}'^{\underline{x}_0} \cap G_F|}E(\underline{k}.\underline{k}'.\underline{x}_0,\kappa,\lambda^{-1})$$

Welcher Natur sind die Primteiler ℓ von $|\mathfrak{K}^{\underline{x}_0} \cap G_F|$?

Das heißt ja, $\exists a \in \mathfrak{K}^{\underline{x}_0} \cap G_F$ der Ordnung ℓ, folglich $\exists \underline{k} \in \mathfrak{K}$ mit $k_v^\ell = 1$, $k_v \neq 1$ für alle v.

Betrachte die Folge

$$1 \to \mathfrak{K}_v(v) \longrightarrow \mathfrak{K}_v \longrightarrow SL(2,\mathbf{F}_{\mathrm{N}v}) \to 1$$

Angenommen, es wäre $k_v \equiv 1 \pmod v$. Dann muß die Spur $s = 2$ sein, andernfalls würde $k_v^2 = s.k_v - 1_2$ mit $k_v^\ell = 1_2$ eine algebraische Gleichung für die Transzendente s liefern. Aus $s = 2$ folgt aber wegen $k_v \neq 1$, daß das Minimalpolynom $T^2 - 2T + 1 = (T-1)^2$ ein Teiler von $T^\ell - 1$ ist, ein Widerspruch (wenn nicht gerade $\ell = p$ ist).

Damit muß notwendigerweise das Bild von k_v in $SL(2,\mathbf{F}_{\mathrm{N}v}) \neq 1$ sein, d.h.

$$\ell \mid \mathrm{N}v(\mathrm{N}v-1)(\mathrm{N}v+1)$$

Wenn $\ell \neq p$ ist, muß also $\mathrm{N}v^2 \equiv 1 \pmod \ell$ sein. Dann ist auch

$$\prod \mathrm{N}v^{2a_v} = q^{2\deg\mathfrak{m}} = q^2 \equiv 1 \pmod \ell$$

für einen Divisor $\mathfrak{m} = \sum a_v v$ vom Grad 1.

Die Teiler von $|\mathfrak{K}^{\underline{x}} \cap G_F|$ sind also die Primteiler von $q(q^2-1) = |\mathfrak{K} \cap G_F| = \operatorname{card} SL(2, \mathbf{F}_q)$. Diese sollen als trivial gelten.

Es bleibt noch

$$\int_{\Lambda_0} E(\underline{x}, \kappa, \lambda) E(\underline{z}, \kappa, \lambda^{-1})\, d_0\lambda$$

auszuwerten.

Wir schreiben die Eisensteinreihen als rationale Funktionen und verwenden die Funktionalgleichung :

$$\int_{\Lambda_0} \frac{E(\underline{x}, \phi, \lambda) E(\underline{z}, \phi, \lambda)}{c(\kappa, \lambda) L(1, \phi, \lambda) L(1, \phi, \lambda)}\, d_0\lambda$$

und die Strategie ist, den Integrationsweg nach rechts $\sigma > 1$ zu verschieben und dort den Nenner in eine Potenzreihe von $z = \lambda(\underline{t}_1)$ zu entwickeln, wo $\underline{t}_1$ ein festes Idel vom Grade 1 sei. Das Integral über Λ_σ bekommt man, indem man den Koeffizienten von z^0 sucht und durch $P(1)$ teilt: $d_\sigma\lambda = \dfrac{1}{P(1)} \cdot \dfrac{1}{2\pi i} \cdot \dfrac{dz}{z}$ auf jeder Komponenten.

Beim Verschieben des Integrationsweges müssen wir natürlich die Residuen der in $0 < \sigma \leq 1$ liegenden Pole des Integranden aufsammeln. Dazu sehen wir uns erst den Nenner im Integral an : bis auf exponentielle Faktoren ist er

$$L(\omega_1\lambda) L(\lambda) \prod_{\kappa_v \neq 1} \big(1 - \omega_1 \lambda(v)\big)\big(1 - \omega_{-1}\lambda(v)\big) =$$

$$= \frac{\prod_i (1 - \omega_i(\chi) q^{-1} z)(1 - \omega_i(\chi) z)}{[(1 - q^{-1}z)(1 - qz)(1 - z)^2]} \prod_{\kappa_v \neq 1} (1 - \chi(v)(q^{-1}z)^{\deg v})(1 - \chi(v)(qz)^{\deg v})$$

wobei die Klammer $[\cdots]$ bedeutet, daß der Nenner nur für $\lambda \mid T^0_{\mathbf{A}} = \chi = 1$ auftaucht.

Die $\omega_i(\chi)$ sind $2(g-1)$ (resp. $2g$) ganze algebraische Zahlen vom Betrag $q^{1/2}$ (resp. für $\chi = 1$).

Die Nullstellen für $|z| = q^{-\sigma}$, $0 < \sigma \leq 1$, d.h. $\frac{1}{q} \leq |z| < 1$, sind

$$\frac{1}{\omega_i(\chi)}$$

und falls $\kappa \neq 1$ ist, außerdem noch

$$\frac{1}{q} \cdot \overline{\chi(v)} \cdot \zeta$$

mit einer $d = \deg v$–ten Einheitswurzel ζ für alle v mit $\kappa_v \neq 1$. Dabei kommt auf der $\chi = 1$ Komponente $z = \frac{1}{q}$ nur vor, wenn es wenigstens zwei Stellen mit $\kappa_v \neq 1$ gibt.

Schließlich kann noch ein Residuum für $\kappa = 1$ auftauchen, das vom Zähler herkommt und auf der $\chi = 1$ Komponente Λ_1° liegt :

$$\frac{\dfrac{h}{1-qz} \cdot \dfrac{h}{1-qz}}{L(q^{-1}z)L(z)} (1 - qz)|_{z=1/q} = \text{bis auf triviale Faktoren} = \frac{h}{P(q)}$$

und für das Residuum ergibt sich bis auf triviale Faktoren $= \dfrac{1}{P(q)}$. Es können also die gleichen Nenner auftauchen, wie bei der Projektion auf die Konstanten.

Wie wir sahen, kommen in $\int_{\Lambda_\sigma} E(\underline{x}, \kappa, \lambda) E(\underline{z}, \kappa, \lambda^{-1})\, d_\sigma\lambda$ höchstens Nenner $\ell \mid P(1)$ vor (außer den trivialen $\ell \mid q(q^2-1)$).

In den Residuen können noch Nenner

- $\ell \mid P(q)$
- $\ell \mid P_\chi\bigl(\omega_i(\chi)\bigr)$ für einfache Wurzeln $\omega_i(\chi)$, sowie
- Teiler der Diskriminanten der $P_\chi = \prod_i \bigl(1 - \omega_i(\chi)z\bigr)$

vorkommen.

Es lassen sich noch weitere Aussagen für jede der oben bestimmten Nullstellen des Nenners formulieren, auf die ich hier verzichten möchte.

Teil 3

Kohomologie und automorphe Formen

11. Einleitung

In diesem Teil wird der Zusammenhang der beiden vorherigen hergestellt und als Anwendung ein Satz über das Vorkommen gewisser Nenner bei der Zerlegung automorpher Formen in Spitzenform und θ–Form bewiesen. Als Resultat folgt, daß die über $\mathbf{Q}$ definierte Zerlegung

$$L^2(G_{\mathbf{A}}/G_F) = L^2_0(G_{\mathbf{A}}/G_F) \oplus L^2_\theta(G_{\mathbf{A}}/G_F)$$

nicht über $\mathbf{Z}[\frac{1}{p}]$ definiert ist.

Wir verwenden die gleichen Bezeichnungen wie vorher, insbesondere die in 7.3.

Verabredungsgemäß soll ein *Typ* eine Partition der Stellen in drei Mengen sein:

$$V = I \cup P \cup P'$$

Im folgenden wird – wie in Teil 1 – eine endliche Menge $S \subset V$, $\operatorname{card} S \geq 2$ ausgezeichnet (die „unendlichen“ Stellen). *Zulässige* Typen

$$\sigma = (I, P, P')$$

sind solche, mit $P \supset V - S$. Insbesondere enthalten dann I und P' nur unendliche Stellen. Der Grad von σ ist $\deg \sigma = \operatorname{card} I$.

Zu jedem Typ wird

$$\mathfrak{K}^\sigma = \prod_v \mathfrak{K}^\sigma_v \subset G_{\mathbf{A}}$$

mit $\mathfrak{K}^\sigma_v = \begin{cases} \mathfrak{I}_v & \text{für } v \in I \\ \mathfrak{K}_v & \text{für } v \in P \\ \mathfrak{K}'_v & \text{für } v \in P' \end{cases}$ definiert.

Zu einem zu S primen Modul $\mathfrak{m}$ wird

$$\mathfrak{K}^\sigma_\infty = \prod_{v \in S} \mathfrak{K}^\sigma_v \qquad \mathfrak{K}_e(\mathfrak{m}) = \prod_{v \notin S} \mathfrak{K}_v(\mathfrak{m}_v) \qquad \text{Kongruenzuntergruppe}$$

und

$$\mathfrak{K}^\sigma(\mathfrak{m}) = \mathfrak{K}^\sigma_\infty \times \mathfrak{K}_e(\mathfrak{m})$$

gesetzt.

Nach dem starken Approximationssatz 7.3 ist

$$\mathfrak{K}^\sigma_\infty \backslash G_\infty / \Gamma_{\mathfrak{m}} \simeq \mathfrak{K}^\sigma(\mathfrak{m}) \backslash G_{\mathbf{A}} / G_F$$

$$x_\infty \mapsto (x_\infty, 1)$$

$\Gamma_{\mathfrak{m}} = G_{\mathbf{A}_S}(\mathfrak{m}) \cap G_F$ Kongruenzuntergruppe von Γ.

Der Raum der r–Formen zerlegt sich nach den Typen vom Grad r :

$$C^r(X/\Gamma_{\mathfrak{m}}) = \bigoplus_{\deg \sigma = r} C^\sigma(X/\Gamma_{\mathfrak{m}})$$

wobei die r–Formen vom Typ σ sich jetzt als gewisse automorphe Formen interpretieren lassen:

$$C^\sigma(X/\Gamma_{\mathfrak{m}}) = C(\mathfrak{K}^\sigma_\infty \backslash G_\infty / \Gamma_{\mathfrak{m}}) \simeq \mathcal{A}(\mathfrak{K}^\sigma(\mathfrak{m}) \backslash G_{\mathbf{A}} / G_F, \mathbf{C})$$

Insbesondere lassen sich die Randoperatoren des ersten Teils übertragen:

Sei $\varphi = (\varphi_\sigma)_\sigma$ eine (automorphe) r–Form. Dann ist ($\pm$ ist das Orientierungsvorzeichen an der Stelle v)

$$\pm (d_v \varphi)_\sigma = \varphi_{\sigma_0} - \varphi_{\sigma_1}$$

wo für $\sigma = (I, P, P')$, $v \in I$ gesetzt wurde:

$$\sigma_0 = (I - \{v\}, P \cup \{v\}, P') \quad \sigma_1 = (I - \{v\}, P, P' \cup \{v\})$$

Sei δ_v^0 (δ_v^1) die charakteristische Funktion von $\mathfrak{K}_v^0$ $(\mathfrak{K}_v^1)$ und die folgende Faltung in der v–Variablen bezüglich $\mathrm{vol}(\mathfrak{I}_v) = 1$ gebildet, dann ist

$$\begin{aligned}\pm(\delta_v\varphi)_\sigma &= \delta_v^0 * \varphi_\tau \quad \text{für } v \in P\ ,\ \tau = (I \cup \{v\}, P - \{v\}, P') \\ &= -\delta_v^1 * \varphi_\tau \quad \text{für } v \in P',\ \tau = (I \cup \{v\}, P, P' - \{v\})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\Delta_v\varphi)_\sigma &= \delta_v^0 * \varphi_\sigma + \delta_v^1 * \varphi_\sigma \qquad \text{für } v \in I \\ &= \varphi_\sigma - \delta_v^0 * \varphi_\tau \quad \text{für } v \in P,\ \tau = (I, P - \{v\}, P' \cup \{v\}) \\ &= \varphi_\sigma - \delta_v^1 * \varphi_\tau \quad \text{für } v \in P',\ \tau = (I, P \cup \{v\}, P' - \{v\})\end{aligned}$$

An den letzten beiden Formeln erkennt man die Mittelwerteigenschaft harmonischer Formen wieder. Der Laplace–Operator war orientierungsunabhängig.

12. Eisenstein r–Formen auf X/Γ

Der Raum der Darstellungen „erster Stufe“ von $\mathfrak{K}_v$

$$\begin{aligned}{}^{\mathfrak{K}_v(v)}C^\infty(\mathfrak{K}_v/\mathfrak{B}_v) &= C^\infty(\mathfrak{K}_v/\mathfrak{I}_v) \qquad \text{zerfällt in zwei irreduzible} \\ &= \mathbf{C} \oplus \mathbf{St}_v\end{aligned}$$

die triviale und die Steinberg Darstellung mit $\dim_{\mathbf{C}} \mathbf{St}_v = \mathrm{N}v$, wobei

$$f \in \mathbf{St}_v \quad \Longleftrightarrow \quad \int_{\mathfrak{K}_v} f(k)\, dk = 0$$

Zu jedem Typ $\sigma = (I, P, P')$ sei $\overline{\sigma} = (\emptyset, I \cup P, P')$ und

$$\kappa(\sigma)_v = \begin{cases} 1 & \text{für } v \notin I \\ [\mathbf{St}_v] & \text{für } v \in I \end{cases}$$

$\kappa(\sigma) = \otimes_v \kappa(\sigma)_v$ ist eine Klasse aus $\mathcal{E}(\mathfrak{K}^{\overline{\sigma}})$. Der Charakter der Steinberg Darstellung $\mathbf{St}_v$ hat ganzzahlige Werte und die Zerlegung

$$C^\infty(\mathfrak{K}_v/\mathfrak{I}_v) = \mathbf{C} \oplus \mathbf{St}_v$$

ist über $\mathbf{Z}[\frac{1}{p}]$ definiert.

Daß die maximal kompakte Gruppe $\mathfrak{K}^{\overline{\sigma}}$ an den Stellen in P' „getwistet“ ist, macht sich später noch etwas unangenehm bemerkbar, weshalb wir dann an diesen Stellen noch gewisse exponentielle Faktoren einführen müssen.

Zu $\kappa(\sigma)$ wurde in 10.5 eine spezielle Funktion

$$\phi_\sigma : \mathbf{A} \oplus \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{C}$$

definiert, die jetzt so aussieht $\phi_\sigma = \prod_v \phi_{\sigma,v}$:

$$\phi_{\sigma,v} = \begin{cases} \delta_{\mathfrak{o}_v \oplus \mathfrak{o}_v} & , v \in P \\ \delta_{\mathfrak{o}_v \oplus \mathfrak{p}_v} & , v \in P' \\ \mathrm{N}v \quad \text{auf } \mathfrak{o}_v^\times \times \mathfrak{p}_v & , v \in I \\ -1 \quad \text{auf } \mathfrak{o}_v \times \mathfrak{o}_v^\times & , v \in I \\ 0 \qquad \text{sonst} & , v \in I \end{cases}$$

Damit sind L– und E–Reihen L_σ , E_σ konstruiert, die wir uns näher ansehen wollen.

Die Berechnung der Fouriertransformierten von ϕ_σ ist elementar und ergibt

$$\widehat{\phi}_\sigma = q^{2-2g} \prod_v \widehat{\phi}_{\sigma,v}$$

mit den lokalen Faktoren

$$\widehat{\phi}_{\sigma,v}(u,v) = \phi_{\sigma,v}(\pi_v^\delta u, \pi_v^\delta v)$$

Dabei ist jedesmal $\delta = \operatorname{ord}_v \tau$. Die Berechnung der L–Reihe ergibt

$$L_\sigma = (q-1) \prod_v L_{\sigma,v}$$

mit

$$L_{\sigma,v}(1,\lambda) = \begin{cases} (1-\omega_1\lambda(v))^{-1} & \text{für } v \in P \cup P' \\ \mathrm{N}v & \text{für } v \in I \end{cases}$$

Damit hängt L_σ nur von der Menge I der Iwahoristellen des Typs σ ab

$$L_I(\lambda) := L_\sigma(1,\lambda) = (q-1)L(\omega_1\lambda(v)) \prod_v (1-\omega_1\lambda(v))\mathrm{N}v$$

Die Berechnung der L–Reihe zu $\widehat{\phi}_\sigma$ ist ebenso einfach und ergibt mit der Bezeichnung

$$L'_\sigma(\underline{x},\lambda) := L(\underline{x},\widehat{\phi}_\sigma,\lambda) = q^{2-2g} \prod_v L'_{\sigma,v}(x_v,\lambda)$$

und wenn $\underline{D} = (D_v)_v$ ein Differentialidel bezeichnet (d.h. $\operatorname{ord}_v \underline{D} = \operatorname{ord}_v \tau$),

$$L'_{\sigma,v}(1,\lambda) = \begin{cases} \omega_1\lambda(D_v^{-1})(1-\omega_1\lambda(v))^{-1} & v \in P \\ \omega_1\lambda(D_v^{-1})\lambda^{-1}(v)(1-\omega_1\lambda(v))^{-1} & v \in P' \\ \omega_1\lambda(D_v^{-1})\omega_{-1}\lambda^{-1}(v) & v \in I \end{cases}$$

also

$$L'_\sigma(1,\lambda) = \prod_{v \in I \cup P'} \lambda^{-1}(v)\lambda(\underline{D})^{-1} L_I(\lambda)$$

Der Faktor in der Funktionalgleichung der Eisensteinreihen lautet also (10.5)

$$c(\kappa(\sigma),\lambda) = \prod_{v \in I \cup P'} \lambda^{-1}(v)\lambda(\underline{D})^{-1} \prod_{v \in I} \frac{1-\omega_1\lambda^{-1}(v)}{1-\omega_1\lambda(v)} \cdot \frac{L(\omega_1\lambda^{-1})}{L(\omega_1\lambda)}$$

Wegen des Twists bei den Stellen $v \in P'$ hat die Form $(E_\sigma(\omega_s))$ nicht die gewünschten Ableitungseigenschaften. Deshalb führen wir folgende Faktoren $a_\sigma(s)$ ein

$$a_\sigma(s) = \prod_{v \in P'} \mathrm{N}v^{\frac{s+1}{2}}$$

Wir multiplizieren E_σ mit $\frac{1-q^{-s}}{q-1}$ und erhalten als konstanten Fourierkoeffizienten

$$\frac{1-q^{-s}}{q-1} E_\sigma^0(\underline{x},\omega_s) = Q_I(s)\varepsilon(\underline{x},\kappa(\sigma),\omega_s) + P_I(s)\varepsilon(\underline{x},\kappa(\sigma),\omega_{-s})b_\sigma(s)$$

mit folgenden Polynomen in q^{-s}

$$P_I(s) = P(q^{-s})(1-q^{1-s})^{-1} \prod_{v \in I} (1-(q^{s-1})^{\deg v})$$

$$Q_I(s) = P(q^{-1-s})(1-q^{-1-s})^{-1} \prod_{v \in I} (1-(q^{-1-s})^{\deg v})$$

und dem exponentiellen Faktor

$$b_\sigma(s) = q^{1-g} \prod_{v \in I \cup P'} q^{-s\deg v}$$

Die obige Eisensteinreihe werde noch mit $a_\sigma(s)$ multipliziert

$$E_I(s)_\sigma := a_\sigma(s)\frac{1-q^{-s}}{q-1}E_\sigma(\omega_s)$$

und $E_I(s) = (E_I(s)_\sigma)_\sigma$, wo σ die Typen der Gestalt $\sigma = (I,.,.)$ durchläuft, definiert eine $r = \mathrm{card}(I)$–Form, die auf die I–Zellen konzentriert ist.

Wir wollen jetzt den konstanten Fourierkoeffizienten der Ableitung $d_vE_I(s)$ ausrechnen. Dabei ist zu beachten, daß die ε–Funktionen zu verschiedenen maximal kompakten Gruppen betrachtet werden.

Sei also $v \notin I$ und

$$\begin{aligned}\sigma &= (I\cup\{v\},P,P')\\ \sigma_0 &= (I,P\cup\{v\},P')\\ \sigma_1 &= (I,P,P'\cup\{v\})\end{aligned}$$

Es ist $a_{\sigma_1}(s) = a_{\sigma_0}(s)\mathrm{N}v^{\frac{1+s}{2}}$, $b_{\sigma_1}(s) = b_{\sigma_0}(s)\mathrm{N}v^{-s}$ und

$$\varepsilon(\underline{x},\kappa(\sigma_1),\omega_s) = \begin{cases}\varepsilon(\underline{x},\kappa(\sigma_0),\omega_s) & \text{falls } x_v \in \mathfrak{I}_v.B_v\\ \mathrm{N}v^{-1-s}\varepsilon(\underline{x},\kappa(\sigma_0),\omega_s) & \text{falls } x_v \in \mathfrak{I}_v.j.B_v\end{cases}$$

Diese beiden Fälle $x_v \in \mathfrak{I}_v.B_v$ und $x_v \in \mathfrak{I}_v.j.B_v$ müssen wir unterscheiden und erhalten im ersten Fall

$$\begin{aligned}(d_vE_I^0(s))_\sigma &= a_{\sigma_0}(s)Q_I(s)\varepsilon(\underline{x},\kappa(\sigma_0),\omega_s)\cdot(1-\mathrm{N}v^{\frac{1+s}{2}})\\ &+ b_{\sigma_0}(s)a_{\sigma_0}(s)P_I(s)\varepsilon(\underline{x},\kappa(\sigma_0),\omega_{-s})\cdot(1-\mathrm{N}v^{\frac{1-s}{2}})\end{aligned}$$

und im zweiten Fall

$$\begin{aligned}(d_vE_I^0(s))_\sigma &= a_{\sigma_0}(s)Q_I(s)\varepsilon(\underline{x},\kappa(\sigma_0),\omega_s)\cdot(1-\mathrm{N}v^{\frac{-1-s}{2}})\\ &+ b_{\sigma_0}(s)a_{\sigma_0}(s)P_I(s)\varepsilon(\underline{x},\kappa(\sigma_0),\omega_{-s})\cdot(1-\mathrm{N}v^{\frac{-1+s}{2}})\end{aligned}$$

13. Nenner von E, die vorkommen müssen

Die ursprüngliche Idee, die der Konstruktion des letzten Abschnitts zugrunde lag, war, Formen zu konstruieren, die modulo ℓ geschlossen sind, um Kohomologieklassen in $H^*(\Gamma_\mathfrak{m},\mathbf{F}_\ell)$ zu finden. Man sieht an der Ableitungsformel, daß die Konstruktion für $r = \mathrm{card}(I) \geq 2$ versagt, weil dann z.B. bei $s = +1$ $P_I(1) = 0$ wird.

Andererseits gibt es in Dimension 1 keine Kohomologieklassen modulo ℓ nach einem Resultat von Serre in [11]. Dort wird im Cor. 3 von Th. 1 (S.499) nämlich gezeigt, daß

$$\Gamma_\mathfrak{m}^{ab} = \Gamma_\mathfrak{m}/[\Gamma_\mathfrak{m},\Gamma_\mathfrak{m}]$$

eine endliche p–Gruppe ist ($\mathfrak{m} \neq 1$) und folglich für $\ell \neq p$

$$H^1(\Gamma_\mathfrak{m},\mathbf{F}_\ell) = 0$$

Diese Tatsache zusammen mit der Konstruktion obiger Formen $E_I(s)$ erlaubt jetzt aber Nenner in der Zerlegung

$$L^2(G_\mathbf{A}/G_F) = L_0^2(G_\mathbf{A}/G_F)\oplus L_\theta^2(G_\mathbf{A}/G_F)$$

zu entdecken. Genauer gilt der folgende

Satz. *Es sei $\ell \neq p, 2$ eine Primzahl mit*

$$\begin{aligned}\ell &\mid P(q)\\ \ell &\nmid P(1) \quad \textit{und} \quad \ell \nmid \deg v(\mathrm{N}v-1) \quad \textit{für ein } v\end{aligned}$$

Dann gibt es automorphe Formen mit kompaktem Träger

$$f : G_{\mathbf{A}}/G_F \longrightarrow \mathbf{Z}[\frac{1}{p}]$$

für die in der Zerlegung $f = f_0 + f_1$ in eine Spitzenform f_0 und $f_1 \perp f_0$ Nenner ℓ effektiv vorkommen, d.h. nicht–ℓ–ganze Werte vorkommen.

Beweis: Wir betrachten die Form $E_v(1)$, die $\not\equiv 0 \mod \ell$ ist, da $\ell \nmid P(1)$. Andererseits ist $d\,E_v^0(1) \equiv 0 \mod \ell$ und wir übertragen dies Ergebnis auf die Form $d\,E_v(1)$ selbst, unter der Annahme, daß die Aussage des Satzes falsch ist.

$f : G_{\mathbf{A}}/G_F \longrightarrow \mathbf{Z}[\frac{1}{p}]$ sei eine beliebige Form mit kompaktem Träger, linksinvariant unter $\mathfrak{K}^\sigma(\mathfrak{m})$, $\sigma = (\{v\}, P, P')$.

Da sich $d\,E_v(1)_\sigma$ an der Stelle v wie $\mathbf{St}_v$ transformiert, ist es senkrecht zu den Konstanten. Wir zerlegen

$$f = e_{id} * f + e_{\mathbf{St}_v} * f$$

was höchstens Nenner p verursacht; ohne Einschränkung transformiere sich f also wie $\mathbf{St}_v$, dann ist jedenfalls

$$P_{\mathbf{C}} f = 0.$$

Ferner ist

$$< f_0, dE_v(1) >= 0$$

da Eisensteinreihen senkrecht auf den Spitzenformen stehen. Unsere Annahme besagt, daß f_1 den Nenner ℓ nicht enthält. Dann ist auch

$$< f, dE_v(1) >=< f_1, dE_v(1) >$$

ganz bei ℓ.

Nun ist nach 10.6

$$f_1(\underline{x}) = \frac{1}{2} \int_{\Lambda_0} E(\underline{x}, \widehat{f}(\lambda))\, d_0\lambda$$

$$< f_1, dE_v(1) >_{G_{\mathbf{A}}/G_F} = \frac{1}{2} < \int_{\Lambda_0} \widehat{f}(\lambda)\, d_0\lambda, dE_v^0(1) >_{G_{\mathbf{A}}/B_F U_{\mathbf{A}}}$$

und wir müssen sehen, daß $\int_{\Lambda_0} \widehat{f}(\underline{x}, \lambda)\, d_0\lambda$ ganz bei ℓ ist.

Das ergibt sich aber aus 10.7 auf Seite 36 , weil dort gezeigt wurde

$$\widehat{f}(\underline{k}, \lambda) = \int_{G_{\mathbf{A}}/G_F} E(\underline{x}, \mathbf{St}_v, \lambda^{-1}) f(\underline{k}.\underline{x})\, d\underline{x}$$

und

$$E(\underline{x}, \mathbf{St}_v, \lambda^{-1}) = \frac{E(\underline{x}, \phi, \lambda^{-1})}{L(\omega_1\lambda^{-1})\big(1 - \omega_1\lambda^{-1}(v)\big)}$$

Nun ist

$$P(q^{-1+s}) = \prod_i (1 - \omega_i q^{-1+s})$$

mit $|\omega_i q^{-1+s}| = q^{-1/2} < 1$ auf der Integrationsgeraden $\mathrm{Re}\, s = 0$. Nach Entwicklung in eine Reihe und Integration über Λ_0 kommen also nur ℓ–ganze Werte vor.

Da $dE_v^0 \equiv 0 \pmod{\ell}$ ist also $< f, dE_v(1) >=< f_1, dE_v(1) >\equiv 0 \pmod{\ell}$. Folglich muß $dE_v(1) \equiv 0 \pmod{\ell}$ sein und dies liefert den gewünschten Widerspruch zu $H^1(\Gamma_{\mathfrak{m}}, \mathbf{F}_\ell) = 0$; denn nach Voraussetzung ist $E_v^0(1)$ auf den Spitzen nicht kohomolog $0 \mod \ell$.

Literaturverzeichnis

[1] Armand Borel, *Cohomologie de certains groupes discrets et laplacien p–adique [d'après H. Garland]*, Séminaire N. Bourbaki **437** (November 1973), 1–24.

[2] Nicolas Bourbaki, *Groupes et algèbres de Lie*, Springer, Berlin, 2006, 2007.

[3] François Bruhat and Jacques Tits, *Groupes réductifs sur un corps local I, Données radicielles valuées*, Publ. Math. I.H.E.S. **41** (1972), 5–251.

[4] Alexander Grothendieck, *Sur quelques points d'algèbre homologique*, Tôhoku Math. J. **IX** (1957), 119–221.

[5] Günter Harder, *Minkowskische Reduktionstheorie über Funktionenkörpern*, Inventiones math. **7** (1969), 33–54.

[6] ———, *Chevalley Groups over Function Fields and Automorphic Forms*, Ann. of Math. **100** (1974), 249–306.

[7] ———, *Die Kohomologie S–arithmetischer Gruppen über Funktionenköpern*, Inventiones math. **42** (1977), 135–175.

[8] Robert P. Langlands, *Eisenstein series*, Algebraic groups and discontinuous subgroups (Armand Borel and George D. Mostow, eds.), Vol. IX, Boulder, Colorado, 1966, pp. 235–252.

[9] Theodor Schleich, *Einige Bemerkungen zur Spektralzerlegung der Hecke–Algebra für die PGL_2 über Funktionenkörpern*, Bonner math. Schriften, vol. 71, Rheinische Friedrich–Wilhelms–Universität, Mathematisches Institut Bonn, 1974.

[10] Jean-Pierre Serre, *Corps Locaux*, Publications de l'Institut de Mathématique de l'Université de Nancago, vol. VIII, Hermann, Paris, 1962.

[11] ———, *Le problème des groupes de congruences pour SL_2*, Ann. of Math. **92** (1970), 489–527.

[12] ———, *Cohomologie des groupes discrets*, Prospects in Mathematics, Annals of Mathematics Studies, vol. 70, Princeton University Press, Princeton, 1971, pp. 77–169.

[13] Jacques Tits, *Buildings of Spherical Type and Finite BN–pairs*, Lecture Notes in Math., vol. 386, Springer, Berlin, 1974.

[14] André Weil, *Basic Number Theory*, Classics in Mathematics, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1973, 1995.