Séminaire de Géométrie Algébrique d'Orsay
Année 1969/70

dirigé par
Michel Demazure, Jean Giraud, Michel Raynaud,
Jean-Louis Verdier

transcrit en TEX par
Berndt E. Schwerdtfeger

2010 *Mathematics Subject Classification.* Primary 14A15; Secondary 14B10, 14B20, 14B25

Key words and phrases. foncteurs représentables, présentation finie, topologies, faisceaux, descente, pro-représentabilité, schémas formels

RÉSUMÉ. Réédition du séminaire de géométrie algébrique d'Orsay de l'année scolaire 1969/70 transcrit en TEX.

En hommage à Michel Demazure, Jean Giraud, Michel Raynaud, Jean-Louis Verdier

Préface

Le séminaire de géométrie algébrique d'Orsay de l'année scolaire 1969/70 eut lieu tous les mercredi de 14:00 à 16:00 au département de Mathématiques de l'université Paris-Sud, Orsay, bâtiment 425. Les organisateurs du séminaire furent *Michel* DEMAZURE, *Jean* GIRAUD, *Jean-Louis* VERDIER et *Michel* RAYNAUD. Les thèmes choisis comprenaient

— « foncteurs représentables, présentation finie », dirigé par DEMAZURE
— « topologies, faisceaux, descente », dirigé par GIRAUD
— « pro-représentabilité », dirigé par VERDIER
— « schémas formels, théorème de comparaison », dirigé par RAYNAUD

Un tirage provisoire des notes fut diffusé pendant l'année scolaire, pour longtemps étant resté inédits. Finalement, une numérisation de ces notes est apparu en ligne à la bibliothèque mathématique Jacques HADAMARD https://bibliotheque.math.u-psud.fr/. Malheureusement, les deux versions disponibles en ligne sont d'un état déplorable: des pages manquantes, des passages illisibles, à part du fait que le tirage primitif n'est surtout pas rectifié.

Une rédaction d'ensemble et transcription en TEX me semblait donc souhaitable. J'ai corrigé des négligences partout, uniformisé les notations et ajouté des références bibliographiques çà et là. Rarement, j'ai omis une démonstration s'il y a un raisonnement identique dans la littérature. Aux exposés oraux correspondent des *chapitres* ci-dessous, à l'exception des exposés 2 et 3 (chapitre 2), étant rédigés ensemble dans le tirage primitif.

Voici la liste des auteurs originaux des exposés:

— 1 «Foncteurs représentables» par MBOGLE-TCHECK
— 2 «Présentation finie» par J. C. SAUT, P. BILLOT, rédigé par M. BLONDEAU
— 4 «Topologies et Faisceaux» par P. GALLOU
— 5 «Descente fidèlement plate quasi-compacte» par M^{elle} MARTIN
— 6 «Descente fpqc des schémas» par Ch. DELORME
— 7 «Pro-représentabilité» par M. ROUBAUD
— 8 «Schémas formels» par Jean-François BOUTOT
— 9 «Théorème de comparaison» par H. COHEN
— 10 «Théorème d'existence» par Arnaud BEAUVILLE

Une bonne partie des matériaux traité par GIRAUD fut publié autrefois [17], soulignant en particulier la motivation des notions introduites. Un guide sur la cohomologie des faisceaux – inclus dans [4] et ne correspondant à aucun exposé oral – a été préparé [18] lors de la retranscription en TEX du cours de GIRAUD [6].

Berlin, 1er janvier 2015

 v1.0, 6 janvier 2015

Table des matières

Chapitre 1

Foncteurs représentables

1. Catégories de foncteurs

A toute (petite) catégorie $\mathcal{C}$, on associe une catégorie $\widehat{\mathcal{C}}$ ainsi définie :

(1) les objets de $\widehat{\mathcal{C}}$ sont les foncteurs *contravariants* de $\mathcal{C}$ dans la catégorie $\mathcal{E}ns$ des (petits) ensembles,

(2) les morphismes de l'objet X de $\widehat{\mathcal{C}}$ dans l'objet Y de $\widehat{\mathcal{C}}$ sont les morphismes fonctoriels de X dans Y, que l'on compose de manière évidente.

Soit X un objet fixé de $\mathcal{C}$. Pour tout objet T de $\mathcal{C}$ (resp. toute flèche $\phi : T \to T'$ de $\mathcal{C}$), on pose

$$X(T) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T, X) \qquad\qquad \begin{aligned} X(\phi) : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T', X) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T, X) \\ \psi &\longmapsto \psi \circ \phi \end{aligned}$$

Alors $T \mapsto X(T), \phi \mapsto X(\phi)$ est un élément de $\widehat{\mathcal{C}}$, que l'on note h_X (et que l'on notera simplement X dès qu'on aura justifié cet abus).

Si $f : X \to Y$ est une flèche de $\mathcal{C}$, on note h_f le morphisme fonctorielle de h_X dans h_Y défini de la manière suivante : pour tout $T \in \mathcal{C}$, $h_f(T)$ envoie l'élément ψ de $X(T) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T, X)$ vers l'élément $f \circ \psi$ de $Y(T) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T, Y)$. On a ainsi défini un *foncteur covariant*

$$h : \mathcal{C} \longrightarrow \widehat{\mathcal{C}}$$

Lemme 1.1 (lemme de Yoneda). *Si $X \in \mathcal{C}$ et $F \in \widehat{\mathcal{C}}$ l'application*

$$\gamma : \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathcal{C}}}(h_X, F) \longrightarrow F(X) \qquad \textit{telle que} \qquad \gamma(u) = u(X)(id_X)$$

est bijective.

Démonstration. En effet, définissons une application $\delta : F(X) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathcal{C}}}(h_X, F)$; si $\xi \in F(X)$, alors $\delta(\xi)$ est le morphisme fonctoriel qui associe à chaque $T \in \mathcal{C}$ l'application $\psi \mapsto F(\psi)(\xi)$ de $X(T)$ dans $F(T)$. Il est clair que $\gamma(\delta(\xi)) = F(id_X)(\xi) = id_{F(X)}(\xi) = \xi$, donc $\gamma \circ \delta = id$; inversement, si $u : h_X \to F$ est un morphisme fonctoriel, si $T \in \mathcal{C}$ et si $\psi \in X(T)$, le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} X(X) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X) \arrow[r, "u(X)"] \arrow[d, "X(\psi)"'] & F(X) \arrow[d, "F(\psi)"] \\ X(T) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T, X) \arrow[r, "u(T)"] & F(T) \end{tikzcd}$$

montre que $\delta\big(\gamma(u)\big)(T)(\psi) = F(\psi)\big(\gamma(u)\big) = F(\psi)\big(u(X)(id_X)\big) = u(T)\big(X(\psi)(id_X)\big) = u(T)(\psi)$, donc que $\delta \circ \gamma = id$. $\square$

En particulier, prenons $F = h_Y$, où $Y \in \mathcal{C}$; si $\xi \in F(X) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ et $\psi \in X(T)$, on a $\delta(\xi)(\psi) = F(\psi)(\xi) = \xi \circ \psi = h_\xi(\psi)$, donc $\delta(\xi) = h_\xi$. On en conclut

PROPOSITION 1.2. *Le foncteur $h : \mathcal{C} \longrightarrow \widehat{\mathcal{C}}$ est pleinement fidèle : si $X, Y \in \mathcal{C}$, l'application canonique $f \mapsto h_f$ de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ dans $\mathrm{Hom}_{\widehat{\mathcal{C}}}(h_X, h_Y)$ est bijective.*

2. Foncteurs au-dessus d'un objet

Dans ce §, on fixe un foncteur $F \in \widehat{\mathcal{C}}$. On note $\mathcal{C}/F$ la catégorie suivante :

(1) les objets de $\mathcal{C}/F$ sont les couples (X, ξ) où $X \in \mathcal{C}$ et $\xi \in F(X)$,

(2) les morphismes de l'objet (X, ξ) dans l'objet (Y, η) sont les éléments ϕ de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ tels que $F(\phi)(\eta) = \xi$,

(3) la composition des morphismes de $\mathcal{C}/F$ est induite par la composition des morphismes de $\mathcal{C}$.

On note i_F le foncteur $\mathcal{C}/F \longrightarrow \mathcal{C}$ qui associe X à (X, ξ) et ϕ à ϕ avec les notation précédentes.

EXEMPLE 2.1. *Supposons que F soit un* foncteur final*, c'est-à-dire que le nombre* $\mathrm{card}\, F(X) = 1$ *pour tout $X \in \mathcal{C}$. Alors $i_F : \mathcal{C}/F \to \mathcal{C}$ est un* isomorphisme de catégories*.*

EXEMPLE 2.2. *Supposons plus généralement que* $\mathrm{card}\, F(X) \leq 1$ *pour $X \in \mathcal{C}$; alors $i_F : \mathcal{C}/F \to \mathcal{C}$ induit un isomorphisme de $\mathcal{C}/F$ sur la sour-catégorie pleine $\mathcal{C}'$ de $\mathcal{C}$ formée des $S \in \mathcal{C}$ tels que $F(S) \neq \varnothing$.*

EXEMPLE 2.3. *Si $F = h_S$, où $S \in \mathcal{C}$, la catégorie $\mathcal{C}/F$ que l'on note aussi $\mathcal{C}/S$ est la catégorie des* objets de $\mathcal{C}$ au-dessus de S*, dont les objets sont les flèches de $\mathcal{C}$ de but S et les morphismes les triangles commutatifs.*

Soit $f : G \longrightarrow F$ un morphisme de $\widehat{\mathcal{C}}$, i.e. un élément de $\widehat{\mathcal{C}}/F$. On note $\alpha_F(f)$ l'élément de $\widehat{\mathcal{C}/F}$ tel que

$$\alpha_F(f)(X, \xi) = f(X)^{-1}(\xi) \subset G(X)$$

pour $(X, \xi) \in \mathcal{C}/F$ et que $\alpha_F(f)(\phi)$ soit induit par $f(\phi)$ pour toute flèche ϕ de $\mathcal{C}/F$. De même, pour tout morphisme

$$\begin{tikzcd} G \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "f"'] & & G' \arrow[dl, "f'"] \\ & F & \end{tikzcd}$$

de $\widehat{\mathcal{C}}/F$, on note $\alpha_F(h)$ le morphisme fonctoriel $\alpha_F(f) \to \alpha_F(f')$ tel que $\alpha_F(h)(X, \xi)$ soit induit par $h(X)$ pour tout $X \in \mathcal{C}$.

PROPOSITION 2.4. *Le foncteur $\alpha_F : \widehat{\mathcal{C}}/F \longrightarrow \widehat{\mathcal{C}/F}$ est une équivalence de catégories.*

DÉMONSTRATION. En effet, on construit un foncteur quasi-inverse $\beta_F : \widehat{\mathcal{C}/F} \longrightarrow \widehat{\mathcal{C}}/F$ en associant à tout foncteur $A \in \widehat{\mathcal{C}/F}$ la flèche $f : G \to F$ de $\widehat{\mathcal{C}}$ telle que pour $X \in \mathcal{C}$, $G(X)$ soit la somme disjointe des $A(X, \xi)$ pour ξ parcourant $F(X)$ et $f(X) : G(X) \to F(X)$ la projection évidente. □

EXEMPLE 2.5. *Soient $f : G \longrightarrow F$ et $h : F' \longrightarrow F$ des morphismes de $\widehat{\mathcal{C}}$. Posons $G' = G \times_F F'$; pour $X \in \mathcal{C}$, on a donc*

$$G'(X) = \{(u, v) \in G(X) \times F'(X) \mid f(X)(u) = h(X)(v)\}$$

Calculons $\alpha_{F'}(f')$ *où* $f' : G' \to F'$ *est la projection canonique. Si* $(X, \xi') \in \mathcal{C}/F'$, *on a*

$$\alpha_{F'}(f')(X, \xi') = f'(X)^{-1}(\xi') = f(X)^{-1}\big(h(X)(\xi')\big) = \alpha_F(f)(X, \xi)$$

où $\xi = h(X)(\xi') \in F(X)$. *On a donc* $\alpha_{F'}(f') = \alpha_F(f) \circ i$ *où* $i : \mathcal{C}/F' \longrightarrow \mathcal{C}/F$ *est le foncteur* $(X, \xi') \mapsto (X, \xi)$.

3. Foncteurs représentables

A partir de maintenant, on identifie $\mathcal{C}$ *à une sous-catégorie de* $\widehat{\mathcal{C}}$ *grâce à* h. On note donc X le foncteur h_X. De même on identifie $F(X)$ et $\mathrm{Hom}_{\widehat{\mathcal{C}}}(X, F)$ grâce au lemme de YONEDA.

Remarquons que les foncteurs α_F sont compatibles avec les identifications $\mathcal{C}/F \subset \widehat{\mathcal{C}}/F$ et $\mathcal{C}/F \subset \widehat{\mathcal{C}/F}$. Dans la suite, pour simplifier l'écriture, nous restreindrons l'étude des catégories $\mathcal{C}/H$ au cas où $H \in \mathcal{C}$. Le cas général $H \in \widehat{\mathcal{C}}$ est identique, modulo les modifications d'écriture évidentes.

Soit donc $S \in \mathcal{C}$. On dit qu'un foncteur $F \in \widehat{\mathcal{C}/S}$ est *représentable* s'il est isomorphe à un objet de $\mathcal{C}/S \subset \widehat{\mathcal{C}/S}$. Plus précisément, *un représentant de* F est un couple $(X \to S, \xi)$, où $X \to S$ est un objet de $\mathcal{C}/S$ et où $\xi \in F(X)$, (on écrit $F(X)$ pour $F(X \to S)$), tel que le morphisme fonctoriel $u : h_{X \to S} \longrightarrow F$ tel que $\gamma(u) = \xi$ (lemme de YONEDA) soit un isomorphisme, c'est-à-dire que la condition suivante soit satisfaite :

(U) Pour tout objet $T \to S$ de $\mathcal{C}/S$ et tout $\alpha \in F(T)$, il existe un S-morphisme $f : T \to X$ unique tel que $\alpha = F(f)(\xi)$.

Si $(X \to S, \xi)$ et $(X' \to S, \xi')$ sont deux représentants de F, il résulte de (U) qu'il existe un *unique* S-morphisme $\phi : X \to X'$ tel que $F(\phi)(\xi') = \xi$ et que ϕ est un isomorphisme.

Plus généralement, si $(X \to S, \xi)$ représente le foncteur F et $(Y \to S, \eta)$ le foncteur G, et si $u : F \to G$ est un morphisme de foncteurs, il existe un unique S-morphisme $\phi : X \to Y$ tel que $G(\phi)(\eta) = u(X)(\xi)$; pour tout objet $T \to S$ de $\mathcal{C}/S$, et tout $\alpha \in F(T)$, les S-morphismes uniques $f : T \to X$ et $g : T \to Y$ tels que $\alpha = F(f)(\xi)$ et $u(T)(\alpha) = G(g)(\eta)$ sont tels que $g = \phi \circ f$. On dit alors que ϕ *représente* le morphisme u.

EXEMPLE 3.1. *Prenons* $\mathcal{C}$ *la catégorie opposée à celle des anneaux, pour* S *un anneau* A, *pour* F *le foncteur* $B \mapsto \mathrm{Hom}_{A-mod}(M, B)$ *où* M *est un* A*-module. Ce foncteur est représentable : il existe un anneau* $\mathbf{S}_A(M)$, *un homomorphisme* $A \to \mathbf{S}_A(M)$ *et une application* A*-linéaire* $\xi : M \to \mathbf{S}_A(M)$ *tels que : pour tout anneau* B, $f \mapsto f \circ \xi$ *est une bijection de* $\mathrm{Hom}_{A-alg}(\mathbf{S}_A(M), B)$ *sur* $\mathrm{Hom}_{A-mod}(M, B)$. *On dit que la* A*-algèbre* $\mathbf{S}_A(M)$ *(muni de* ξ*) est l'*algèbre symétrique *de* M.

EXEMPLE 3.2. *Prenons pour* $\mathcal{C}$ *la catégorie* $\mathcal{S}ch$ *des schémas. Soit* $S \in \mathcal{C}$ *et soit* $\mathcal{E}$ *un* $\mathcal{O}_S$*-Module quasi-cohérent. On définit* $F : \mathcal{S}ch/S \longrightarrow \mathcal{E}ns$ *par*

$$F(p : T \to S) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_T}(\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_T, \mathcal{O}_T) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{E}, p_*(\mathcal{O}_T))$$

Ce foncteur est représentable : il existe un S*-schéma* $X = \mathbf{V}(\mathcal{E})$ *et un* $\mathcal{O}_X$*-morphisme* $\xi : \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X$ *tels que, pour tout* S*-schéma* T *et tout* $\phi : \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_T \to \mathcal{O}_T$, *il existe un* S*-morphisme* $f : T \to \mathbf{V}(\mathcal{E})$, *unique, tel que* ϕ *provienne de* ξ *grâce à* f. *On appelle* $\mathbf{V}(\mathcal{E})$ *le* fibré vectoriel *associé à* $\mathcal{E}$. *Par exemple, si* $S = \mathrm{Spec}\, A$ *et* $\mathcal{E} = \widetilde{M}$, *on peut prendre* $X = \mathbf{V}(\mathcal{E}) = \mathrm{Spec}\, \mathbf{S}_A(M)$.

EXEMPLE 3.3. *Soient S et $\mathcal{E}$ comme ci-dessus. On définit un foncteur G par*

$$G(T \to S) = \{\mathcal{F} \subset \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_T \mid \textit{sous-modules tels que } (\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_T)/\mathcal{F} \textit{ soit inversible}\}$$

Alors G est représentable par un couple $(\mathbf{P}(\mathcal{E}), \mathcal{F}_0)$ où $\mathbf{P}(\mathcal{E})$ est un S-schéma et $\mathcal{F}_0 \in G(\mathbf{P}(\mathcal{E}))$. On appelle $\mathbf{P}(\mathcal{E})$ le fibré projectif *associé à $\mathcal{E}$. On pose $\mathcal{O}_{\mathbf{P}(\mathcal{E})}(1) = (\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_{\mathbf{P}(\mathcal{E})})/\mathcal{F}_0$ et on a un épimorphisme canonique*

$$\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_{\mathbf{P}(\mathcal{E})} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{P}(\mathcal{E})}(1)$$

Soit $\mathcal{E}'$ un autre $\mathcal{O}_S$-Module quasi-cohérent, posons $\mathcal{E}'' = \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{E}'$, et soient G' et G'' les foncteurs défini par $\mathcal{E}'$ et $\mathcal{E}''$. On a un morphisme canonique de $\widehat{\mathcal{C}/S}$

$$u : G \times G' \to G''$$

pour chaque $T \to S$, $u(T)$ est le morphisme

$$G(T) \times G'(T) \to G''(T)$$

qui associe à $\mathcal{F} \subset \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_T$ et $\mathcal{F}' \subset \mathcal{E}' \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_T$ le sous-module $\mathcal{F}'' = (\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_T) \otimes_{\mathcal{O}_T} \mathcal{F}' + \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_T} (\mathcal{E}' \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_T) \subset \mathcal{E}'' \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_T$. Ce morphisme est représenté par le morphisme de SEGRE

$$\mathbf{P}(\mathcal{E}) \times_S \mathbf{P}(\mathcal{E}') \longrightarrow \mathbf{P}(\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{E}')$$

qui est une immersion fermée.

EXEMPLE 3.4. *Soit $\mathcal{P}$ une « propriété éventuelle » d'un objet de $\mathcal{C}/S$ telle que*

$$(*) \qquad \textit{si } \operatorname{Hom}_S(T', T) \neq \varnothing, \textit{ alors } \mathcal{P}(T) = \mathcal{P}(T')$$

On définit un foncteur $H \in \widehat{\mathcal{C}/S}$ par

$$H(T) = \varnothing \textit{ si } \mathcal{P}(T) \textit{ est faux,}$$
$$H(T) = \{\varnothing\} \textit{ si } \mathcal{P}(T) \textit{ est vrai ;}$$

si $f \in \operatorname{Hom}_S(T', T)$, $H(f)$ est l'unique application de $H(T)$ dans $H(T')$. Dire que le foncteur H est représentable revient à dire : il existe un objet $X \longrightarrow S$ de $\mathcal{C}/S$ tel que $\mathcal{P}(X)$ soit vrai et que

$$\operatorname{card} \operatorname{Hom}_S(T, X) = 0 \iff \mathcal{P}(T) \textit{ est faux}$$
$$\operatorname{card} \operatorname{Hom}_S(T, X) = 1 \iff \mathcal{P}(T) \textit{ est vrai.}$$

Autrement dit, $X \longrightarrow S$ est un monomorphisme, et $\mathcal{P}(T)$ est vrai si et seulement si $T \longrightarrow S$ se factorise par X. On dit parfois que H est le foncteur qui rend la propriété vraie*, ou que X est l'*objet de $\mathcal{C}/S$ qui rend la propriété $\mathcal{P}$ vraie.

Donnons un exemple. On prend $\mathcal{C} = \mathcal{S}ch$ et pour $\mathcal{P}$ la propriété « $Z \times_S T$ est plate sur T » où Z est un S-schéma fixé ; on verra dans la suite que le foncteur correspondant est bien représentable, pourvu que Z soit propre et de présentation finie sur S.

4. Morphisme représentables

Soit d'abord $S \in \mathcal{C}$ et soit $f : F \longrightarrow S$ un objet de $\widehat{\mathcal{C}}/S$. Il revient au même de dire que F est représentable (comme foncteur sur $\widehat{\mathcal{C}} = \widehat{\mathcal{C}}/\text{final}$) ou que $\alpha_F(f) \in \widehat{\mathcal{C}/S}$ l'est.

Prenons plus généralement un morphisme $u : F \longrightarrow G$ de $\widehat{\mathcal{C}}$. On dit que u est *représentable* s'il satisfait aux conditions *équivalentes* suivantes :

(1) Pour tout objet S de $\mathcal{C}$ et tout morphisme $S \to G$ le produit fibré $F \times_G S$ est représentable.

(2) Pour tout objet S de $\mathcal{C}$ et tout $\eta \in G(S)$ le foncteur
$$T \mapsto \{(x, \xi) \mid x \in F(T), \xi : T \to S, G(\xi)(\eta) = u(T)(x)\}$$
sur $\mathcal{C}$ est représentable.

(3) Pour tout objet S de $\mathcal{C}$ et tout $\eta \in G(S)$, le foncteur
$$F_\eta : (\xi : T \to S) \mapsto \{x \in F(T) \mid G(\xi)(\eta) = u(T)(x)\}$$
sur $\mathcal{C}/S$ est représentable.

On a trivialement :

Proposition 4.1. *Supposons que la catégorie $\mathcal{C}$ possède des produits fibrés et que G soit représentable. Pour que $u : F \to G$ soit représentable, il faut et il suffit que F le soit.*

Soit $\mathcal{M}$ un ensemble de morphismes de $\mathcal{C}$ tel que pour tout carré cartésien
$$\begin{tikzcd} T \arrow[r] \arrow[d, "u'"'] & S \arrow[d, "u"] \\ T' \arrow[r] & S' \end{tikzcd}$$
de $\mathcal{C}$ où $u \in \mathcal{M}$, alors $u' \in \mathcal{M}$.

On dit que le morphisme $u : F \to G$ de $\widehat{\mathcal{C}}$ est *représentable par éléments de* $\mathcal{M}$ s'il est représentable et si, dans la situation de (3), le morphisme $X \to S$ qui représente F_η est un élément de $\mathcal{M}$. Si u est un morphisme de $\mathcal{C}$, il est clair qu'il est représentable par éléments de $\mathcal{M}$ si et seulement si il appartient à $\mathcal{M}$.

Comme exemple, prenons $\mathcal{C} = \mathcal{S}ch/S$, soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ deux $\mathcal{O}_S$-Modules quasi-cohérents, et considérons les deux foncteurs F et G tels que
$$F(T) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_T}(\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_T, \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_T)$$
et $G(T)$ soit le sous-ensemble de $F(T)$ formé des épimorphismes. Alors l'injection canonique $G \to F$ est repésentable par *immersions ouvertes* : pour tout $T \to S$ et tout $\eta \in F(T) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_T}(\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_T, \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_T)$, le foncteur $F_\eta : (\mathcal{S}ch/S)^\circ \longrightarrow \mathcal{E}ns$ est défini par la propriété $\mathcal{P}$ suivante : on a $\mathcal{P}(U)$ si et seulement si $\eta_T \times id_U$ est un épimorphisme. Il résulte alors facilement du lemme de Nakayama que F_η est un sous-schéma ouvert de T.

Chapitre 2

Présentation finie

1. Algèbres et morphismes de présentation finie

Définition 1.1. *Une A-algèbre B est dite de* présentation finie *si elle est isomorphe au quotient d'une algèbre de polynômes $A[X_1, \ldots, , X_n]$ par un idéal de type fini de $A[X_1, \ldots, , X_n]$.*

Remarque. Si l'anneau A est noethérien, une A-algèbre B est de présentation finie si et seulement si elle est de type fini (EGA [11, 0_I, 6.3.5]).

Si B est une A-algèbre de présentation finie, et C une B-algèbre de présentation finie, alors C est une A-algèbre de présentation finie (EGA loc.cit.).

Si $f \in A$, la A-algèbre A_f est de présentation finie puisque $A_f \simeq A[T]/(fT-1)$.

Lemme 1.2 (EGA [11, 0_I, 6.3.13]). *Soit $(A_\alpha)_{\alpha \in L}$ un système inductif filtrant d'anneaux, de limite inductive A. Si B est une A-algèbre de présentation finie, il existe un indice α et une A_α-algèbre de présentation finie B_α telle que B soit isomorphe à $B_\alpha \otimes_{A_\alpha} A$.*

Démonstration. Par définition, B est isomorphe à un quotient $A[X_1, \ldots, X_n]/\mathfrak{a}$, où $\mathfrak{a}$ est de type fini. Soit $P_1, \ldots, P_r$ un système de générateurs de $\mathfrak{a}$. L étant filtrant, il existe α tel que l'image de A_α par l'application canonique $\varphi_\alpha : A_\alpha \longrightarrow A$ contienne tous les coefficients des P_i. Il existe donc des polynômes $Q_1, \ldots, Q_r$ de $A_\alpha[X_1, \ldots, X_n]$ tels que $\varphi_\alpha(Q_i) = P_i$, $1 \leq i \leq r$. Soit $\mathfrak{a}_\alpha$ l'idéal de $A_\alpha[X_1, \ldots, X_n]$ engendré par les Q_i. Alors $\mathfrak{a}$ est l'image de $\mathfrak{a}_\alpha \otimes_{A_\alpha} A$ dans $A[X_1, \ldots, X_n] = A_\alpha[X_1, \ldots, X_n] \otimes_{A_\alpha} A$. Il suffit de poser $B_\alpha = A_\alpha[X_1, \ldots, X_n]/\mathfrak{a}_\alpha$. □

Exemple 1.3. *Soit A un anneau. A est limite inductive filtrante de ses sous-anneaux de type fini, c'est-à-dire de ses sous-$\mathbf{Z}$-algèbres de type fini. On voit donc que B est de présentation finie sur A si et seulement s'il existe un sous-anneau A_0 de type fini de A et une A_0-algèbre de type fini B_0 telle que $B \simeq B_0 \otimes_{A_0} A$.*

Lemme 1.4. *Si $\varphi : B \longrightarrow C$ est un homomorphisme surjectif de A-algèbres de présentation finie, alors* $\operatorname{Ker} \varphi$ *est un idéal de type fini de B.*

Démonstration. D'après l'exemple 1.3 il existe un sous-anneau de type fini A_0 de A et une A_0-algèbre de type fini C_0 telle que $C = C_0 \otimes_{A_0} A$. Soit p la projection canonique de $A[X_1, \ldots, X_n]$ sur $B = A[X_1, \ldots, X_n]/\mathfrak{a}$. On peut choisir A_0 assez grand pour qu'il existe des $\xi_i \in C_0$ tels que $\xi_i \otimes_{A_0} 1 = \varphi(p(X_i))$. Soit $\eta_1, \ldots, \eta_s$ un système de générateurs de C_0 sur A_0. On a alors des relations polynomiales $\eta_j = Q_j(\xi_1 \otimes_{A_0} 1, \ldots, \xi_n \otimes_{A_0} 1)$ à coefficients dans A, et on peut encore prendre A_0 assez grand pour que $\eta_j = Q_j(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ de sorte que les ξ_i engendront C_0. De même, si $P_1, \ldots, P_r$ engendront l'idéal $\mathfrak{a}$, on a $P_k(\xi_1, \ldots, \xi_n) = 0$ pour A_0 assez grand.

L'homomorphisme de $A_0[X_1, \ldots, X_n]$ dans C_0 qui envoie X_i sur ξ_i se factorise alors à travers un homomorphisme φ_0 de $B_0 = A[X_1, \ldots, X_n]/(P_1, \ldots, P_r)$ sur C_0.

On a alors $\varphi = \varphi_0 \otimes_{A_0} 1_A$ et $\operatorname{Ker}\varphi$ est l'image de $\operatorname{Ker}\varphi_0 \otimes_{A_0} A$ dans B, donc est de type fini. □

LEMME 1.5. *Soit B une A-algèbre et $(f_i)_i$ une famille finie d'éléments de B tels que la famille $(D(f_i))_i$ recouvre* $\operatorname{Spec} B$ *(de sorte que $1 = \sum_i x_i f_i$, $x_i \in B$). Si B_{f_i} est une A-algèbre de présentation finie sur A pour tout i, alors B est de présentation finie sur A.*

DÉMONSTRATION. Faisons parcourir à B_0 les sous A-algèbres de type fini de B contenant les f_i et les x_i. On a donc $B = \varinjlim B_0$ et $B_{f_i} = \varinjlim B_{0f_i}$ et on peut remarquer que pour B_0 assez grand on a $B_{0f_i} = B_{f_i}$; les B_{f_i} étant de type fini sur A. D'où :

$$\prod_i B_{0f_i} = \prod_i B_{f_i} = \prod_i (B \otimes_{B_0} B_{0f_i}) = B \otimes_{B_0} \prod B_{0f_i}$$

Puisque $\prod B_{0f_i}$ est fidèlement plat sur B_0 ([2, II, § 5,n° 1, prop. 3]), on en déduit que $B = B_0$; B est donc de la forme $A[X_1, \dots, X_n]/\mathfrak{a}$.

Soient Q_i, P_i des représentants de x_i, f_i dans $A[X_1, \dots, X_n]$ et soit $\mathfrak{a}'$ l'idéal engendré par $1 - \sum Q_i P_i$. Alors $(A[X_1, \dots, X_n]/\mathfrak{a}')_{P_i}$ est de présentation finie sur A. D'après lemme (1.4), le noyau $(\mathfrak{a}/\mathfrak{a}')_{P_i}$ de l'application $(A[X_1, \dots, X_n]/\mathfrak{a}')_{P_i} \longrightarrow B_{f_i}$ est de type fini. Donc $\mathfrak{a}/\mathfrak{a}'$ est de type fini ([2, II, § 5,n° 1, cor. de la prop. 3]), ainsi que $\mathfrak{a}$. □

DÉFINITION 1.6. *Un morphisme de schémas $f : Y \longrightarrow X$ est dit* localement de présentation finie *si, pour tout $y \in Y$, il existe des ouverts affines $V \subset Y$ et $U \subset X$ tels que $y \in V$, $f(y) \in U$, $f(V) \subset U$ et que $\Gamma(V, \mathcal{O}_Y)$ soit une $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$-algèbre de présentation finie.*

Rappels : Un morphisme de schémas $f : Y \longrightarrow X$ est dit *quasi-compact* si l'image réciproque $f^{-1}(U)$ d'un ouvert quasi-compact de X est quasi-compacte.

Un morphisme de schémas $g : Y \longrightarrow X$ est dit *quasi-séparé* si le morphisme *diagonale* $\Delta_g : Y \longrightarrow Y \times_X Y$ est quasi-compact.

Les deux notions c-dessus sont stable par changement de base.

Un schéma X est dit *quasi-séparé* si le morphisme canonique $X \to \operatorname{Spec} \mathbf{Z}$ est quasi-séparé. Il revient au même de dire que l'intersection de deux ouverts quasi-compacts de X est quasi-compacte (il suffit d'ailleurs de vérifier cette propriété pour un recouvrement de X formé d'ouverts quasi-compacts). Si Y est quasi-séparé, tout morphisme $Y \longrightarrow X$ est quasi-séparé car la propriété de quasi-séparation est stable par composition et si $g \circ f$ est quasi-séparé alors f est quasi-séparé.

DÉFINITION 1.7. *Un morphisme de schémas $f : Y \longrightarrow X$ est dit* de présentation finie *s'il est localement de présentation finie, quasi-compact et quasi-séparé.*

PROPOSITION 1.8 (EGA [11, I, 6.2.9]). *Soit $\varphi : A \to B$ un morphisme d'anneaux. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) B est une A-algèbre de présentation finie.

(2) Le morphisme $f =$ $\operatorname{Spec}\varphi : \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ *est localement de présentation finie.*

(3) $\operatorname{Spec}\varphi$ *est de présentation finie.*

DÉMONSTRATION. (1) $\Longrightarrow$ (2) trivialement.

(2) $\Longleftrightarrow$ (3) puisque $\operatorname{Spec}\varphi$ est quasi-compact et quasi-séparé.

(3) $\implies$ (1): Posons $Y = \operatorname{Spec} B$, $X = \operatorname{Spec} A$. Si $y \in Y$ il existe des ouverts affines $V = \operatorname{Spec} B'$ de Y et $U = \operatorname{Spec} A'$ de X tels que $y \in V$, $f(y) \in U$, $f(V) \subset U$ et B' soit une A'-algèbre de présentation finie. Il existe $s \in A$ tel que $f(y) \in X_s \subset U$.

On a alors $\Gamma(f^{-1}(X_s) \cap V, \mathcal{O}_Y) = \Gamma(V_{\varphi(s)}, \mathcal{O}_Y) = \Gamma(V, \mathcal{O}_Y)_{\varphi(s)} = B'_{\varphi(s)}$.

$\Gamma(V_{\varphi(s)}, \mathcal{O}_Y)$ est donc de présentation finie sur $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)_s = A_s$, donc aussi sur A. Quitte à remplacer V par $V_{\varphi(s)}$, on peut donc supposer que $U = X$. Dans ce cas il existe $t \in B$ tel que $y \in Y_t \subset V$; on a alors $\Gamma(Y_t, \mathcal{O}_Y) = B_t$ et B_t est une A-algèbre de présentation finie. En recouvrant Y par un nombre fini de tels Y_t on conclut avec le lemme 1.5. □

Corollaire 1.9. *Soient $f : Y \longrightarrow X$ un morphisme de schémas localement de présentation finie, V' et U' des ouverts affines de Y et X tels que $f(V') \subset U'$. Alors $\Gamma(V', \mathcal{O}_Y)$ est une $\Gamma(U', \mathcal{O}_X)$-algèbre de présentation finie.*

Démonstration. D'après la proposition 1.8, il suffit de montrer que le morphisme $f' : V' \longrightarrow U'$ induit par f est localement de présentation fini. Soit $y \in V'$ et soient V et U choisis comme dans la définition 1.6. Il existe $s \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ tel que $f(y) \in U_s \subset U \cap U'$. $\Gamma(f^{-1}(U_s) \cap V, \mathcal{O}_Y) = \Gamma(V, \mathcal{O}_Y)_s$ est donc de présentation finie sur $\Gamma(U_s, \mathcal{O}_X)$.

Il existe $t \in \Gamma(V, \mathcal{O}_Y)$ tel que $y \in V_t \subset f^{-1}(U_s) \cap V \cap V'$.

Puisque $\Gamma(V_t, \mathcal{O}_Y) = \Gamma(V, \mathcal{O}_Y)_{st}$, $\Gamma(V_t, \mathcal{O}_Y)$ est de présentation finie sur $\Gamma(U_s, \mathcal{O}_X)$ et on a bien $f(y) \in U_s \subset U'$ et $f(V_t) \subset U_s$. □

Corollaire 1.10. *Un morphisme de schémas $f : Y \longrightarrow X$ est de présentation fini si et seulement si X et Y peuvent être recouverts par des ouverts affines X_i et Y_{ij} tels que :*

(1) Pour i fixé, les Y_{ij} soient en nombre fini et recouvrent $f^{-1}(X_i)$

(2) Pour tout triplet (i, j, k), $Y_{ij} \cap Y_{ik}$ soit quasi-compact

(3) Pour tout couple (i, j), $\Gamma(Y_{ij}, \mathcal{O}_Y)$ soit une $\Gamma(X_i, \mathcal{O}_X)$-algèbre de présentation finie.

Démonstration. Cela résulte du corollaire 1.9 et des définitions. □

Proposition 1.11. *Soient X, Y deux schémas, $j : Y \to X$ une immersion, U un ouvert de X tel que $j(Y)$ soit fermé dans U, $\mathcal{I}$ l'idéal quasi-cohérent de $\mathcal{O}_U$ définit pour le sous-schéma fermé de X associé à j. Pour que j soit localement de présentation finie, il faut et il suffit que $\mathcal{I}$ soit un $\mathcal{O}_U$-Module de type fini.*

Démonstration. Résulte du lemme 1.4. □

Proposition 1.12.

(1) Le composé de deux morphismes localement de présentation finie (resp. présentation finie) est localement de présentation finie (resp. présentation finie).

(2) Considérons le diagramme :

$$\begin{tikzcd} Y & Y \times_X Y' \arrow[l] \arrow[d, "f_{Y'}"] \\ X \arrow[from=u, "f"'] & Y' \arrow[l, "g"] \end{tikzcd}$$

Si f est localement de présentation finie (resp. de présentation finie) alors $f_{Y'}$ est localement de présentation finie (resp. de présentation finie).

(3) Si $f \circ g$ et f sont localement de présentation finie (resp. si $f \circ g$ est de présentation finie et si f est quasi-séparé et localement de présentation finie) alors g est localement de présentation finie (resp. de présentation finie).

Démonstration. (2) résulte des définitions 1.6 et 1.7 et de ce que les notions de morphismes quasi-compacts et quasi-séparés sont stable par changement de base.

(1) résulte du corollaire 1.9 et de la stabilité des morphismes quasi-compacts et quasi-séparés par composition.

(3) : Montrons par exemple le cas des morphismes de présentation finie.

Soit $f : Y \longrightarrow X$ et $g : Z \longrightarrow Y$ et considérons le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[d, "f\circ g"'] \arrow[dr, "g"] & \\
X & Y \arrow[l, "f"]
\end{tikzcd}$$

ce que nous complétons par le changement de base de $f \circ g$ par f :

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[d, "f\circ g"'] \arrow[dr, "g"] \arrow[r, dotted, bend left, "\gamma"] & Z \times_X Y \arrow[l] \arrow[d, "(fg)_Y"] \\
X & Y \arrow[l, "f"]
\end{tikzcd}$$

où $\gamma = (1_Z, g)_X$ est la section canonique ; alors $g = (f \circ g)_Y \circ \gamma$. Comme $(f \circ g)_Y$ est de présentation finie par (2), il suffit d'après (1) de montrer que γ est de présentation finie.

Or le diagramme suivant est cartésien :

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "g"'] & Z \times_X Y \arrow[d] \\
Y \arrow[r, "\Delta_f"'] & Y \times_X Y
\end{tikzcd}$$

et il suffit de montrer que Δ_f est de présentation finie. Δ_f est quasi-séparé (puisque c'est un monomorphisme), et quasi-compact (par hypothèse que f est quasi-séparé), il reste à voir que Δ_f est localement de présentation finie.

On se ramène pour cela au cas affine : $A = \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$, $B = \Gamma(Y, \mathcal{O}_Y)$. Il s'agit alors de montrer que le noyau $\mathfrak{d}$ de la multiplication $B \otimes_A B \longrightarrow B$ est de type fini. C'est vrai, car si $b_1, \ldots, b_n$ est un système de générateurs de B sur A, alors $\mathfrak{d}$ est engendré par les $b_1 \otimes 1 - 1 \otimes b_1, \ldots, b_n \otimes 1 - 1 \otimes b_n$ □

2. Passage à la limite inductive dans les anneaux

2.1. Introduction. On se donne un ensemble I, préordonné filtrant croissant, possédant un plus petit élément α ; $(A_\lambda, \varphi_{\mu\lambda})_{\lambda \in I}$ un système inductif d'anneaux de limite inductif A, et un A_α-schéma X_α. Posons pour tout $\lambda \in I$, $X_\lambda = X_\alpha \otimes_{A_\alpha} A_\lambda$ et $X = X_\alpha \otimes_{A_\alpha} A$.

Il est clair que les schémas X_λ forment un système projectif et on verra que X est une limite projective de ce système dans la catégorie des schémas.

On cherche des conditions sur les A_λ et sur X_α pour obtenir des énoncés du genre : Pour que X possède une propriété $\mathcal{P}$ il faut et il suffit qu'il existe $\lambda \in I$ tel que pour tout $\mu \geq \lambda$, X_μ ait la propriété $\mathcal{P}$.

EXEMPLE 2.1. *Soit* $f : X \longrightarrow \operatorname{Spec} A$ *un morphisme de schémas ; soit* $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$*. Supposons que* $f^{-1}(\operatorname{Spec} A_\mathfrak{p}) = Z$ *ait une certaine propriété* $\mathcal{P}$*. On sait que* $A_\mathfrak{p} = \varinjlim_{s \in A - \mathfrak{p}} A_s$ *et on verra que sur les spectres ceci correspond à l'isomorphisme* $\operatorname{Spec} A_\mathfrak{p} \simeq \varprojlim U_\alpha$*,* U_α *parcourant l'ensemble des voisinages ouverts de* $\mathfrak{p}$*. On pose* $X_\alpha = f^{-1}(U_\alpha)$*. Il est clair que* $Z = \varprojlim X_\alpha$ *et que les* X_α *forment un système projectif du type décrit plus haut.*

Si Z *vérifie* $\mathcal{P}$ *on pourra trouver un voisinage* $f^{-1}(U_\alpha)$ *de la fibre de* $\mathfrak{p}$ *qui vérifie* $\mathcal{P}$*.*

Si par exemple on prend $A = \mathbf{Z}$ *et* $\mathfrak{p} = 0$*, chaque* U_α *peut s'interpréter comme le complémentaire d'un ensemble fini de nombres premiers. Si on connait une propriété de la fibre générique (i.e. d'un* $\mathbf{Q}$*-schéma) on pourra en déduire la même propriété pour les fibres sur presque tous les nombres premiers* p*.*

EXEMPLE 2.2. *Si on part d'une situation géométrique au-dessus d'un corps* K*, on considère* K *comme extension d'un corps* k *(par exemple son corps premier) et on écrit* $K = \varinjlim k_i$*,* k_i *parcourant l'ensemble des sous* K*-extension de type fini de* k*. On peut ainsi se ramener au cas d'un corps, extension de type fini de* k*.*

EXEMPLE 2.3. *Si* $S = \operatorname{Spec} A$*, on considérera* A *comme limite inductive de ses sous-anneaux, qui sont des* $\mathbf{Z}$*-algèbres de type fini, et on pourra ainsi se ramener à des situations au-dessus du spectre d'une telle algèbre (et éliminer les hypothèses noethériennes dans des théorèmes du type « propriétés topologiques des morphismes plats »).*

2.2. Systèmes inductifs d'anneaux. Soit $(A_\lambda, \varphi_{\mu\lambda})$ un système inductif filtrant d'anneaux. On se propose d'étudier $\operatorname{Spec} \varinjlim A_\lambda$, on pose $A = \varinjlim A_\lambda$.

PROPOSITION 2.4. *Si* $\mu \geq \lambda$ *notons* $u_{\lambda\mu} = \operatorname{Spec} \varphi_{\mu\lambda} : \operatorname{Spec} A_\mu \to \operatorname{Spec} A_\lambda$ *le morphisme correspondant à* $\varphi_{\mu\lambda}$*, alors* $(\operatorname{Spec} A_\lambda, u_{\lambda\mu})$ *forme un système projectif dont la limite, dans la catégorie des schémas et dans la catégorie des espaces topologiques s'identifie à* $\operatorname{Spec} A$*.*

DÉMONSTRATION. Montrons d'abord que $\operatorname{Spec} A$ est une limite projective pour le système $(\operatorname{Spec} A_\lambda, u_{\lambda\mu})$ dans $\mathcal{S}ch$. Il suffit, par définition d'une limite projective, de montrer que, pour tout schéma Y, il y a une bijection entre $\operatorname{Hom}(Y, \operatorname{Spec} A)$ et $\varprojlim \operatorname{Hom}(Y, \operatorname{Spec} A_\lambda)$. Mais

$$\begin{aligned}\operatorname{Hom}(Y, \operatorname{Spec} A) &\simeq \operatorname{Hom}_{Ann}(\varinjlim A_\lambda, \Gamma(Y, \mathcal{O}_Y)) \\ &\simeq \varprojlim \operatorname{Hom}_{Ann}(A_\lambda, \Gamma(Y, \mathcal{O}_Y)) \\ &\simeq \varprojlim \operatorname{Hom}(Y, \operatorname{Spec} A_\lambda)\end{aligned}$$

Il reste à montrer que $\operatorname{Spec} A$ est une limite projective de $(\operatorname{Spec} A_\lambda, u_{\lambda\mu})$ dans $\mathcal{T}op$. On voit que les morphismes $u_\lambda : \operatorname{Spec} A \to \operatorname{Spec} A_\lambda$, qui correspondent aux φ_λ, forment un système projectif de morphismes, d'où un morphisme

$$u : \operatorname{Spec} A \longrightarrow \varprojlim \operatorname{Spec} A_\lambda$$

Nous allons voir que u est un homéomorphisme.

u est injectif car, si $\mathfrak{p}, \mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} A$ avec $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{q}$, on sait que $\mathfrak{p} = \varinjlim \varphi_\lambda^{-1}(\mathfrak{p})$ et $\mathfrak{q} = \varinjlim \varphi_\lambda^{-1}(\mathfrak{q})$. Donc il existe un μ tel que $\varphi_\mu^{-1}(\mathfrak{p}) \neq \varphi_\mu^{-1}(\mathfrak{q})$.

u est surjectif ; en effet soit $(\mathfrak{p}_\lambda)_{\lambda \in I}$ un élément de $\varprojlim \operatorname{Spec} A_\lambda$; on a alors $\varphi_{\mu\lambda}^{-1}(\mathfrak{p}_\mu) = \mathfrak{p}_\lambda$ pour tout couple λ, μ tel que $\mu \geq \lambda$, et on vérifie aisément que $(\mathfrak{p}_\lambda)_{\lambda \in I}$ est l'image par u de l'idéal $\mathfrak{p} = \varinjlim \varphi_\lambda(\mathfrak{p}_\lambda)$ de A.

u^{-1} est continu : en effet, notant p_α la projection canonique $\varprojlim \operatorname{Spec} A_\lambda \to \operatorname{Spec} A_\alpha$, on voit que, si $f = \varphi_\alpha(f_\alpha)$, $\mathfrak{p}$ appartient à $D(f)$ si et seulement si $\mathfrak{p}$ appartient à $p_\alpha^{-1}(D(f_\alpha))$. □

2.3. Systèmes projectifs de schémas à morphismes de transition affines. Rappelons (EGA [11, § 9.1]) qu'un morphisme de schémas $f : Y \longrightarrow X$ est dit *affine* s'il existe un recouvrement $(U_\alpha)_\alpha$ de X par des ouverts affines tels que pour tout α, le schéma induit par Y sur l'ouvert $f^{-1}(U_\alpha)$ soit affine. On montre qu'alors pour tout ouvert affine U de X, le schéma induit par Y sur $f^{-1}(U)$ est affine.

La notion de morphisme affine est stable par composition et par changement de base ([11, 9.1.16]).

Considérons un système projectif filtrant $(S_\lambda, v_{\lambda\mu})_{\lambda \in I}$ de schémas tel que les $v_{\lambda\mu}$ soient des morphismes *affines* et supposons que I possède un plus petit élément α.

Proposition 2.5. *Le système $(S_\lambda, v_{\lambda\mu})$ admet une limite projective dans la catégorie $\mathcal{S}ch$ des schémas.*

Démonstration. On procède par recollement, compte tenu de §2.2.

Recouvrons S_α par des ouverts affines $U_{i\alpha}$. Le système des $v_{\alpha\lambda}^{-1}(U_{i\alpha})$ est projectif et les morphismes $v_{\alpha\lambda}$ étant affines c'est un système projectif de schémas affines. Il admet donc une limite projective U_i qui est un schéma affine. On vérifie que l'on peut recoller les U_i en un schéma S.

Soit T un schéma et (h_λ) un système projectif de morphismes de T dans les S_λ. Les $h_\lambda | h_\lambda^{-1}(v_{\alpha\lambda}^{-1}(U_{i\alpha}))$ forment alors un système projectif de morphismes de $h_\alpha^{-1}(U_{i\alpha})$ dans les $v_{\alpha\lambda}^{-1}(U_{i\alpha})$, doù un morphisme $h_i : h_\alpha^{-1}(U_{i\alpha}) \longrightarrow U_i$. On vérifie encore que l'on peut recoller les h_i en un morphisme $h : T \longrightarrow S$ satisfaisant les conditions requises. □

Remarque. Les morphismes canoniques $S \longrightarrow S_\lambda$ sont affines ; il suffit de tester sur un recouvrement affine de S_λ.

Lemme 2.6. *Reprenons les notations de la proposition 2.5. Si U est un ouvert quasi-compact de S, il existe un indice λ et un ouvert quasi-compact U_λ de S_λ tel que $U = U_\lambda \times_{S_\lambda} S$.*

Démonstration. U est en effet réunion finie d'ouverts affines de la forme $v_\lambda^{-1}(U_\lambda)$ par définition de la topologie de la limite projective et puisque les v_λ sont affines. Mais alors il existe un λ et des ouverts affines $V_{i\lambda}$ en nombre fini de S_λ tels que $V = \cup_i V_{i\lambda} \times_{S_\lambda} S$. □

Lemme 2.7. *Pour tout sous-schémas quasi-compact Z_λ de S_λ tel que $Z_\lambda \times_{S_\lambda} S = \varnothing$, il existe un $\mu \geq \lambda$ tel que $Z_\lambda \times_{S_\lambda} S_\mu = \varnothing$.*

Démonstration. Recouvrons Z_λ par des ouverts affines $U_{i\lambda}$ en nombre fini. On a par hypothèse $U_{i\lambda} \times_{S_\lambda} S = \varnothing$; si on prouve le lemme pour les $U_{i\lambda}$, le résultat général se déduira en prenant le sup des $\mu(i)$. On est donc ramené au cas où Z_λ est affine. Soit $Z_\lambda = \operatorname{Spec} A_\lambda$. Les $v_{\lambda\mu}^{-1}(Z_\lambda)$ forment un système projectif de spectres (puisques les $v_{\lambda\mu}$ sont affines) associé au système inductif des anneaux A_λ. On a donc $\operatorname{Spec}(\varinjlim A_\lambda) = \varnothing$, i.e. $\varinjlim A_\lambda = 0$, donc $A_\mu = 0$ pour un $\mu \geq \lambda$ et $\operatorname{Spec} A_\mu = \varnothing$. □

On considère donc maintenant la situation suivante : on se donne un S_α-schéma X_α, et on pose pour tout λ : $X_\lambda = X_\alpha \times_{S_\alpha} S_\lambda$ et $X = X_\alpha \times_{S_\alpha} S$. Notons que les $u_{\lambda\mu} = 1_{X_\alpha} \times v_{\lambda\mu}$ de X_μ dans X_λ, pour $\mu \geq \lambda$ sont encore affines puisqu'ils sont obtenus par changement de base à partir de morphismes affines.

Proposition 2.8. *$(X_\lambda, u_{\lambda\mu})$ forme un système projectif filtrant de schémas dont la limite projective de ce système (qui existe d'après la proposition 2.5 et ci-dessus) s'identifie à $X = X_\alpha \times_{S_\alpha} S$.*

Démonstration. On veut montrer que pour tout schéma T,

$$\operatorname{Hom}(T, X) = \varprojlim \operatorname{Hom}(T, X_\lambda)$$

Mais par définition des produits fibrés $X_\lambda = X_\alpha \times_{S_\alpha} S_\lambda$, on a le diagramme exact

$$\operatorname{Hom}(T, X_\lambda) \longrightarrow \operatorname{Hom}(T, X_\alpha) \times \operatorname{Hom}(T, S_\lambda) \rightrightarrows \operatorname{Hom}(T, S_\alpha)$$

et en passant à la limite projective – le foncteur $\varprojlim$ étant exact à gauche – on obtient

$$\varprojlim \operatorname{Hom}(T, X_\lambda) \longrightarrow \varprojlim(\operatorname{Hom}(T, X_\alpha) \times \operatorname{Hom}(T, S_\lambda)) \rightrightarrows \operatorname{Hom}(T, S_\alpha)$$

i.e., puisque $\varprojlim$ commute aux produits et puisque $S = \varprojlim S_\lambda$,

$$\varprojlim \operatorname{Hom}(T, X_\lambda) \longrightarrow \operatorname{Hom}(T, X_\alpha) \times \operatorname{Hom}(T, S) \rightrightarrows \operatorname{Hom}(T, S_\alpha)$$

Ceci signifie $\varprojlim \operatorname{Hom}(T, X_\lambda) = \operatorname{Hom}(T, X_\alpha \times_{S_\alpha} S) = \operatorname{Hom}(T, X)$. □

3. Foncteurs localement de présentation finie

3.1. Présentation finie et limites projectives de schémas. Soit $(S_\lambda, v_{\lambda\mu})$ un système projectif de spectres de limite projective S, X_α un schéma sur S_α, $X_\lambda = X_\alpha \times_{S_\alpha} S_\lambda$ pour $\lambda \geq \alpha$.

On a vu que $X = X_\alpha \times_{S_\alpha} S$ était la limite projective des $(X_\lambda, u_{\lambda\mu})$.

Soit U un ouvert quasi-compact de X, alors il existe λ et U_λ ouvert quasi-compact de X_λ, tel que $U = u_\lambda^{-1}(U_\lambda) = U_\lambda \times_{S_\lambda} S$ puisque $\varprojlim X_\lambda = X$.

Avec les mêmes notations soit Z_α un sous-schéma quasi-compact de X_α tel que $Z_\alpha \times_{S_\alpha} S = \varnothing$. Alors il existe un λ tel que $Z_\lambda = Z_\alpha \times_{S_\alpha} S_\lambda = \varnothing$.

La propriété étant locale on peut supposer X_α affine et Z_α fermé dans X_α ; soit $B_\alpha = \Gamma(X_\alpha, \mathcal{O}_{X_\alpha})$ et $\mathfrak{b}_\alpha$ l'idéal définissant Z_α, et $A = \Gamma(S, \mathcal{O}_S)$ $A_\lambda = \Gamma(S_\lambda, \mathcal{O}_{S_\lambda})$. On a par hypothèse :

$$B_\alpha/\mathfrak{b}_\alpha \otimes_{A_\alpha} A = \varinjlim_{\lambda \geq \alpha} B_\alpha/\mathfrak{b}_\alpha \otimes_{A_\alpha} A_\lambda = 0$$

On a donc de manière évidente un λ tel que $B_\alpha/\mathfrak{b}_\alpha \otimes_{A_\alpha} A_\lambda = 0$, donc $Z_\lambda = \varnothing$.

Corollaire 3.1. *Pour toute partie localement fermée quasi-compacte Z_α de X_α telle que $u_\alpha^{-1}(Z_\alpha) = \varnothing$ il existe λ tel que $u_{\alpha\lambda}^{-1}(Z_\alpha) = \varnothing$.*

3.2. Foncteurs localement de présentation finie. Passage à la limite projective.

DÉFINITION 3.2. *Soit $F : (\mathcal{S}ch/S)^\circ \longrightarrow \mathcal{E}ns$ un foncteur. F est dit* localement de présentation finie *si, étant donné un système projectif de spectres S_λ de limite S on a :*

$$F(\varprojlim S_\lambda) = \varinjlim F(S_\lambda)$$

THÉORÈME 3.3. *Soit S un schéma, X et Y deux S-schémas tels que $g : Y \to S$ soit quasi-compact et quasi-séparé et X de présentation finie sur S. On considère le foncteur défini par :*

$$\mathcal{H}om_S(Y, X) : (\mathcal{S}ch/S)^\circ \longrightarrow \mathcal{E}ns$$
$$T/S \longmapsto \mathrm{Hom}_T(Y \times_S T, X \times_S T)$$

Alors $\mathcal{H}om_S(Y, X)$ est localement de présentation finie.

DÉMONSTRATION. Soit $(T_\lambda, t_{\lambda\mu})$ un système projectif de spectres de limite T. On doit montrer que :

$$\mathrm{Hom}_T(Y \times_S T, X \times_S T) = \varinjlim_\lambda \mathrm{Hom}_{T_\lambda}(Y \times_S T_\lambda, X \times_S T_\lambda)$$

Remarquons d'abord que l'on peut supposer S affine en faisant le changement de base $T_\lambda \to S$ pour un λ quelconque. On aura alors Y quasi-compact et quasi-séparé.

Démontrons le théorème dans le cas où $Y = S$. On doit donc avoir :

$$\mathrm{Hom}_T(T, X \times_S T) = \varinjlim \mathrm{Hom}_{T_\lambda}(T_\lambda, X \times_S T_\lambda)$$

donc on doit avoir

$$\mathrm{Hom}_S(T, X) = \varinjlim \mathrm{Hom}_S(T_\lambda, X)$$

On doit donc démontrer que le foncteur $T \mapsto X(T)$ est lui-même de présentation finie.

Supposons X affine : soient $A = \Gamma(S, \mathcal{O}_S)$, $B = \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$, $C_\lambda = \Gamma(T_\lambda, \mathcal{O}_{T_\lambda})$ et $C = \Gamma(T, \mathcal{O}_T) = \varinjlim C_\lambda$. Nous devons donc montrer que :

$$\varinjlim \mathrm{Hom}_{A-alg}(B, C_\lambda) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{A-alg}(B, \varinjlim C_\lambda)$$

sachant que B est de présentation finie sur A. Nous montrons que l'application est injective. Soient $f_\lambda, f'_\lambda : B \to C_\lambda$ deux systèmes inductifs d'applications de même limite $f : B \to C$. Soient x_i les générateurs de B (en nombre fini) : il existe λ tel que

$$f(x_i) = \tau_\lambda(f_\lambda(x_i)) = \tau_\lambda(f'_\lambda(x_i))$$

pour tout i, mais alors il existe $\mu \geq \lambda$ tel que $\tau_{\mu\lambda}(f_\lambda(x_i)) = \tau_{\mu\lambda}(f'_\lambda(x_i))$ pour tout i et $f_\mu = f'_\mu$.

Montrons maintenant la surjectivité.

Nous avons $B = A[X_1, \dots, X_n]/\mathfrak{a}$ avec $\mathfrak{a}$ de type fini engendré par les P_j ; on pose $x_i = X_i \mod \mathfrak{a}$.

Soit f un homomorphisme de A-algèbre de B dans C et $y_i = f(x_i)$. Il existe alors λ et des éléments $y_{i\lambda} \in C_\lambda$ tels que $y_i = \tau_\lambda(y_{i\lambda})$; d'autre part nous avons $P_j((y_i)) = 0$ et par conséquent il existe $\mu > \lambda$ tel que $P_j(\tau_{\mu\lambda}(y_{i\lambda})) = 0$.

On définit f_μ par $f_\mu(x_i) = \tau_{\mu\lambda}(y_{i\lambda})$; on obtient bien ainsi un morphisme de A-algèbres et l'on en déduit un système inductif en posant $f_\lambda = \tau_{\lambda\mu} \circ f_\mu$ et f est bien la limite de ce système.

Dans le cas général remarquons d'abord que l'on peut supposer X quasi-compact ; en effet X est la réunion filtrante de ses sous-schémas X_i ouverts quasi-compacts et si Y est quasi-compact :

$$\mathrm{Hom}_S(Y,X) = \varinjlim \mathrm{Hom}_S(Y,X_i)$$

X étant maintenant supposé quasi-compact et $f : T \to X$ étant donné, il existe un recouvrement ouvert affine fini U_i de X et un recouvrement ouvert affine fini V_{ij} de T tel que $V_{ij} = \tau_\lambda^{-1}(V_{ij\lambda})$. Il existe λ tel que sur chacque $V_{ij\lambda}$ on puisse trouver d'après les résultats précédents, un morphisme $f_\lambda : V_{ij\lambda} \to U_i$ donnant f sur V_{ij}, permettant de construire un morphisme $Y_\mu \to X$ pour μ assez grand. Il faut vérifier les conditions de recollement, c'est-à-dire la coïncidence sur les $V_{ij\lambda} \cap V_{i'j\lambda}$. Mais ces ouverts sont quasi-compacts et recouverts par un nombre fini d'ouverts affines. L'existence d'un λ assez grand provient alors de l'unicité du relèvement vérifié au debut de la preuve.

Dans le cas où Y est quasi-compact et quasi-séparé on se ramène au cas affine en prenant un recouvrement affine fini et en utilisant le fait que l'intersection de deux ouverts affines est quasi-compacte. □

Corollaire 3.4. *Supposons X et Y de présentation finie. Pour que $X \times_S T$ et $Y \times_S T$ soient T-isomorphes, il faut et il suffit qu'il existe λ tel que X_λ et Y_λ soient T_λ-isomorphe.*

Voir aussi le théorème 5.2, (2) plus loin.

Démonstration. La condition est évidemment suffisante, montrons qu'elle est nécessaire : Soit $f : X \times_S T \xrightarrow{\sim} Y \times_S T$ un isomorphisme. On sait que f provient de $f_\lambda : X \times_S T_\lambda \to Y \times_S T_\lambda$ pour un λ assez grand ; d'autre part f ayant un inverse g, g provient d'un $g_\mu : Y \times_S T_\mu \to X \times_S T_\mu$. Si $\nu \geq \lambda, \mu$ on peut considérer $g_\nu \circ f_\nu$ et $f_\nu \circ g_\nu$, qui donnent l'identité à la limite, donc déjà l'identité pour un ν assez grand. □

Théorème 3.5. *Soit $(T_\lambda, t_{\lambda\mu})$ un système projectif de spectres de limite T et soit X un schéma de présentation finie sur T. Alors il existe un schéma de présentation finie X_λ sur T_λ pour λ assez grand tel que $X = X_\lambda \times_{T_\lambda} T$.*

Démonstration. Dans le cas où X est affine on connait déjà le résultat. On se ramène au cas affine en recouvrant X par par un nombre fini d'ouverts affines U_i, pour chacun d'eux il existe λ et un schéma de présentation finie $Z_{\lambda i}$ sur T_λ tels que $U_i = Z_{\lambda i} \times_{T_\lambda} T$, et on peut prendre un même λ pour tous les i. Si λ a été choisi assez grand pour chaque i il existe un ouvert $Z_{\lambda ij}$ quasi-compact tel que $Z_{\lambda ij} \times_{T_\lambda} T = U_i \cap U_j$ et l'identité de $U_i \cap U_j$ induit un morphisme $Z_{\lambda ij} \to Z_{\lambda ji}$. Si on choisit λ assez grand ce morphisme est un isomorphisme. Pour pouvoir recoller il faut vérifier les conditions de transitivité ; elles se vérifient en remarquant que les $Z_{\lambda ij}$ sont quasi-séparés et en utilisant le théorème 3.3. □

Théorème 3.6. *Soit $f : X \to S$ un morphisme de schémas. Alors les conditions suivantes sont équivalentes*

(1) f est localement de présentaion finie
(2) le foncteur $T \mapsto h_X(T) = \mathrm{Hom}_S(T,X)$ est localement de présentation finie.
(3) le foncteur $T \mapsto h_X(T) = \mathrm{Hom}_S(T,X)$ vérifie la condition précédente dans le cas où le système T_λ est un système de U-schémas, avec U ouvert affine de S.

Démonstration. (1) $\Longrightarrow$ (2) démontré au cours de la preuve du théorème 3.5.

(2) $\Longrightarrow$ (3) immédiat.

(3) $\Longrightarrow$ (1) la question étant locale on suppose S affine.

Supposons X affine d'anneau B, les T_λ ayant pour anneaux les C_λ et S ayant pour anneau A. On doit montrer que :

$$\varinjlim_\lambda \mathrm{Hom}_{A-alg}(B, C_\lambda) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{A-alg}(B, \varinjlim_\lambda C_\lambda)$$

est une bijection, ce qui est équivalent à ce que B soit une A-algèbre de présentation finie.

Considérons le système $(C_\lambda)_\lambda$ des sous-algèbres de type fini de B, $B = \varinjlim C_\lambda$, le morphisme identique de B se factorise donc à travers un C_λ et par conséquent $B = C_\lambda$ est une A-algèbre de type fini.

Posons $B = C/J$ où $C = A[T_1, \dots, T_n]$, J est alors limite inductive de ses sous idéaux de type fini J_λ et par conséquent $B = \varinjlim_\lambda C_\lambda$.

Il existe donc un indice α tel que le composé

$$C/J \xrightarrow{u} C/J_\alpha \xrightarrow{P_\alpha} C/J$$

soit le morphisme identique de C/J. Si $q_\lambda : C \to C/J_\lambda$ est la projection canonique et $q : C \to C/J$ aussi, nous avons :

$$P_\alpha \circ (q_\alpha(T_i)) = P_\alpha(u(q(T_i)))$$

et il existe donc un indice β tel que J_β/J_λ contienne les $q_\lambda(T_i) - u(q(T_i)))$; on a donc un diagramme

$$\begin{tikzcd} C/J \arrow[r, "u"] & C/J_\beta \arrow[r, "P_\beta"] & C/J \\ & C \arrow[ul, "q"] \arrow[u, "q_\beta"'] & \end{tikzcd}$$

où $u(q(T_i)) = q_\beta(T_i)$ pour tout i et donc $q_\beta = u \circ q$, ce qui implique $J_\beta = J$.

Sie X est quelconque, il suffit de démontrer que tout ouvert affine U de X est de présentation finie sur S, c'est-à-dire que :

$$\varinjlim \mathrm{Hom}_S(T_\lambda, U) \longrightarrow \mathrm{Hom}_S(T, U)$$

est une bijection pour tout système $(T_\lambda)_\lambda$.

L'injectivité se vérifie immédiatement en remarquant que l'on a un système inductif d'applications dans X.

Montrons la surjectivité : soit $f : T \to U$; il existe un indice λ et un morphisme $f_\lambda : T_\lambda \longrightarrow X$ vérifiant $f = f_\lambda \times_{T_\lambda} T$. Il faut montrer que pour tout λ assez grand f_λ se factorise par U. Posons $U_\lambda = \tau_{\alpha\lambda}^{-1}(f_\lambda^{-1}(U))$, alors le complété de U_α est une partie fermée, donc quasi-compacte, vide à la limite ; elles est donc déjà vide pour α assez grand. $\square$

4. Modules de présentation finie sur une limite projective

On se donne un schéma S. Soient $(T_\alpha, \varphi_{\alpha\lambda})$ un système projectif de spectres au dessus de S de limite T, X un S-schéma quasi-compact et quasi-séparé, $\mathcal{M}$ un $\mathcal{O}_X$-Module quasi-cohérent de présentation finie, $\mathcal{N}$ un $\mathcal{O}_X$-Module quasi-cohérent.

THÉORÈME 4.1. *Considérons le foncteur* $F : (\mathcal{S}ch/S)^\circ \longrightarrow \mathcal{E}ns$ *défini par :*

$$F(T) = \mathrm{Hom}_{X\times_S T}(f^*(\mathcal{M}), f^*(\mathcal{N}))$$

où $f : X \times_S T \longrightarrow X$.

Alors F *est un foncteur de présentation finie.*

DÉMONSTRATION. Soit $(T_\alpha, \varphi_{\alpha\lambda})$ notre système projectif ; on peut supposer que S est égal à un des T_λ sans rien changer à la généralité. On obtient alors :

$$F(T_\lambda) = \mathrm{Hom}_{X\times_{T_\alpha} T_\lambda}(f_\lambda^*(\mathcal{M}), f_\lambda^*(\mathcal{N}))$$

où $f_\lambda : X \times_{T_\alpha} T_\lambda \longrightarrow X$. On posera $X \times_{T_\alpha} T_\lambda = X_\lambda$. On doit montrer que :

$$\varinjlim_\lambda \mathrm{Hom}_{X_\lambda}(f_\lambda^*(\mathcal{M}), f_\lambda^*(\mathcal{N})) = \mathrm{Hom}_{X\times_S T}(f^*(\mathcal{M}), f^*(\mathcal{N}))$$

Nous allons donner une démonstration du théorème dans le cas affine ; il se généralise en utilisant le fait que X est quasi-compact et quasi-séparé. Soit A l'anneau associé à X et B_λ celui associé à T_λ, M et N les X_α-Modules. On doit donc montrer que :

$$\varinjlim_\lambda \mathrm{Hom}_{A\otimes_{B_\alpha} B_\lambda}(M \otimes_{B_\alpha} B_\lambda, N \otimes_{B_\alpha} B_\lambda) = \mathrm{Hom}_{A\otimes_{B_\alpha} B}(M \otimes_{B_\alpha} B, N \otimes_{B_\alpha} B)$$

ce qui peut s'écrire :

$$\varinjlim_\lambda \mathrm{Hom}_A(M, N \otimes_{B_\alpha} B_\lambda) = \mathrm{Hom}_A(M, N \otimes_{B_\alpha} B)$$

Il est clair que cette égalité est vérifiée si M est libre fini. Puisque M est de présentation finie on a une suite exacte $A^p \to A^q \to M \to 0$ et puisque l'on a un foncteur exact à gauche en M l'égalité reste vraie. $\square$

THÉORÈME 4.2. *Si* $\mathcal{M}$ *est un* $X \times_S T$*-Module de présentation finie, il existe un* λ *et* $\mathcal{M}_\lambda$ *de présentation finie sur* $X \times_S T_\lambda$ *tel que :*

$$\mathcal{M} = (1 \times_S \varphi_\lambda)^*(\mathcal{M}_\lambda)$$

Avant de passer à la démonstration nous allons donner le corollaire suivant :

COROLLAIRE 4.3. *Si* $\mathcal{M}$ *et* $\mathcal{N}$ *sont tous les deux de présentaion finie, pour que* $\mathcal{M} \times_S T$ *et* $\mathcal{N} \times_S T$ *soient isomorphes, il faut et il suffit qu'il existe* λ *tel que* $\mathcal{M} \times_S T_\lambda$ *et* $\mathcal{N} \times_S T_\lambda$ *soient isomorphes.*

DÉMONSTRATION. *de 4.2* Supposons X affine et reprenons les même notations que précédemment. On doit montrer qu'étant donné M de présentation finie sur $A \otimes_{B_\alpha} B$ il exsite M_λ de présentation finie sur $A \otimes_{B_\alpha} B_\lambda$ tel que $M = M_\lambda \otimes_{B_\alpha} B$.

Cela se fait en considérant la suite exacte

$$(A \otimes_{B_\alpha} B)^p \xrightarrow{u} (A \otimes_{B_\alpha} B)^q \longrightarrow M \to 0$$

et en remarquant que les coefficients de la matrice de u sont déjà dans $A \otimes_{B_\alpha} B_\lambda$ pour λ assez grand.

Pour le cas général on recolle en sachant que X est quasi-compact et quasi-séparé. $\square$

PROPOSITION 4.4. *On garde les hypothèses des théorèmes 4.1 et 4.2.* $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$, $\mathcal{N}'$ *sont des Modules quasi-cohérents de présentation finie sur* X. *Supposons que* $\mathcal{N}$ *et* $\mathcal{N}'$ *soient des quotients de* $\mathcal{M}$ *et que* $f^*(\mathcal{N}')$ *soit un quotient de* $f^*(\mathcal{N})$, *où* $f : X \times_S T \longrightarrow X$.

Alors il existe λ *tel que* $f_\lambda^*(\mathcal{N}')$ *soit un quotient de* $f_\lambda^*(\mathcal{N})$.

Démonstration. On a la suite d'applications suivante :

$$f^*(\mathcal{M}) \xrightarrow{u} f^*(\mathcal{N}) \xrightarrow{p} f^*(\mathcal{N}')$$

p étant surjective. Il existe $p_\lambda : f_\lambda^*(\mathcal{N}) \longrightarrow f_\lambda^*(\mathcal{N}')$ donnant p. Il faut démontrer que p_λ est surjective pour λ assez grand. Si $\mathcal{Q}_\lambda = \operatorname{Coker} p_\lambda$, $f_\lambda^*(\mathcal{Q}_\lambda)$ et $f_\lambda^*(0)$ donnent le même Module et par conséquent $\mathcal{Q}_\lambda = 0$ pour λ assez grand d'après le théorème 4.1. □

5. Quelques foncteurs de présentation finie

Théorème 5.1 (EGA [12, IV, 8.6.3]). *Soient S un schéma, $(T_\alpha, \varphi_{\alpha\lambda})$ un système projectif de spectres au-dessus de S de limite T et X un S-schéma de présentation finie. Alors les foncteurs $T \mapsto F(T)$ suivants sont de présentation finie.*

(1) $F(T)$ = ensemble des sous-schémas ouverts de présentation finie de $X \times_S T$.

(2) $F(T)$ = ensemble des sous-schémas fermés de présentation finie de $X \times_S T$.

(3) $F(T)$ = ensemble des sous-schémas de présentation finie de $X \times_S T$.

Démonstration. *Par exemple nous allons prouver* (2)

Un sous-schéma Z de $X \times_S T$ de présentation finie est défini par un idéal quasi-cohérent $\mathcal{I}$ de type fini. On doit donc montrer que $(T_\alpha, \varphi_{\alpha\lambda})$ étant donné :

$$\varinjlim F(T_\alpha) = F(T)$$

Montrons l'injectivité : Soient $Z_{1\alpha}$ et $Z_{2\alpha}$ deux sous-schémas fermés de présentation finie donnant Z. On est dans les conditions de la proposition 4.4 avec X remplacé par $X \times_S T_\alpha$, $\mathcal{M} = \mathcal{O}_{X \times_S T_\alpha}$, $\mathcal{N} = \mathcal{O}_{Z_{1\alpha}}$, $\mathcal{N}' = \mathcal{O}_{Z_{2\alpha}}$

Alors il existe λ tel que $Z_{1\lambda}$ majore $Z_{2\lambda}$ et réciproquement, d'où l'égalité.

Montrons la surjectivité : Z étant donné sur $X \times_S T$, il est défini un $\mathcal{O}_Z$ qui est un Module quasi-cohérent de présentation finie. On peut donc trouver λ et $\mathcal{M}_\lambda$ tel que $\mathcal{O}_Z$ provienne de $\mathcal{M}_\lambda$. De plus il existe $\mu > \lambda$ tel que $X \times_S T_\mu \to T_\mu$ donne à la limite la projection canonique et si on choisit μ assez grand l'application est surjective et il suffit de considérer le schéma fini associé à $\mathcal{M}_\mu$. □

Nous considérons des sous-foncteur de

$$\mathcal{H}om_S(Y, X) : (\mathcal{S}ch/S)^\circ \longrightarrow \mathcal{E}ns$$
$$T/S \longmapsto \operatorname{Hom}_T(Y \times_S T, X \times_S T)$$

Théorème 5.2 (EGA [12, IV, 8.10.5]). *Supposons que X et Y soient deux schémas sur S de présentation finie. Alors les foncteurs $T \mapsto F(T) \subset \mathcal{H}om_S(Y, X)(T)$ décrits dans la liste suivante sont de présentation finie.*

(1) $F = \mathcal{H}om_S(Y, X)$

(2) $F(T) = \{f \mid f$ isomorph $\}$

(3) $F(T) = \{f \mid f$ séparé$\}$

(4) $F(T) = \{f \mid f$ surjectif $\}$

(5) $F(T) = \{f \mid f$ radiciel $\}$

(6) $F(T) = \{f \mid f$ affine $\}$

(7) $F(T) = \{f \mid f$ fini $\}$

(8) $F(T) = \{f \mid f$ quasi-fini$\}$

(9) $F(T) = \{f \mid f$ propre $\}$

(10) $F(T) = \{f \mid f$ *projectif* $\}$

(11) $F(T) = \{f \mid f$ *plat* $\}$

(12) $F(T) = \{f \mid f$ *monomorph* $\}$

Démonstration. *de* (12). Considérons le système $(T_\alpha, \varphi_{\alpha\lambda})$ de limite T. On doit montrer que tout système de morphismes $f_\alpha : Y \times_S T_\alpha \longrightarrow X \times_S T_\alpha$ donnant à la limite un monomorphisme est déjà un système de monomorphisme à partir d'un certain rang. Ceci est équivalent à ce que $\Delta_f \times_S T : Y \times_S T \longrightarrow (Y \times_X Y) \times_S T$ soit un isomorphisme ([11, 0_I,1.4.14]). Sachant que le foncteur (2) est un foncteur de présentation finie, on peut conclure. □

6. Applications

6.1. Elimination des hypothèses noethériennes. Soit le théorème

Théorème 6.1. *Soit X un schéma localement noethérien ; soit $f : Y \to X$ un morphisme plat et localement de type fini. Alors f est universellement ouvert.*

Nous nous proposons d'éliminer l'hypothèse noethérienne qui n'est pas stable par changement de base et de prouver :

Théorème 6.2. *Soit $f : Y \to X$ un morphisme plat et localement de présentation finie. Alors f est universellement ouvert.*

Démonstration. Les hypothèses et la conclusion étant locales, on se ramène à $Y = \operatorname{Spec} B$ et $X = \operatorname{Spec} A$, B étant une A-algèbre de présentaion finie. Mais A est limite inductive filtrante de ses sous $\mathbf{Z}$-algèbres de type fini A_λ qui sont des anneaux noethériens, et on sait que $B \simeq B_\lambda \otimes_{A_\lambda} A$ pour un λ assez grand, B_λ étant une A_λ-algèbre de type fini et plate. Le morphisme $Y_\lambda = \operatorname{Spec} B_\lambda \longrightarrow X_\lambda = \operatorname{Spec} A_\lambda$ satisfait aux conditions du théorème 5.1, (1), d'où le théorème. □

6.2. Endomorphismes d'un S-schéma de présentation finie. On a le théorème :

Théorème 6.3. *Soit S un schéma ; X un S-schéma de présentation finie. Tout S-endomorphisme de X qui est un monomorphisme est un automorphisme de X.*

On va d'abord prouver la

Proposition 6.4. *Soient S un schémas, X un S-schéma de type fini. Tout S endomorphisme de X qui est radiciel est surjectif (donc bijectif).*

Démonstration. Rappelons qu'un morphisme de schémas $f : Y \to X$ est dit radiciel s'il est universellement injectif ([11, § 3.7]), ou ce qui revient au même, s'il est injectif et si pour tout $y \in Y$, $\kappa(y)$ est une extension radicielle de $\kappa(f(y))$.

Rappelons qu'un schéma X est dit de Jacobson si toute partie fermé de X est l'adhérence de l'ensemble de ses points fermés. Il revient au ême de dire que toute partie localement fermée, ou constructible, non vide de X contient un point fermé.

Par exemple, $\operatorname{Spec} A$ où A est un corps ou $\mathbf{Z}$, ou une algèbre de type fini sur un corps ou sur $\mathbf{Z}$.

Si X est un schéma de Jacobson et $f : Y \to X$ un morphisme localement de type fini, alors Y est un schéma de Jacobson et l'image de tout point fermé est un point fermé ([11, cor. 6.4.7]).

Notons enfin que tout monomorphisme $f : Y \to X$ est radiciel car on voit immédiatement que pour tout $x \in X$, $f^{-1}(x)$ est, soit vide, soit $\kappa(x)$-isomorphe à $\operatorname{Spec} \kappa(x)$.

Ceci dit passons à la preuve de la proposition 6.4.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "f"'] & X \arrow[d, "f"] & X_s \arrow[r, "g_s"] \arrow[dr] & X_s \arrow[d] \\
& S & & \operatorname{Spec} \kappa(s) \arrow[ll]
\end{tikzcd}$$

Pour montrer que g est surjectif il suffit de montrer que g_s l'est pour tout $s \in S$. On se ramène donc au cas $S = \operatorname{Spec} k$, k étant un corps. Mais alors f est de présentation finie puisque k est noethérien.

D'après ce qui précède il suffit de considérer le cas où $X = \operatorname{Spec} A$, A étant une sous-$\mathbf{Z}$-algèbre de type fini de k.

Mais X est alors un schéma de JACOBSON et puisque $g(X)$ est constructible (théorème de CHEVALLEY [11, 7.1.4]), il suffira de montrer que $g(X)$ contient tous les points fermés de X ; en effet si $g(X) \neq X$, $X - g(X)$ qui est constructible comme complémentaire d'une partie constructible devrait contenir un point fermé. On est donc amené à étudier les points fermés de X.

LEMME 6.5. *Soit Y un $\mathbf{Z}$-schéma de type fini.*

(1) Pour qu'un point $y \in Y$ soit fermé, il faut et il suffit que $\kappa(y)$ soit un corps fini.

(2) Pour tout nombre premier p et tout entier $d \geq 1$, l'ensemble des points $y \in Y$ tels que $\kappa(y)$ soit une extension de $\mathbf{F}_p$ de degré divisant d est fini.

DÉMONSTRATION. (1): D'après ce qui précède l'image d'un point fermé y de Y dans $\operatorname{Spec} \mathbf{Z}$ est un point fermé, i.e. un nombre premier p. L'assertion résulte alors de ce que, si $X \to \operatorname{Spec} k$ est un morphisme de type fini, pour qu'un point $x \in X$ soit fermé il faut et il suffit que $\kappa(x)$ soit une extension finie de k.

(2): Y étant réunion finie d'ouverts affines de type fini sur $\mathbf{Z}$, on se borne au cas $Y = \operatorname{Spec} C$, C étant une $\mathbf{Z}$-algèbre de type fini. Les points y considérés correspondent bijectivement aux homomorphismes $C \to \mathbf{F}_{p^d}$. Mais C étant de type fini et $\mathbf{F}_{p^d}$ fini, il n'y a qu'un nombre fini de tels homomorphismes. $\square$

Preuve de la proposition 6.4

X est un $\mathbf{Z}$-schéma de type fini.

Soit $T_{p,d}$ l'ensemble – fini d'après ce qui précède – des points fermés $x \in X$ tels que $\kappa(x)$ soit une extension de $\mathbf{F}_p$ de degré divisant d. D'après le lemme 6.5 l'ensemble des points fermés de X est réunion des $T_{p,d}$. Or $T_{p,d}$ est stable par g car si $x \in T_{p,d}$, $\kappa(g(x))$ est un sous-corps de $\kappa(x)$; g étant injectif par hypothèse, sa restriction à $T_{p,d}$ est bijective puisque $T_{p,d}$ est fini. Ce qui prouve la proposition 6.4. $\square$

DÉMONSTRATION. *Preuve du théorème 6.3*

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "f"'] & X \arrow[d, "f"] \\
& S
\end{tikzcd}$$

La question étant locale sur S, on se ramène à S affine d'anneau A. On se ramène par un raisonnement standard au cas où A est une $\mathbf{Z}$-algèbre de type fini, les monomorphismes se *comportant bien !* par passage à la limite projective. X est donc un $\mathbf{Z}$-schéma de type fini. De plus g est bijectif.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "g"] \arrow[dr] & X \arrow[d] \\ & \mathbf{Z} \end{tikzcd}$$

Il suffit donc de montrer que g est une immersion ouverte, et même que g est plat d'après le lemme suivant. □

LEMME 6.6. *Tout monomorphisme plat de présentation finie est une immersion ouverte.*

DÉMONSTRATION. Soit f un tel monomorphisme.

Le morphisme diagonal $\Delta : X \longrightarrow X \times_S X$ est alors un isomorphisme, ainsi que les projections $p_1, p_2 : X \times_S X \longrightarrow X$.

f étant de présentation finie et plat, $f(X)$ est ouvert dans S (théorème 6.1). On est donc amené à prouver que f est un isomorphisme sur son image.

Cela se voit par descente fidèlement plate, puisque $X \longrightarrow f(X)$ est plat et surjectif.

Mais, l'ensemble des points où g est plat étant ouvert et X étant un schéma de JACOBSON, il suffit de montrer que g est plat en tout point fermé de X. Maintenant, en reprenant les notation introduites plus haut, soit $x \in T_{p,d}$. On a déjà vu que $T_{p,d}$ est un ensemble fini, stable sous g. Posant $x_1 = g(x), \dots$, on a une suite finie de morphismes locaux :

$$(*) \qquad \mathcal{O}_x \xrightarrow{f_1} \mathcal{O}_{x_1} \xrightarrow{f_2} \dots \longrightarrow \mathcal{O}_x$$

D'où, en passant aux corps résiduels une suite d'isomorphismes

$$\kappa(x) \xrightarrow{\bar{f}_1} \kappa(x_1) \xrightarrow{\bar{f}_2} \dots \longrightarrow \kappa(x)$$

$\kappa(x)$ étant un corps fini. D'où une suite d'homomorphismes surjectifs d'anneaux noethériens :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_x/\mathfrak{m}_x^2 \arrow[r, "f_1'"] \arrow[rrr, bend right, "\varphi"'] & \mathcal{O}_{x_1}/\mathfrak{m}_{x_1}^2 \arrow[r, "f_2'"] & \dots \arrow[r] & \mathcal{O}_x/\mathfrak{m}_x^2 \end{tikzcd}$$

et φ est bijectif comme endomorphisme surjectif d'anneaux noethériens. Tous les f_i' sont donc des isomorphismes ; en réitérant le procédé pour tous les $\mathcal{O}_{x_i}/\mathfrak{m}_{x_i}^n$, on voit finalement que la suite déduite de $(*)$ sur les complétés est une suite d'isomorphismes

$$\widehat{\mathcal{O}_x} \xrightarrow{\widehat{f}_1} \widehat{\mathcal{O}_{x_1}} \xrightarrow{\widehat{f}_2} \dots \longrightarrow \widehat{\mathcal{O}_x}$$

et par descente fidèlement plate, tous les f_i sont des isomorphismes. On a donc prouvé que pour tout point fermé x de X, le morphisme $\mathcal{O}_{X,g(x)} \longrightarrow \mathcal{O}_{X,x}$ est un isomorphisme – donc est plat. □

Chapitre 4

Topologies et Faisceaux

1. Cribles, Sites, Faisceaux

1.1. Topologies sur une catégorie.

Définition 1.1. *Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{E}$ deux catégories ; un* préfaisceau *sur $\mathcal{C}$ à valeurs dans $\mathcal{E}$ est un foncteur covariant de $\mathcal{C}^\circ$ dans $\mathcal{E}$.*

Définition 1.2 ([5, déf. 1.1]). *On appelle* crible *d'une catégorie $\mathcal{C}$, toute sous-catégorie pleine $R \subset \mathcal{C}$, telle que toute flèche ayant son but dans R, a sa source dans R.*

On appelle cribles *de $X \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}$, les cribles de $\mathcal{C}/X$, c'est-à-dire les sous-foncteurs du foncteur représenté par X.*

Si $f : Y \to X$ est une flèche de $\mathcal{C}$ et R un crible de X, alors $f^\bullet R = Y \times_X R$ est un crible de Y ; c'est l'ensemble des (Z, z) avec $z : Z \to Y$ tels que $f \circ z$ soit dans $R(Z)$.

$$\begin{tikzcd} f^\bullet R \arrow[r] \arrow[d, hook] & R \arrow[d, hook] \\ Y \arrow[r, "f"'] & X \end{tikzcd}$$

Définition 1.3. *Une* topologie *sur une catégorie $\mathcal{C}$, est la donnée pour tout objet X de $\mathcal{C}$ d'un ensemble $\mathcal{J}(X)$ de cribles de X satisfaisant aux axiomes suivantes:*

(T0) X est dans $\mathcal{J}(X)$.

(T1) Pour tout $R \in \mathcal{J}(X)$ et tout $f : Y \to X$, le crible de Y, $f^\bullet R = Y \times_X R$ est dans $\mathcal{J}(Y)$.

(T2) Si R et S sont deux cribles de X tels que R soit dans $\mathcal{J}(X)$ et que pour tout $Y \to R$ on ait $Y \times_X S$ dans $\mathcal{J}(Y)$, alors S est dans $\mathcal{J}(X)$.

Les cribles constituant une topologie $\mathcal{J}$ s'appellent cribles *couvrants* ou aussi *raffinements* ; ceux dans $\mathcal{J}(X)$ sont *couvrants* X. La propriété (T1) exprime la *stabilité par changement de base*, la propriété (T2) exprime le *caractère local* d'un crible pour la topologie. $\mathcal{J}(X)$ est stable par intersection finie. Tout crible contenant un crible couvrant est couvrant lui-même.

Pour un préfaisceau P de $\widehat{\mathcal{C}}$ on dit qu'un sous-foncteur $R \subset P$ est un *raffinement* et on le note $R \in \mathcal{J}(P)$ si pour tout objet (Y, f) de $\mathcal{C}/P$ on a $f^\bullet R = Y \times_P R \in \mathcal{J}(Y)$. Grâce à l'axiome (T1) on obtient les mêmes $\mathcal{J}(X)$ pour un préfaisceau $P = X$ représentable. En utilisant (T2) on constate la *transitivité* des raffinements : si $R \in \mathcal{J}(Q)$ et $Q \in \mathcal{J}(P)$, alors $R \in \mathcal{J}(P)$.

Définition 1.4. *Une famille* $\mathfrak{U} = (X_\alpha \xrightarrow{f_\alpha} X)_{\alpha \in A}$ *est dite* couvrante *pour la topologie* $\mathcal{J}$*, si le crible* $R_{\mathfrak{U}}$ *de* X *qu'elle engendre est couvrant.*

Ici on a posé $R_{\mathfrak{U}} = \{f : Y \to X \mid \exists\, g_\alpha : Y \to X_\alpha \text{ avec } f = f_\alpha \circ g_\alpha\}$

$$\begin{tikzcd} & X_\alpha \arrow[d, "f_\alpha"] \\ Y \arrow[ur, dashed, "g_\alpha"] \arrow[r, "f"'] & X \end{tikzcd}$$

La donnée pour tout objet X de $\mathcal{C}$ de familles de morphismes de but X permet de définir une topologie sur $\mathcal{C}$, la moins fine pour laquelle ces familles soient couvrantes ; les cribles couvrants pour cette topologie sont malaisés à déterminer, en général. La situation est plus agréables dans le cas suivant : (voir [14, II, 1.4] pour une caractérisation des familles couvrantes dans ce cas).

Définition 1.5 ([1, def. 0.1]). *Une* prétopologie *sur une catégorie* $\mathcal{C}$ *est la donnée pour chaque objet* X *de* $\mathcal{C}$ *d'un ensemble* $Cov(X)$ *de familles de morphismes de but* X*, tel que :*

(1) La famille $X \xrightarrow{id_X} X$ *appartient à* $Cov(X)$*.*

(2) Les morphismes de $Cov(X)$ *sont quarrables.*

(3) Pour tout objet X *et toute famille* $(X_\alpha \to X)_\alpha$ *appartenant à* $Cov(X)$ *et tout morphisme* $f : Y \to X$ *la famille* $(X_\alpha \times_X Y \to Y)_\alpha$ *appartient à* $Cov(Y)$*.*

(4) Si $(X_\alpha \to X)_\alpha$ *appartient à* $Cov(X)$ *et si pour tout* α $(X_{\beta\alpha} \to X_\alpha)_\beta$ *appartient à* $Cov(X_\alpha)$*, alors* $(X_{\beta\alpha} \to X)_{\beta\alpha}$ *appartient à* $Cov(X)$*.*

Définition 1.6. *On appelle* site *une catégorie munie d'une topologie.*

1.2. Faisceaux.

Définition 1.7. *Soit* $\mathcal{C}$ *un site. Un préfaisceau d'ensemble* $\mathcal{F}$ *de* $\widehat{\mathcal{C}}$ *est dit* séparé *(resp. un* faisceau*), si pour tout objet* X *de* $\mathcal{C}$ *et tout crible couvrant* $R \in \mathcal{J}(X)$*, l'application*

$$\mathrm{Hom}(X, \mathcal{F}) \longrightarrow \mathrm{Hom}(R, \mathcal{F})$$

est injective (resp. bijective).

Les faisceaux sur $\mathcal{C}$ forment une sous-catégorie pleine $\widetilde{\mathcal{C}}$ de $\widehat{\mathcal{C}}$.

Proposition 1.8. *Si la topologie est définie par une prétopologie,* $\mathcal{F}$ *est séparé si et seulement si pour tout objet* X *de* $\mathcal{C}$ *et toute famille couvrante* $(X_\alpha \to X)_\alpha$ *de* $Cov(X)$ *l'application*

$$\mathcal{F}(X) \longrightarrow \prod_\alpha \mathcal{F}(X_\alpha)$$

est injective.

$\mathcal{F}$ *est un faisceau si et seulement si les diagrammes :*

$$\mathcal{F}(X) \longrightarrow \textstyle\prod_\alpha \mathcal{F}(X_\alpha) \rightrightarrows \prod_{\alpha,\beta} \mathcal{F}(X_\alpha \times_X X_\beta)$$

sont exacts.

EXEMPLE 1.9. *Si X est un espace topologique, la catégorie est celle des ouverts de X avec pour morphismes les inclusion, et on prend pour familles couvrantes les recouvrements ouverts des ouverts de X* [7, chap. II].

Si $(U_\alpha)_\alpha$ est un recouvrement d'un ouvert U de X, le crible associé à $(U_\alpha)_\alpha$ est l'ensemble des ouverts de X qui sont contenus dans l'un des U_α ; dire que deux recouvrements $(U_\alpha)_\alpha$ et $(V_\beta)_\beta$ définissent le même crible de U signifie que $(U_\alpha)_\alpha$ et $(V_\beta)_\beta$ sont deux recouvrement équivalents de U (i.e. chacun est plus fin que l'autre).

Les cribles de U s'interprètent donc naturellement comme classe de recouvrements équivalents.

EXEMPLE 1.10. La topologie fpqc. *La catégorie est celle des schémas ; une famille $(X_\alpha \xrightarrow{f_\alpha} X)$ est couvrante si $X = \bigcup f_\alpha(X_\alpha)$ et si chaque f_α est* plat *et* quasi-compact. *On verra plus tard (théorème 1.3) que tout préfaisceau représentable est un faisceau* fpqc.

EXEMPLE 1.11. La topologie étale. *La catégorie est celle des schémas ; une famille $(X_\alpha \to X)$ est couvrante si $X = \bigcup f_\alpha(X_\alpha)$ et les f_α sont* étales.

EXEMPLE 1.12. *Soit P un préfaisceau sur $\mathcal{C}$ et pour chaque objet X de $\mathcal{C}$ soit $\mathcal{J}_P(X)$ l'ensemble des cribles R de X tels que pour tout $Y \to X$ on ait une bijection*

$$\operatorname{Hom}(Y, P) \longrightarrow \operatorname{Hom}(Y \times_X R, P)$$

alors les $\mathcal{J}_P(X)$ forment une topologie sur $\mathcal{C}$, la plus fine pour laquelle P est un faisceau.

DÉMONSTRATION. Il est clair que si on a une topologie c'est bien la plus fine pour laquelle P est un faisceau.

Les axiomes (T0) et (T1) de la définition 1.3 sont évidemment vérifiés ; vérifions (T2) ; montrons d'abord que $\mathcal{J}_P(X)$ est stable par intersection : soient R et S dans $\mathcal{J}_P(X)$; pour tout $Z \to X$, il faut qu'on ait une bijection :

$$\operatorname{Hom}(Z, P) \longrightarrow \operatorname{Hom}(Z \times_X R \times_X S, P)$$

mais on a :

$$R = \varinjlim_{(Y,f)\in\mathcal{C}/R} Y \qquad \text{d'où}$$

$$Z \times_X R \times_X S = \varinjlim_{(Y,f)\in\mathcal{C}/R} (Z \times_X Y) \times_Y (Y \times_X S) \qquad \text{donc}$$

$$\operatorname{Hom}(Z \times_X R \times_X S, P) = \varprojlim_{(Y,f)\in\mathcal{C}/R} \operatorname{Hom}(Z \times_X Y \times_X S, P) =$$

$$\varprojlim_{(Y,f)\in\mathcal{C}/R} \operatorname{Hom}(Z \times_X Y, P) = \operatorname{Hom}(Z \times_X R, P) = \operatorname{Hom}(Z, P)$$

Maintenant remarquons que si R est dans $\mathcal{J}_P(X)$ et si S est un crible de X tel que pour tout $Y \to R$, $Y \times_X S$ soit dans $\mathcal{J}_P(Y)$, il en est de même de $R \times_X S$. On est ainsi ramené à verifier l'axiome (T2) dans les cas $S \subset R$ et $R \subset S$; la vérification est identique à celle de $R \times_X S \in \mathcal{J}_P(X)$. □

DÉFINITION 1.13. *On appelle* topologie canonique *sur une catégorie $\mathcal{C}$, la topologie la plus fine pour laquelle les préfaisceaux représentables sur $\mathcal{C}$ sont des faisceaux.*

Les limites inductives et projectives sont représentables dans $\widehat{\mathcal{C}}$; les foncteurs $P \longmapsto P(X)$ commutent aux limites. Autrement dit les limites se calculent en chaque X.

La catégorie des préfaisceaux sur $\mathcal{C}$ à valeurs dans la catégorie des groupes abéliens est une catégorie abéliennes.

2. Faisceau associé

Soit $\mathcal{C}$ un site, on note $\widetilde{\mathcal{C}} \subset \widehat{\mathcal{C}}$ les catégories des faisceaux et préfaisceaux sur $\mathcal{C}$, et $i : \widetilde{\mathcal{C}} \longrightarrow \widehat{\mathcal{C}}$, le foncteur canonique.

2.1. Le foncteur L. On va définir un foncteur $L : \widehat{\mathcal{C}} \longrightarrow \widehat{\mathcal{C}}$ et un morphisme de foncteurs $\ell : id_{\widehat{\mathcal{C}}} \longrightarrow L$.

DÉFINITION 2.1. *Pour tout objet X de $\mathcal{C}$, on définit la limite inductive filtrante:*

$$L(P)(X) = \varinjlim_{R \in \mathcal{J}(X)} \operatorname{Hom}(R, P)$$

On note $z_R : \operatorname{Hom}(R, P) \to L(P)(X)$ l'application canonique.

Soit $f : Y \to X$ un morphisme ; le foncteur $f^\bullet : \mathcal{J}(X) \longrightarrow \mathcal{J}(Y)$ changement de base définit une application

$$L(P)(f) : L(P)(X) \longrightarrow L(P)(Y)$$

On a $L(P)(1_X) = 1_{L(P)(X)}$ et si $g : Z \to Y$ est un morphisme, $L(P)(f \circ g) = L(P)(g) \circ L(P)(f)$. On a donc construit un préfaisceau $L(P)$.

Par YONEDA on interprète aussitôt $z_R : \operatorname{Hom}(R, P) \longrightarrow \operatorname{Hom}(X, L(P))$. Pour $S \overset{r}{\hookrightarrow} R$, on a ainsi pour $u : R \to P$: $z_S(u|S) = z_R(u)$, où $u|S = u \circ r$,

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Hom}(R,P) \arrow[r] \arrow[dr, "z_R"'] & \operatorname{Hom}(S,P) \arrow[d, "z_S"] \\
 & \operatorname{Hom}(X, L(P))
\end{tikzcd}$$

On note aussi le diagramme commutatif pour tout $R \in \mathcal{J}(X)$, $f : Y \to X$:

(1)
$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Hom}(R,P) \arrow[r] \arrow[d, "z_R"'] & \operatorname{Hom}(Y \times_X R, P) \arrow[d, "z_{Y \times_X R}"] \\
\operatorname{Hom}(X, L(P)) \arrow[r, "L(P)(f)"'] & \operatorname{Hom}(Y, L(P))
\end{tikzcd}$$

En particulier pour le crible $R = X$ on obtient une application $\ell(X) = z_X$, nous donnant un morphisme de préfaisceaux :

$$\ell : P \longrightarrow L(P)$$

qui dépend fonctoriellement de P.

2.2. Propriétés du couple (L, ℓ).

LEMME 2.2 ([14, II, 3.1]).

(1) Pour tout raffinement $R \overset{i_R}{\hookrightarrow} X$ et tout $u : R \to P$ le diagramme

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r, "\ell"] & L(P) \\
R \arrow[u, "u"] \arrow[r, hook, "i_R"'] & X \arrow[u, "z_R(u)"']
\end{tikzcd}$$

est commutatif.

(2) *Soient $u, v : Q \rightrightarrows P$ deux morphismes de $\widehat{\mathcal{C}}$ tels que $\ell \circ u = \ell \circ v$. Alors le noyau $K = \mathrm{Ker}(u, v)$ est un raffinement de Q.*

Démonstration. (1): Soient T, $t \in R(T)$ quelconque. Appliquant le diagramme (1) du §2.1 ci-dessus à $Y = T$, $f = t$: comme $t : T \to X$ se factorise par R, on a $t^\bullet R \simeq T$, donc un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} u \in \mathrm{Hom}(R, P) \arrow[r] \arrow[d, "z_R"'] & \mathrm{Hom}(T, P) \ni ut \arrow[d, "\ell"] \\ \mathrm{Hom}(X, L(P)) \arrow[r, "L(P)(t)"'] & \mathrm{Hom}(T, L(P)) \end{tikzcd}$$

ce qui se traduit en

$$L(P)(t)z_R(u) = \ell(T)(u \circ t)$$
$$z_R(u)|_R.t = (\ell \circ u).t$$

et comme ceci vaut pour tout t, on a bien $z_R(u)|_R = \ell \circ u$.

(2): On est dans la situation suivante :

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\ell"] & L(P) \\ Q \arrow[u, shift left, "u"] \arrow[u, shift right, "v"'] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

et pour voir que $K \subset Q$ est couvrant, il faut montrer que pour tout $f : Y \to Q$ on ait $f^\bullet K = Y \times_Q K \in \mathcal{J}(Y)$. Or, on a $f^\bullet K \supset \mathrm{Ker}(u \circ f, v \circ f)$, et il suffit de montrer que ce dernier noyau est couvrant. On est ainsi ramené à la situation où $Q = Y$ est représentable, $s = u \circ f, t = v \circ f$:

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\ell"] & L(P) \\ Y \arrow[u, shift left, "s"] \arrow[u, shift right, "t"'] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Par hypothèse, $z_Y(s) = \ell \circ s = \ell \circ t = z_Y(t)$, donc par définition de $L(P)$, il existe $R \in \mathcal{J}(Y)$ tel que $s|R = t|R$, c'est-à- dire que $R \subset \mathrm{Ker}(s, t)$ et ensuite $\mathrm{Ker}(s, t) \in \mathcal{J}(Y)$. $\square$

Proposition 2.3 ([14, II, 3.2]).

(1) *Le foncteur L est exact à gauche.*

(2) *Pour tout préfaisceau P, $L(P)$ est un préfaisceau* séparé.

(3) *Le préfaisceau P est séparé si et seulement si le morphisme $\ell : P \longrightarrow L(P)$ est un monomorphisme. Le préfaisceau $L(P)$ est alors un faisceau.*

(4) *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*
   (a) *$\ell : P \longrightarrow L(P)$ est un isomorphisme*
   (b) *P est un faisceau*

Démonstration. (1): Le foncteur $P \mapsto \mathrm{Hom}(R, P)$ commute aux limites projectives quelconques et la limite inductive filtrante $L(P)$ commute aux limites projectives finies, donc L est exact à gauche.

(2): Il faut montrer que pour tout objet X et tout raffinement $R \in \mathcal{J}(X)$ l'application

$$\mathrm{Hom}(X, L(P)) \longrightarrow \mathrm{Hom}(R, L(P))$$

soit injective. Soient donc $s, t \in L(P)(X)$ avec $s|R = t|R$. Soient $s = z_{R'}(u), t = z_{R'}(v)$ pour un raffinement $R' \subset R$.

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[rr, "\ell"] & & L(P) \\
R' \arrow[u, shift right, "u"] \arrow[u, shift left, "v"'] \arrow[r, hook] & R \arrow[ur] \arrow[r, hook] & X \arrow[u, shift right, "s"] \arrow[u, shift left, "t"']
\end{tikzcd}$$

En appliquant lemme 2.2, (2) on conclut que le noyau $K = \mathrm{Ker}(u, v)$ est un raffinement de R' et donc aussi de X (par *transitivité* des raffinements). Donc $s = z_K(u|K) = z_K(v|K) = t$.

(3): Soit d'abord P séparé. On a pour les raffinements $R \subset X$ des injections $P(X) \hookrightarrow P(R)$, donc à la limite $P(X) \hookrightarrow L(P)(X)$ et $\ell(X)$ est un monomorphisme, donc aussi $\ell : P \hookrightarrow L(P)$.

Si, d'autre part ℓ est un monomorphisme, P doit être séparé comme sous-objet d'un objet séparé.

Remarquons aussi que $P \hookrightarrow L(P)$ est un raffinement de $L(P)$. Pour le voir soit $s : X \to L(P)$ tel que $s = z_R(u)$:

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r, hook] & L(P) \\
R \arrow[u, "u"] \arrow[r, hook] & X \arrow[u, "s"']
\end{tikzcd}$$

comme alors $s^\bullet P \supset R$, on a bien $s^\bullet P \in \mathcal{J}(X)$, donc $P \in \mathcal{J}(L(P))$.

Montrons que $L(P)$ est alors un faisceau, c'est-à-dire que pour tout raffinement R de X et tout $u : R \to L(P)$ il existe une section $s : X \to L(P)$ tel que $u = s|R$:

$$\begin{tikzcd}
L(P) & \\
R \arrow[u, "u"] \arrow[r, hook] & X \arrow[ul, dashed, "s"']
\end{tikzcd}$$

Nous complétons le diagramme avec $R' = u^\bullet P \in \mathcal{J}(R)$, donc $\in \mathcal{J}(X)$ par transitivité :

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r, hook, "\ell"] & L(P) & \\
R' \arrow[u, "u'"] \arrow[r, hook] & R \arrow[u, "u"] \arrow[r, hook] & X \arrow[ul, "s"']
\end{tikzcd}$$

et pour $s = z_{R'}(u')$ on a $s|R = u$.

(4): (4a) $\implies$ (4b) parce qu'on a vu (3) que P est séparé, donc $L(P)$ un faisceau, donc aussi $P \simeq L(P)$.

(4b) $\implies$ (4a) pour un faisceau les morphismes de transition $P(X) \to P(R)$ sont des isomorphismes, donc à la limite $P(X) \xrightarrow{\sim} L(P)(X)$. $\square$

PROPOSITION 2.4. *Le foncteur $i : \widetilde{\mathcal{C}} \to \widehat{\mathcal{C}}$ admet un adjoint à gauche $a : \widehat{\mathcal{C}} \to \widetilde{\mathcal{C}}$, qui est exact à gauche. On a donc des bijections fonctorielles en $P \in \widehat{\mathcal{C}}$ et $\mathcal{F} \in \widetilde{\mathcal{C}}$:*

$$\mathrm{Hom}_{\widetilde{\mathcal{C}}}(a(P), \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathcal{C}}}(P, \mathcal{F})$$

On peut prendre $a = L \circ L$, avec pour morphisme d'adjonction $\ell \circ \ell : P \to a(P)$. Le faisceau $a(P)$ est appelé le *faisceau associé* à P.

2.3. Limites de faisceaux. Faisceaux abéliens.

PROPOSITION 2.5. *Une limite projective dans* $\widehat{\mathcal{C}}$ *de faisceaux est un faisceau, donc une limite dans* $\widetilde{\mathcal{C}}$.

Les limites inductives existent dans $\widetilde{\mathcal{C}}$ *; si* $G : \mathcal{I} \longrightarrow \widetilde{\mathcal{C}}$ *est un foncteur on a*

$$\varinjlim_{\mathcal{I}} G = a(\varinjlim_{\mathcal{I}} i \circ G)$$

PROPOSITION 2.6. *Les faisceaux abéliens sur* $\mathcal{C}$ *forment une catégorie abélienne.*

Soit $u : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ *un morphisme ; le noyau de* u *est le faisceau* $X \mapsto \operatorname{Ker} u(X)$. *L'image de* u *est le faisceau associé au préfaisceau* $X \mapsto \operatorname{Im} u(X)$.

PROPOSITION 2.7. *La suite* $\mathcal{F}' \xrightarrow{u} \mathcal{F} \xrightarrow{v} \mathcal{F}''$ *dans* $\widetilde{\mathcal{C}}$ *est exacte si et seulement si pour tout objet* X *de* $\mathcal{C}$ *et tout* $\xi \in \mathcal{N}(X)$ *il existe* $R \in \mathcal{J}(X)$ *et* $\eta : R \to I$ *tel que l'on ait un diagramme commutatif :*

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r] & \mathcal{N} \\ R \arrow[u, "\eta"] \arrow[r, hook] & X \arrow[u, "\xi"'] \end{tikzcd}$$

où I *est l'image de* u *dans* $\widehat{\mathcal{C}}$ *et* $\mathcal{N}$ *le noyau de* v.

DÉMONSTRATION. En effet l'image $I \subset \mathcal{F}$ est séparé et $L(I) = \mathcal{I}$ est l'image faisceautique dans $\widetilde{\mathcal{C}}$, et on a traduit l'égalité $\mathcal{I}(X) = L(I)(X) = \varinjlim_{R \in \mathcal{J}(X)} I(R) = \mathcal{N}(X)$ en language des sections. □

Supposons la topologie définie par une prétopologie, alors

PROPOSITION 2.8. *La suite* $\mathcal{F}' \xrightarrow{u} \mathcal{F} \xrightarrow{v} \mathcal{F}''$ *est exacte, si pour tout objet* X *de* $\mathcal{C}$ *et tout* $\xi \in \mathcal{N}(X)$ *il existe une famille couvrante* $(f_\alpha : X_\alpha \to X)$, *et des sections* $\xi'_\alpha \in \Gamma(X_\alpha, \mathcal{F}')$, *tel que* $u(\xi'_\alpha) = \mathcal{F}(f_\alpha)(\xi)$.

EXEMPLE 2.9 (de faisceaux abéliens).

(1) *Le faisceau des fonctions morphiques sur une variété.*
(2) *Le faisceau des sections d'un fibré vectoriel.*
(3) *Le faisceau structural sur* $\operatorname{Spec} A$.

EXEMPLE 2.10 (de suites exactes). *Soit* X *une variété analytique complexe,* $\mathcal{O}_X$ *le faisceau des fonctions morphiques sur* X *et* $\mathcal{O}_X^*$ *le faisceau des unités de* $\mathcal{O}_X$.

Alors $\exp : \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X^*$ *est un épimorphisme de faisceaux tel que pour un ouvert* U *de* X *les fonctions* $\exp(U)$ *ne soient pas toutes surjectives, i.e.* $\exp$ *n'est pas un épimorphisme de préfaisceaux. Par exemple si* $X = \mathbf{C}$ *et* $z \in \Gamma(X - \{0\}, \mathcal{O}_X^*)$ *on sait que* z *ne se relève pas ; toutefois toute fonction* $g \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X^*)$ *se relève localement, i.e. on peut définir* $\log(g)$ *au voisinage de chaque point.*

On a une suite exacte de faisceaux :

$$0 \to \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{O}_X \xrightarrow{\exp} \mathcal{O}_X^* \to 0$$

où $\mathcal{N}$ *est le faisceau qui au-dessus de chaque composante connexe* U_α *d'un ouvert* U *de* X *est égale à* $2\pi i\mathbf{Z}$ *; c'est aussi le faisceau associé au préfaisceau constant* $\mathbf{Z}$.

EXEMPLE 2.11 (suite exacte dans les schémas). *Dans la catégorie des schémas, le préfaisceau :*

$$\boldsymbol{\mu} : S \mapsto \Gamma(S, \mathcal{O}_S^*)$$

est représentable par $\mathrm{Spec}(\mathbf{Z}[T, T^{-1}])$. *En effet, on a des bijections fonctorielles en* S *:*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}ch}(S, \mathrm{Spec}(\mathbf{Z}[T, T^{-1}])) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}nn}(\mathbf{Z}[T, T^{-1}], \Gamma(S, \mathcal{O}_S))$$

et ce dernier ensemble s'identifie à $\Gamma(S, \mathcal{O}_S^*)$ *par* $u \mapsto u(T)$.

$\boldsymbol{\mu}$ *est un faisceau pour les topologies* étale *et* fpqc.

Pour tout entier $n \geq 1$, *on définit un morphisme*

$$\begin{aligned} n : \boldsymbol{\mu} &\longrightarrow \boldsymbol{\mu} \\ \xi &\longmapsto \xi^n \end{aligned}$$

n *est un épimorphisme de faisceaux pour la topologie* fpqc. *Soit* S *un schéma et soit* $n_S : \boldsymbol{\mu}_S \longrightarrow \boldsymbol{\mu}_S$ *la « restriction » de* $n : \boldsymbol{\mu} \longrightarrow \boldsymbol{\mu}$ *à la catégorie des schémas au-dessus de* S. *Pour que* n_S *soit un épimorphisme pour la topologie* étale, *il faut et il suffit que* n *soit premier aux caractéristiques résiduelles de* S.

On va fabriqué une famille couvrante $(S'_\alpha \xrightarrow{f'_\alpha} S)_{\alpha \in I}$ *telle que pour* $\xi \in \Gamma(S, \mathcal{O}_S^*)$, *il existe* $\xi'_\alpha \in \Gamma(S'_\alpha, \mathcal{O}^*_{S'_\alpha})$ *tels que* $\xi | S_\alpha = f'_\alpha(\xi'_\alpha)^n$.

Pour cela soit d'abord $(S_\alpha)_{\alpha \in I}$ *un recouvrement de* S *par des ouverts affines et soit* $i_\alpha : S_\alpha \to S$ *le morphisme canonique ;* i_α *est un morphisme plat, étale, quasi-compact.*

Posons $S'_\alpha = \mathrm{Spec}(\Gamma(S_\alpha, \mathcal{O}_S)[T]/(T^n - \xi | S_\alpha))$. *Soit* $f_\alpha : S'_\alpha \to S_\alpha$ *le morphisme associé au morphisme d'anneaux :*

$$\varphi_\alpha : \Gamma(S_\alpha, \mathcal{O}_S) \to \Gamma(S_\alpha, \mathcal{O}_S)[T]/(T^n - \xi | S_\alpha)$$

soit $f'_\alpha = i_\alpha \circ f_\alpha$ *; si* ξ'_α *est l'élément de* $\Gamma(S'_\alpha, \mathcal{O}^*_{S'_\alpha})$ *correspondant à* $\varphi_\alpha(\xi | S_\alpha)$, *on a bien* $\xi | S_\alpha = f'_\alpha(\xi'_\alpha)^n$ *; d'autre part* φ_α *est fidèlement plat, donc* f_α *est fidèlement plat, donc* f_α *est plat et surjectif, donc* f'_α *est plate surjective et aussi quasi-compacte.*

D'autre part si n *est premier aux caractéristiques résiduelles de* S, φ_α *fait de* $\Gamma(S_\alpha, \mathcal{O}_S)[T]/(T^n - \xi | S_\alpha)$ *une* $\Gamma(S_\alpha, \mathcal{O}_S)$*-algèbre formellement étale.*

On a une suite exacte de faisceaux

$$0 \to \boldsymbol{\mu}_n \longrightarrow \boldsymbol{\mu} \xrightarrow{n} \boldsymbol{\mu} \to 0$$

où $\boldsymbol{\mu}_n$ *est le faisceau qui à tout schéma* S *associe le groupe des racines* n^{ieme} *de l'unité de* $\Gamma(S, \mathcal{O}_S)$.

EXEMPLE 2.12 (espaces topologiques). *Soit* X *unespace topologique et* $\mathcal{F}$ *un préfaisceau sur* X *; on construit* $a(\mathcal{F})$ *de la façon suivante : pour tout ouvert* U *de* X, $\Gamma(U, a(\mathcal{F}))$ *est l'ensemble des familles* $(s_x)_{x \in U}$ *où* $s_x \in \mathcal{F}_x$ *telles que pour tout* $x \in U$, *il existe un voisinage ouvert* $V \subset U$ *de* x *et* $t \in \Gamma(V, \mathcal{F})$ *tels que pour tout* $z \in V$, *on ait* $s_z = t_z$.

Pour qu'une suite de faisceaux abéliens :

$$\mathcal{F}' \xrightarrow{u} \mathcal{F} \xrightarrow{v} \mathcal{F}''$$

soit exacte il faut et il suffit que pour tout $x \in X$, *la suite :*

$$\mathcal{F}'_x \xrightarrow{u_x} \mathcal{F}_x \xrightarrow{v_x} \mathcal{F}''_x$$

soit exacte.

On sait que si la première suite est exate, les deuxièmes le sont.

Inversement il faut montrer que pour tout ouvert U de X et tout $\xi \in \mathcal{F}(U)$ tel que $v(\xi) = 0$, il existe un recouvrement ouvert $(U_\alpha)_{\alpha \in I}$ de U et des sections $\xi'_\alpha \in \mathcal{F}'_\alpha(U_\alpha)$ telles que

$$\xi | U_\alpha = u(\xi'_\alpha)$$

en effet pour tout $x \in U$ on a $v(\xi)_x = v_x(\xi_x) = 0$, donc il existe un voisinage ouvert V_x de x et une section $\xi' \in \mathcal{F}'(V_x)$ tel que :

$$\xi_x = u_x(\xi'_x) = u(\xi')_x$$

on déduit qu'il existe un voisinage ouvert U_x de x contenu dans V_x tel que

$$\xi | U_x = u(\xi' | U_x)$$

la famille $(U_x, \xi' | U_x)_{x' \in U}$ répond à la question.

Exemple 2.13 (de préfaisceau séparé qui n'est pas un faisceau). *Soit $\mathcal{C}^b$ le préfaisceau des fonctions continues et bornées sur $\mathbf{R}$ à valeurs dans $\mathbf{R}$. $\mathcal{C}^b$ n'est pas un faisceau car les injection canoniques $j_n : [-n, n] \to \mathbf{R}$ ne relèvent pas en une fonction bornée de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$; le faisceau associé à $\mathcal{C}^b$ s'identifie au faisceau des fonctions continues sur $\mathbf{R}$ à valeurs dans $\mathbf{R}$. En effet, soit U un ouvert de $\mathbf{R}$; un élément de $\Gamma(U, a(\mathcal{C}^b))$ est une famille de germes $(f^x)_{x \in U}$ qui se « recollent » ; mais f^x provient d'une fonction g^x définie continue bornée sur un voisinage de x contenu dans U. La condition de recollement des germes signifie que deux fonctions g^x, g^y coïncident où elles sont toutes deux définies ; donc g^x et g^y définissent un élément de $\mathcal{C}(U, \mathbf{R})$. Le résultat énoncé est alors évident. On peut d'ailleurs obtenir ce résultat par un calcul direct.*

3. Image directe et reciproque de préfaisceaux

Soit $\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}$ trois catégories et $u : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ un foncteur.

3.1. Image directe.

Définition 3.1. *On appelle* image directe *du préfaisceau $P \in \mathrm{Hom}(\mathcal{C}^\circ, \mathcal{E})$, le préfaisceau $Pu \in \mathrm{Hom}(\mathcal{D}^\circ, \mathcal{E})$ et on le note $u_\bullet(P)$.*

Si $f : P \to Q$ est un morphisme, $u_\bullet(f) = fu$ est un morphisme de $u_\bullet(P)$ dans $u_\bullet(Q)$.

Le foncteur $u_\bullet : \mathrm{Hom}(\mathcal{C}^\circ, \mathcal{E}) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathcal{D}^\circ, \mathcal{E})$ est appelé foncteur image directe.

3.2. Image réciproque.

Proposition 3.2 (Théorème de Kan). *On suppose que $\mathcal{E}$ a des limites inductives. Alors $u_\bullet$ a un adjoint $u^\bullet$ à gauche, i.e. on a des bijections fonctorielles en $\mathcal{F} \in \mathrm{Hom}(\mathcal{C}^\circ, \mathcal{E})$ et $\mathcal{G} \in \mathrm{Hom}(\mathcal{D}^\circ, \mathcal{E})$:*

$$\mathrm{Hom}(u^\bullet(\mathcal{G}), \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(\mathcal{G}, u_\bullet(\mathcal{F}))$$

Remarque. La proposition 3.2 correspond à la proposition [14, I, 5.1] – à la notation près : $u_\bullet = u^*$ de loc.cit. et $u^\bullet = u_!$ de loc.cit.

On sait qu'il faut et qu'il suffit pour tout $\mathcal{G} \in \mathrm{Hom}(\mathcal{D}^\circ, \mathcal{E})$ de trouver $u^\bullet(\mathcal{G})$ et des bijections fonctorielles en $\mathcal{F}$.

Pour tout objet X de $\mathcal{C}$ soit $\mathcal{I}_u^X$ la catégorie suivante : un objet de $\mathcal{I}_u^X$ est un couple (Y, m) où Y est un objet de $\mathcal{D}$ et m est une flèche $m : X \to u(Y)$;

un morphisme de (Y,m) dans (Y',m') est un morphisme $\xi : Y \to Y'$ tel que $u(\xi) \circ m = m'$.

On a un foncteur évident $pr_X : \mathcal{I}_u^X \to \mathcal{D}$.

Si $\lambda : X \to X'$ est un morphisme de $\mathcal{C}$, on a un foncteur évident $\mathcal{I}_u^\lambda : \mathcal{I}_u^{X'} \to \mathcal{I}_u^X$; en plus, $pr_{X'} = pr_X \mathcal{I}_u^\lambda$.

Définition 3.3. *Pour tout objet X de $\mathcal{C}$ on pose*

$$u^\bullet(\mathcal{G})(X) = \varinjlim_{\mathcal{I}_u^X} \mathcal{G}\, pr_X$$

Pour tout objet (Y,m) de $\mathcal{I}_u^X$ on notera le morphisme canonique dans la limite injective $i_X(Y,m) : \mathcal{G}(Y) \to u^\bullet(\mathcal{G})(X)$; si $\xi : (Y,m) \to (Y',m')$, on a donc

$$i_X(Y,m) \circ \mathcal{G}(\xi) = i_X(Y',m')$$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{G}(Y') \arrow[r, "\mathcal{G}(\xi)"] \arrow[dr, "i_X(Y',m')"'] & \mathcal{G}(Y) \arrow[d, "i_X(Y,m)"] \\ & u^\bullet(\mathcal{G})(X) \end{tikzcd}$$

Soit $\lambda : X \to X'$ un morphisme ; il existe un morphisme unique $u^\bullet(\mathcal{G})(\lambda)$ de $u^\bullet(\mathcal{G})(X')$ dans $u^\bullet(\mathcal{G})(X)$ tel que pour tout (Y,m) dans $\mathcal{I}_u^{X'}$, on ait un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} u^\bullet(\mathcal{G})(X') \arrow[rr, "u^\bullet(\mathcal{G})(\lambda)"] & & u^\bullet(\mathcal{G})(X) \\ & \mathcal{G}(Y) \arrow[ul, "i_{X'}(Y,m)"] \arrow[ur, "i_X(Y,m\lambda)"'] & \end{tikzcd}$$

On a $u^\bullet(\mathcal{G})(1_X) = 1_{u^\bullet(\mathcal{G})(X)}$ et si $\lambda' : X' \to X''$ est un morphisme, $u^\bullet(\mathcal{G})(\lambda' \circ \lambda) = u^\bullet(\mathcal{G})(\lambda) \circ u^\bullet(\mathcal{G})(\lambda')$.

On a donc construit un préfaisceau $u^\bullet(\mathcal{G})$.

Définition 3.4. *On pose pour tout objet Y de $\mathcal{D}$*

$$\alpha(Y) = i_{u(Y)}(Y, 1_{u(Y)}) : \mathcal{G}(Y) \longrightarrow u^\bullet(\mathcal{G})(u(Y))$$

Proposition 3.5. *α est un morphisme fonctoriel de $\mathcal{G}$ dans $u_\bullet(u^\bullet(\mathcal{G}))$.*

Démonstration. En effet pour tout $\mu : Y \to Y'$, on a un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{G}(Y') \arrow[r, "\alpha(Y')"] \arrow[d, "\mathcal{G}(\mu)"'] & u^\bullet(\mathcal{G})(u(Y')) \arrow[d, "u^\bullet(\mathcal{G})(u(\mu))"] \\ \mathcal{G}(Y) \arrow[r, "\alpha(Y)"] & u^\bullet(\mathcal{G})(u(Y)) \end{tikzcd}$$

□

Proposition 3.6. *Pour tout préfaisceau $\mathcal{F}$ de $\mathrm{Hom}(\mathcal{C}^\circ, \mathcal{E})$, l'application*

$$\xi : \mathrm{Hom}(u^\bullet(\mathcal{G}), \mathcal{F}) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathcal{G}, u_\bullet(\mathcal{F}))$$
$$f \longmapsto u_\bullet(f)\alpha$$

est bijective.

On va fabriquer l'application réciproque η de ξ.

Proposition 3.7.

(1) Pour tout $g : \mathcal{G} \to u_\bullet(\mathcal{F})$ et tout objet X de $\mathcal{C}$ il existe un morphisme $\eta(g)(X)$ unique de $u^\bullet(\mathcal{G})(X)$ dans $\mathcal{F}(X)$ tel que pour tout objet (Y, m) de $\mathcal{I}_u^X$, on ait un diagramme commutatif :

$$(*) \qquad \begin{tikzcd} u^\bullet(\mathcal{G})(X) \arrow[r, "\eta(g)(X)"] & \mathcal{F}(X) \\ \mathcal{G}(Y) \arrow[u, "i_X(Y,m)"] \arrow[r, "g(Y)"] & \mathcal{F}(u(Y)) \arrow[u, "\mathcal{F}(m)"'] \end{tikzcd}$$

(2) $\eta(g)$ est un morphisme de $u^\bullet(\mathcal{G})$ dans $\mathcal{F}$.

Démonstration. (1) est évident ; prouvons (2) : il faut vérifier que si λ est un morphisme de X dans X', on a

$$\eta(g)(X)u^\bullet(\mathcal{G})(\lambda) = \mathcal{F}(\lambda)\eta(g)(X')$$

i.e. pour tout objet (Y, m) de $\mathcal{I}_u^{X'}$, on a :

$$\eta(g)(X)u^\bullet(\mathcal{G})(\lambda)i_{X'}(Y, m) = \mathcal{F}(\lambda)\eta(g)(X')i_{X'}(Y, m)$$

mais on a :

$$\eta(g)(X')i_{X'}(Y, m) = \mathcal{F}(m)g(Y)$$

et

$$u^\bullet(\mathcal{G})(\lambda)i_{X'}(Y, m) = i_X(Y, m\lambda)$$

il faut vérifier que $\eta(g)(X)i_X(Y, m\lambda) = \mathcal{F}(m\lambda)g(Y)$ ce qui est un cas particulier de $(*)$. $\square$

Proposition 3.8.

(1) On a $\eta \circ \xi(f) = f$.

(2) On a $\xi \circ \eta(g) = g$.

Démonstration. (1) il faut vérifier que le diagramme $(*)$ où $g(Y)$ est remplacé par $\xi(f)(Y)$ et $\eta(g)(X)$ par $f(X)$ est commutatif, i.e. que le diagramme,

$$\begin{tikzcd} \mathcal{G}(Y) \arrow[r, "i_X(Y,m)"] \arrow[dr, "i_{u(Y)}(Y,1_{u(Y)})"'] \arrow[drr, "\xi(f)(Y)"] & u^\bullet(\mathcal{G})(X) \arrow[r, "\eta(g)(X)"] & \mathcal{F}(X) \\ & u^\bullet(\mathcal{G})(u(Y)) \arrow[u, dashed] \arrow[r, "\eta(g)(u(Y))"'] & \mathcal{F}(u(Y)) \arrow[u, "\mathcal{F}(m)"'] \end{tikzcd}$$

est commutatif ; c'est évident avec $\dashrightarrow \; = u^\bullet(\mathcal{G})(m)$.

(2) Remarquons d'abord que pour $f : u^\bullet(\mathcal{G}) \to \mathcal{F}$ et un objet Y de $\mathcal{D}$ on a la formule :

$$\xi(f)(Y) : \mathcal{G}(Y) \xrightarrow{i_{u(Y)}(Y, 1_{u(Y)})} u^\bullet(\mathcal{G})(u(Y)) \xrightarrow{f(u(Y))} \mathcal{F}(u(Y))$$

Il faut vérifier que si dans cette formule on remplace f par $\eta(g)$ on trouve $g(Y)$, mais c'est justement ce que donne $(*)$ où on fait $X = u(Y)$, $m = 1_{u(Y)}$. $\square$

4. Image directe et reciproque de faisceaux ; Topos

4.1. Image réciproque de faisceaux. On considère deux sites $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ et un foncteur $u : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$. On suppose que l'image directe par u de tout faisceau sur $\mathcal{C}$, est un faisceau sur $\mathcal{D}$; alors :

PROPOSITION 4.1. *Le foncteur $u_* : \widetilde{\mathcal{C}} \longrightarrow \widetilde{\mathcal{D}}$, (restriction à $\widetilde{\mathcal{C}}$ de $u_\bullet$) admet un adjoint à gauche u^*.*

DÉMONSTRATION. Le foncteur u^* restriction à $\widetilde{\mathcal{D}}$ de $a \circ u^\bullet$ répond à la question. □

Le foncteur u^* n'est intéressant que s'il est exact à gauche, d'où :

DÉFINITION 4.2. *Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ deux sites. On appelle* morphisme de sites *de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{D}$ un foncteur $u : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$, tel que*

(1) pour tout faisceau $\mathcal{F}$ sur $\mathcal{C}$, $u_\bullet(\mathcal{F})$ est un faisceau

(2) u^* est exact à gauche.

Le composé de deux morphismes de sites est un morphisme de sites.

PROPOSITION 4.3 ([14, III, 1.3.5]). *Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ deux sites et $u : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ un foncteur. On suppose:*

(1) les limites projectives finies de $\mathcal{D}$ sont représentables.

(2) u commute aux limites projectives finies.

(3) l'image par u de toute famille couvrante de $\mathcal{D}$ est une famille couvrante pour $\mathcal{C}$.

Alors u définit un morphisme de sites de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{D}$.

4.2. Catégories de faisceaux : topos. Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ deux sites et $u : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ un morphisme de sites de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{D}$; alors u^* définit un morphisme de sites de $\widetilde{\mathcal{C}}$ dans $\widetilde{\mathcal{D}}$ pour les topologies canoniques.

Dans la suite $\mathcal{U}$ désigne un *univers*, voir [14, I, appendice].

PROPOSITION 4.4. *Soit $\mathcal{E}$ une $\mathcal{U}$-catégorie. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(1) Il existe un site $\mathcal{C} \in \mathcal{U}$, tel que les limites projectives dans $\mathcal{C}$ soient représentables et que la topologie de $\mathcal{C}$ soit moins fine que la topologie canonique, tel que $\mathcal{E}$ soit équivalent à la catégorie $\widetilde{\mathcal{C}}$ des $\mathcal{U}$-faisceaux d'ensembles sur $\mathcal{C}$.

(2) (a) Les limites projectives finies de $\mathcal{E}$ sont représentables.

(b) Les sommes directes indexées par un élément de $\mathcal{U}$ sont représentables ; elles sont disjointes et universelles.

(c) Les relations d'équivalences dans $\mathcal{E}$ sont effectives universelles.

(d) $\mathcal{E}$ admet une famille génératrice indexée par un élément de $\mathcal{U}$.

(3) Il existe un site $\mathcal{C} \in \mathcal{U}$ tel que $\mathcal{E}$ est équivalente à la catégorie $\widetilde{\mathcal{C}}$ des $\mathcal{U}$-faisceaux d'ensembles sur $\mathcal{C}$ et que $\mathcal{C}$ admette une $\mathcal{U}$-famille de générateurs topologiques.

(4) Les $\mathcal{U}$-faisceaux sur $\mathcal{E}$ pour la topologie canonique sont représentables et $\mathcal{E}$ possède une petite famille génératrice.

DÉFINITION 4.5. *Un objet $\mathcal{E}$ possédant les propriétés équivalentes (1), (2), (3), (4) de la proposition est appelé un $\mathcal{U}$-*topos*, voir* [14, exp. IV, Topos].

Chapitre 5

Descente fidèlement plate quasi-compacte

1. Théorème fondamental

Soit S_0 un schéma, et $\mathcal{S}ch/S_0$ la catégorie des schémas au-dessus de S_0, X_0 et Y_0 deux objets de cette catégorie. Tout changement de base $S \to S_0$ leur fait correspondre deux schémas au-dessus de S: $X_S = X_0 \times_{S_0} S$ et $Y_S = Y_0 \times_{S_0} S$.

THÉORÈME 1.1. *Le préfaisceau sur la catégorie $\mathcal{S}ch/S_0$ à valeurs dans $\mathcal{E}ns$ défini par :*

$$\mathcal{H}om_{S_0}(X_0, Y_0)(S) = \operatorname{Hom}_S(X_S, Y_S)$$

est un faisceau pour la topologie fpqc*.*

Rappelons qu'un préfaisceau $\mathcal{P}$ est un faisceau si pour tout crible R couvrant S l'application

$$\mathcal{P}(S) \xrightarrow{\sim} \mathcal{P}(R) = \operatorname{Hom}(R, \mathcal{P})$$

est une bijection.

La topologie fpqc étant engendrée par les familles couvrantes du type $\{S_\alpha \xrightarrow{f_\alpha} S\}$ où chaque flèche f_α est plate et quasi-compacte et la famille (f_α) surjective, il suffit par la proposition 1.8 de vérifier que pour toute famille de ce type, la suite

$$\mathcal{P}(S) \longrightarrow \textstyle\prod_\alpha \mathcal{P}(S_\alpha) \rightrightarrows \textstyle\prod_{\alpha,\beta} \mathcal{P}(S_\alpha \times_S S_\beta)$$

est exacte.

COROLLAIRE 1.2 (Cas où $X_0 = S_0$). *Le théorème donne les résultats suivants :*
— *Le préfaisceau des sections de Y_0 : $S \mapsto \operatorname{Hom}_S(S, Y_S)$ est un faisceau fpqc.*
— *Le préfaisceau $S \mapsto \operatorname{Hom}_{S_0}(S, Y_0)$, qui est isomorphe au précédent, est un faisceau fpqc.*

Réciproquement, le théorème 1.1 découle du corollaire 1.2. Pour le voire, soit $(S_\alpha \to S)$ une famille couvrant S, alors la famille $(X_{S_\alpha} \to X_S)$ déduite par changement de base, couvre X_S, donc la suite

$$\operatorname{Hom}_{S_0}(X_S, Y_0) \longrightarrow \textstyle\prod_\alpha \operatorname{Hom}_{S_0}(X_{S_\alpha}, Y_0) \rightrightarrows \textstyle\prod_{\alpha,\beta} \operatorname{Hom}_{S_0}(X_{S_\alpha} \times_{X_S} X_{S_\beta}, Y_0)$$

est exacte. Ceci implique que pour $\mathcal{P} = \mathcal{H}om_{S_0}(X_0, Y_0)$ la suite

$$\mathcal{P}(S) \longrightarrow \textstyle\prod_\alpha \mathcal{P}(S_\alpha) \rightrightarrows \textstyle\prod_{\alpha,\beta} \mathcal{P}(S_\alpha \times_S S_\beta)$$

est exacte, comme le dernier isomorphisme

$$\mathcal{P}(S_\alpha \times_S S_\beta) = \operatorname{Hom}_{S_\alpha \times_S S_\beta}(X_{S_\alpha \times_S S_\beta}, Y_{S_\alpha \times_S S_\beta}) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_{S_0}(X_{S_\alpha} \times_{X_S} X_{S_\beta}, Y_0)$$

provient de $X_{S_\alpha} \times_{X_S} X_{S_\beta} = X_{S_\alpha} \times_{X_S} (X_S \times_S S_\beta) = (X_S \times_S S_\alpha) \times_S S_\beta$ et que $X_{S_\alpha \times_S S_\beta} = X_S \times_S (S_\alpha \times_S S_\beta)$.

D'où les trois énoncés équivalents suivants

$$\begin{array}{ll} S \longmapsto \mathrm{Hom}_S(S, Y_S) & \text{est un faisceau fpqc} \\ S \longmapsto \mathrm{Hom}_{S_0}(S, Y_0) & \text{est un faisceau fpqc} \\ S \longmapsto \mathrm{Hom}_S(X_S, Y_S) & \text{est un faisceau fpqc} \end{array}$$

Nous allons démontrer le 2ème énoncé dans la catégorie $\mathcal{S}ch/\operatorname{Spec}\mathbf{Z} = \mathcal{S}ch$ au §3. Il s'en déduira dans le cas général.

THÉORÈME 1.3. *Dans la catégorie des schémas $\mathcal{S}ch$, tout préfaisceau représentable est un faisceau* fpqc.

2. Problème analogue en algèbre commutative

Soit A un anneau, A' une A-algèbre fidèlement plate, $A'' = A' \otimes_A A'$.

$$A \xrightarrow{f} A' \underset{p_2}{\overset{p_1}{\rightrightarrows}} A'' \qquad p_1 \circ f = p_2 \circ f = h$$

2.1. Suite exactes.

THÉORÈME 2.1. *Soit N un A-module, $N' = f^*(N)$, $N'' = h^*(N) = p_1^*(N') = p_2^*(N')$ déduits de N par changement d'anneaux. Alors la suite de A-modules*

$$N \xrightarrow{1\otimes f} N' \rightrightarrows N'' \tag{2}$$

est exacte.

DÉMONSTRATION. — $N \to N'$ est injectif puisque A' est fidèlement plat sur A

— pour montrer que la suite (2) est exacte, il suffit de montrer que la suite obtenue en tensorisant à droite par A' est exacte.

Traçons le diagramme avec les spectres d'anneaux correspondants (par abus de notation p_1 et p_2 sont encore les flèches de spectres).

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[d, "f"'] & X'' \arrow[l, "p_1"'] \arrow[d, "p_2"] & X''' \arrow[l, shift right, "p_{12}"'] \arrow[l, shift left, "p_{13}"] \arrow[d, "p_{23}"] \\ X & X' \arrow[l, "f"] & X'' \arrow[l, shift right, "p_1"'] \arrow[l, shift left, "p_2"] \end{tikzcd}$$

La suite obtenue est donc la même, après remplacement de A par A' et de N par N'. Dans ce cas, l'homomorphisme $A' \to A''$ admet une section $m : A'' \to A'$. On peut donc se contenter de démontrer que la suite est exacte dans le cas où $f : A \to A'$ admet une section $\sigma : A' \to A$.

Soit $x' \in N \otimes_A A'$ tel que $p_1(x') = p_2(x')$. Si $x' = \sum x_i \otimes a'_i$ on a $\sum x_i \otimes a'_i \otimes 1 = \sum x_i \otimes 1 \otimes a'_i$. Appliquons leur la flèche

$$1 \otimes \sigma \otimes 1 : N \otimes_A A' \otimes_A A' \longrightarrow N \otimes_A A \otimes_A A' \xrightarrow{\sim} N \otimes_A A'$$

on obtient $x' = \sum x_i \otimes a'_i = 1 \otimes \sigma \otimes 1(\sum x_i \otimes 1 \otimes a'_i) = 1 \otimes \sigma \otimes 1(\sum x_i \otimes a'_i \otimes 1) = \sum \sigma(a'_i)x_i \otimes 1 = 1 \otimes f(\sum \sigma(a'_i)x_i)$, donc x' est dans l'image de N. $\square$

2.2. Descente de morphismes de A-modules. Soient M et N deux A-modules. Mêmes notations qu'au §2.1. Alors la suite de A-modules

$$\mathrm{Hom}_A(M,N) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}_A(M',N') \underset{p_2^*}{\overset{p_1^*}{\rightrightarrows}} \mathrm{Hom}_A(M'',N'')$$

est exacte.

Soit $u \in \mathrm{Hom}_A(M,N)$ tel que $f^*(u) = u' = 0$. Dans le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "i"] \arrow[d, "u"] & M' \arrow[d, "u'=0"] \\ N \arrow[r, "j"] & N' \end{tikzcd}$$

on sait que i, j sont injectives, donc $j \circ u = 0$ implique $u = 0$.

Soit maintenant $u' \in \mathrm{Hom}_A(M',N')$ tel que $p_1^*(u') = p_2^*(u') = u''$

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "i"] \arrow[d, dotted, "u"] & M' \arrow[r, shift left, "p_1"] \arrow[r, shift right, "p_2"'] \arrow[d, "u'"] & M'' \arrow[d, "u''"] \\ N \arrow[r, "j"] & N' \arrow[r, shift left, "p_1"] \arrow[r, shift right, "p_2"'] & N'' \end{tikzcd}$$

Chassons le diagramme il est clair que $u' \circ i$ se factorize à travers de N et il faut évidemment que $f^*(u) = u'$.

2.3. Généralisation aux schémas. Soient $\mathcal{F}_0, \mathcal{G}_0$ deux faisceaux quasi-cohérents de modules sur un schémas S_0. Alors le préfaisceau $S \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{F}_S, \mathcal{G}_S)$ de la catégorie $\mathcal{S}ch/S_0$ à valeurs dans $\mathcal{E}ns$, est un faisceau fpqc. D'abord on donne une caractérisation des faisceaux fpqc $\mathcal{S}ch^\circ \longrightarrow \mathcal{E}ns$.

LEMME 2.2. *Pour qu'un préfaisceau $\mathcal{P}$ soit un faisceau fpqc, il faut et il suffit que la suite*

$$\mathcal{P}(S) \longrightarrow \textstyle\prod_\alpha \mathcal{P}(S_\alpha) \rightrightarrows \prod_{\alpha,\beta} \mathcal{P}(S_\alpha \times_S S_\beta)$$

soit exacte dans les deux cas suivants :

(1) la famille $(S_\alpha \xrightarrow{f_\alpha} S)$ est une famille surjective d'immersions ouvertes.

(2) il y a une seule flèche $S' \to S$ fidèlement plate, S et S' sont affines.

DÉMONSTRATION. La topologie fpqc peut être définie de deux manières :

(1) la moins fine qui rende couvrantes les familles :
— $(S_\alpha \xrightarrow{f_\alpha} S)$ famille surjective d'immersions ouvertes
— $(S' \xrightarrow{g} S)$, S et S' affines, g fidèlement plate

(2) la moins fine qui rende couvrantes les familles :
— $(S_\alpha \xrightarrow{f_\alpha} S)$ famille surjective, où chaque f_α est plat et quasi-compact

(2) plus fine que (1) :

$(S' \xrightarrow{g} S)$ où S et S' sont affines, g fidèlement plat, est bien couvrante au sens de (2). D'autre part, en recouvrant tous les ouverts de chaque S_α par des ouverts affines, on pbtient une famille $(U_\lambda \to S)$ couvrante pour (2), et tel que le crible engendré soit inclus dans le crible engendré par les $(S_\alpha \xrightarrow{f_\alpha} S)$, donc ce dernier est couvrant.

(1) plus fine que (2) :

Soit $(S_\alpha \xrightarrow{f_\alpha} S)$ une famille surjective, où chaque f_α est plat et quasi-compact.

Recouvrons S par des ouverts affines U_i assez petits pour que chaque U_i soit contenu dans l'image d'un f_α (c'est possible parce que f_α est *ouvert*[1]), soit f_{α_i}

$$\begin{tikzcd} f_{\alpha_i}^{-1}(U_i) \arrow[r, "f_{\alpha_i}"] \arrow[d] & U_i \arrow[d] \\ S_{\alpha_i} \arrow[r, "f_{\alpha_i}"] & S \end{tikzcd}$$

$f_{\alpha_i}|f_{\alpha_i}^{-1}(U_i)$ est plate, quasi-compact et surjective, donc fidèdlement plate. La famille $(U_i \to S)$ est couvrante pour (1). Si on montre que la famille $(f_{\alpha_i}^{-1}(U_i) \longrightarrow U_i)$ est couvrante pour chaque i, alors la famille composée l'est aussi. Or elle appartient au crible engendré par $(S_\alpha \to S)$. Donc ce crible contiendra un crible couvrant donc sera couvrant.

Reste à montrer que $S' \xrightarrow{g} S$ est couvrante si S est affine, et g est fpqc. Donc $S' = \bigcup_{\text{finie}} S'_i$ où chaque S'_i est affine. Alors $S_1 = \coprod S'_i$ est affine et $S_1 \to S' \to S$ est fpqc, donc couvrant, donc le crible engendré par $(S' \to S)$ est couvrant.

La topologie la plus fine qui fasse de $\mathcal{P}$ un faisceau a pour cribles couvrant X les cribles R de X tels que $\mathcal{P}(X) \xrightarrow{\sim} \mathcal{P}(R)$ et ceci universellement. Soit $\mathcal{T}_\mathcal{P}$ cette topologie (voir l'exemple 1.12 au §1.2). Montrons donc que si les propriétés énoncées dans le lemme sont vérifiées, la topologie $\mathcal{T}_\mathcal{P}$ est plus fine que la topologie fpqc, c'est-à-dire que les familles qui engendrent la topologie fpqc sont couvrantes pour la topologie $\mathcal{T}_\mathcal{P}$.

Seul le « universellement » est à vérifier. Soit $(X_\alpha \xrightarrow{f_\alpha} X)$ un recouvrement ouvert de X. Soit R le crible engendré, $\mathcal{P}(R) \simeq \mathcal{P}(X)$. Soit $Y \to X$ quelconque et $(Y_\alpha \to Y)$ obtenue par changement de base. Alors $(Y_\alpha \to Y)$ est un recouvrement ouvert de Y, donc le crible engendré R' satisfait aussi à $\mathcal{P}(Y) \xrightarrow{\sim} \mathcal{P}(R')$.

Soit $X' \xrightarrow{f} X$ un morphisme fpqc de schémas affines, $Y \to X$ quelconque. Pour le crible R engendré par $(X' \to X)$ on a $\mathcal{P}(X) \xrightarrow{\sim} \mathcal{P}(R)$.

Recouvrons Y par des ouverts affines Y_i. Alors Y' est recouvert par les ouverts $Y'_i = Y' \times_Y Y'_i \simeq X' \times_X Y_i$ qui sont affines et $Y' \times_Y Y'$ est recouvert par les $Y'_i \times_{Y_i} Y'_i$, alors:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(Y) &= \varprojlim \mathcal{P}(Y_i) \\ \mathcal{P}(Y') &= \varprojlim \mathcal{P}(Y'_i) \\ \mathcal{P}(Y' \times_Y Y') &= \varprojlim \mathcal{P}(Y'_i \times_{Y_i} Y'_i) \end{aligned}$$

et

$$\mathcal{P}(Y_i) \longrightarrow \mathcal{P}(Y'_i) \rightrightarrows \mathcal{P}(Y'_i \times_{Y_i} Y'_i) \qquad \text{est exacte}$$

Donc :

$$\mathcal{P}(Y) \longrightarrow \mathcal{P}(Y') \rightrightarrows \mathcal{P}(Y' \times_Y Y') \qquad \text{est exacte}$$

Bien entendu si $\mathcal{P}$ est un faisceau, les deux familles décrites étant couvrantes pour la topologie fpqc, les suites correspondantes sont exactes, donc le lemme est démontré. □

Toutes ces propriétés restent vraies dans la catégorie $\mathcal{S}ch/S_0$.

1. ce n'est pas vrai en général: voir [12, vol. 24, §2.4.8]

2.4. Descente de morphismes de Modules quasi-cohérents sur un schéma. $S \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{F}_S, \mathcal{G}_S)$ est un faisceau fpqc.

Donc deux choses à vérifier :

(1) recollement sur un ouvert de S

$\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ étant des faisceaux au sens de la topologie de Zariski, les sections sur les ouverts se recollent, donc aussi les morphismes.

(2) $S' \to S$ morphisme fidèlement plat de schémas affines, $S' = \mathrm{Spec}\, A'$, $S = \mathrm{Spec}\, A$, $A \to A'$ fidèlement plat.

Alors il existe un A-module M tel que $\mathcal{F} = \widetilde{M}$ et un A-module N tel que $\mathcal{G} = \widetilde{N}$. La propriété est une conséquence de ce qu'on a vu pour les modules

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{F}_S, \mathcal{G}_S) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{S'}}(\mathcal{F}_{S'}, \mathcal{G}_{S'}) \rightrightarrows \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{S''}}(\mathcal{F}_{S''}, \mathcal{G}_{S''})$$

est exacte.

3. Les schémas sont des faisceaux fpqc

Nous allons démontrer les théorèmes du §1. On a vu qu'il suffit de démontrer que $S \mapsto \mathrm{Hom}(S, Y_0)$ est un faisceau fpqc. Grâce à la caractérisation du lemme 2.2 il suffit de montrer deux choses :

(1) pour un recouvrement ouvert (U_i) de S on a l'exactitude de

$$\mathrm{Hom}(S, Y_0) \longrightarrow \prod \mathrm{Hom}(U_i, Y_0) \rightrightarrows \prod \mathrm{Hom}(U_i \cap U_j, Y_0)$$

(2) pour $g : S' \to S$ fidèlement plat, S et S' affine, l'exactitude de

$$\mathrm{Hom}(S, Y_0) \longrightarrow \mathrm{Hom}(S', Y_0) \rightrightarrows \mathrm{Hom}(S'', Y_0)$$

Pour (1) c'est clair : les applications topologiques sous-jacentes se recollent bien sûr. Les flèches des faisceaux d'anneaux se recollent du fait que ce sont des faisceaux pour la topologie de Zariski.

Donc il nous reste de prouver le cas (2) : $S = \mathrm{Spec}\, A$, $S' = \mathrm{Spec}\, A'$, A' étant une A-algèbre fidèlement plate, et $S'' = \mathrm{Spec}\, A''$ avec $A'' = A' \otimes_A A'$.

Proposition 3.1. *$S'' \rightrightarrows S' \longrightarrow S$ est un diagramme exact d'*ensembles, *c'est-à-dire que S est le conoyau de la double flèche au sens ensembliste.*

Démonstration.

$$\begin{tikzcd} {|S''|} \arrow[r, shift left, "p_1"] \arrow[r, shift right, "p_2"'] \arrow[dr] & {|S'|} \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f'"] & {|S|} \arrow[dl, dashed, "f"] \\ & Z & \end{tikzcd}$$

g est fidèlement plat donc surjectif. Soit $s \in |S|$. Supposons que $s = g(s'_1) = g(s'_2)$, $s'_1, s'_2 \in |S'|$.

L'application $|S''| \to |S'| \times_{|S|} |S'|$ étant surjective, il existe $s'' \in |S''|$ tel que $p_1(s'') = s'_1$ et $p_2(s'') = s'_2$, alors $f'(s'_1) = f'(s'_2)$. Donc on définit bien une application f unique par $f(s) = f'(s'_1)$. ☐

Proposition 3.2. *$S' \xrightarrow{g} S$ fait de $|S|$ un espace topologique quotient de $|S'|$, c'est-à-dire que soit $Z \subset |S|$, alors*

$$Z \text{ fermée (resp. ouverte)} \iff Z' = g^{-1}(Z) \text{ fermée (resp. ouverte)}$$

Démonstration. g étant surjectif, il suffit de le démontrer pour la propriété « être fermé ». $Z' = g^{-1}(Z) \implies g(Z') = Z$

Soit Z' fermé dans $S' = \operatorname{Spec} A'$, I' un idéal le définissant, $I = I' \cap A$.

$$\begin{tikzcd}
A' \arrow[r] & A'/IA' \arrow[r, hook] \arrow[dr] & A'/I' \otimes_{A/I} A'/I' \\
A \arrow[u, "fp"] \arrow[r] & A/I \arrow[u, "fp"] \arrow[r, hook] & A'/I' \arrow[u, "fp"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
S' \arrow[d, "g"'] & Y_1 \arrow[l, "j'"'] \arrow[d, "g|Y_1"'] & Y_1' \arrow[l, "v"'] \arrow[d, "\pi"] \\
S & Y \arrow[l, "j"] & Y' \arrow[l, "u"] \arrow[ul, "j_1"']
\end{tikzcd}$$

$Z' = |Y'|$, $|Y_1| = g^{-1}(|Y|)$, $Z' \subset |Y_1|$.

$u(Z')$ est dense dans $|Y|$, fermé dans $|S|$, donc $ju(|Y'|) = g(Z') = Z$ a pour fermeture $|Y|$ dans S : $|Y| = \bar{Z}$.

$gv(|Y_1'|) = u\pi(|Y_1'|) \subset u(|Y'|) = Z \implies v(|Y_1'|) \subset g^{-1}(Z) = Z'$ fermé de $|S'|$.

v est dominant, donc $\overline{v(|Y_1'|)} = |Y_1|$, donc $|Y_1| \subset Z'$, donc $|Y_1| = Z'$, donc $g(Z') = Z = |Y| = \bar{Z}$, donc Z est fermé dans S. $\square$

Proposition 3.3 (descente de sections). *Soit $S' \xrightarrow{g} S$ un morphisme de schémas fpqc, $\mathcal{G}$ un faisceau de Modules quasi-cohérent sur S, soit $h : S'' \to S$. Alors la suite*

$$\mathcal{G} \longrightarrow g_*(\mathcal{G}') \rightrightarrows h_*(\mathcal{G}'')$$

est exacte.

Démonstration. Cela revient à montrer que pour tout ouvert U de S $\mathcal{G}(U) \longrightarrow \mathcal{G}'(g^{-1}(U)) \rightrightarrows \mathcal{G}''(h^{-1}(U))$ est exacte. Or, le morphisme obtenu par changement de base $U \to S$, $g^{-1}(U) \to U$, est encore fpqc. On peut donc supposer $U = S$.

Alors d'après le §2.4 la suite

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{O}_S, \mathcal{G}_S) \longrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_{S'}}(\mathcal{O}_{S'}, \mathcal{G}_{S'}) \rightrightarrows \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_{S''}}(\mathcal{O}_{S''}, \mathcal{G}_{S''})$$

est exacte, d'où le résultat cherché, grâce à l'isomorphisme fonctoriel en S

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{O}_S, \mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}(S)$$

$\square$

Proposition 3.4. *Pour tout espace annelé Z, la suite*

$$\operatorname{Hom}(S, Z) \longrightarrow \operatorname{Hom}(S', Z) \rightrightarrows \operatorname{Hom}(S'', Z)$$

est exacte.

Démonstration. Soit donné $f' : S' \to Z$ tel que $f' \circ p_1 = f' \circ p_2$.

$$\begin{tikzcd}
S'' \arrow[r, shift left, "p_1"] \arrow[r, shift right, "p_2"'] \arrow[dr] & S' \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f'"'] & S \arrow[dl, dashed, "f"] \\
& Z &
\end{tikzcd}$$

Par la proposition 3.1 on peut construire une application unique f, qui est continu par la proposition 3.2. D'après la proposition 3.3 la suite

$$\mathcal{O}_S \longrightarrow g_*(\mathcal{O}_{S'}) \rightrightarrows h_*(\mathcal{O}_{S''})$$

est exacte, on obtient encore une suite exacte en prenant son image par f_*

$$\begin{tikzcd} f_*(\mathcal{O}_S) \arrow[r] & f_*g_*(\mathcal{O}_{S'}) \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & f_*h_*(\mathcal{O}_{S''}) \\ & \mathcal{O}_Z \arrow[ul, dashed] \arrow[u, "f'"'] & \end{tikzcd}$$

Donc il existe un morphisme de faisceaux unique qui rend le diagramme commutatif.
□

Corollaire 3.5. *Cette suite reste exacte dans les catégories suivantes :*
— *espaces annelés en anneaux locaux*
— *schémas $\mathcal{S}ch$*
— *$\mathcal{S}ch/S_0$*

Démonstration. Le morphisme de schémas $\mathcal{O}_Z \to f_*(\mathcal{O}_S)$ obtenu induit un morphisme sur les fibres, qui est *local* : soit $s' \in S'$, $f'(s') = z$, $g(s') = s$, alors dans le diagramme des fibres

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_{S,s} \arrow[r, "g_{s'}"] & \mathcal{O}_{S',s'} \\ & \mathcal{O}_{Z,z} \arrow[ul, dashed, "f_s"] \arrow[u, "f'_{s'}"'] \end{tikzcd}$$

$f'_{s'}$ et $g_{s'}$ étant local, f_s doit être local.

Il faut vérifier que le morphisme construit $Z \xrightarrow{f} S$ est bien un morphisme sur S_0.

$$\begin{tikzcd} S' \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f'"'] & S \arrow[d, "\varphi"] \arrow[dl, dashed, "f"] \\ Z \arrow[r, "\psi"'] & S_0 \end{tikzcd}$$

On a $(\psi \circ f') \circ p_1 = (\psi \circ f') \circ p_2$, donc il existe une flèche unique $\chi : S \to S_0$ avec $\chi \circ g = \psi \circ f'$. Comme $\varphi \circ g = \psi \circ f'$, on a $\chi = \varphi$. Comme $(\psi \circ f) \circ g = \psi \circ f'$ on a $\varphi = \psi \circ f$. □

4. Descente de propriétés

4.1. Descente de sous-modules.

Proposition 4.1. *Soit $S' \to S$ fpqc, $\mathcal{F}$ un faisceau de Module quasi-cohérent sur S, $\mathcal{F}'$ et $\mathcal{F}''$ déduits par changement de base. Soit $H(\mathcal{F}) = \{\mathcal{G} \subset \mathcal{F} \mid$ sous-modules$\}$. Alors la suite*

$$H(\mathcal{F}) \longrightarrow H(\mathcal{F}') \rightrightarrows H(\mathcal{F}'')$$

est exacte.

Plus généralement : soit $\mathcal{F}_0$ un faisceau de Modules quasi-cohérents sur S_0, alors le préfaisceau $S \mapsto H(\mathcal{F}_S)$ est un faisceau fpqc de $\mathcal{S}ch/S_0$.

Démonstration. Le recollement sur un recouvrement ouvert provient du fait que c'est local au sens de Zariski.

Le cas affine :

$$A \xrightarrow{f} A' \overset{p_1}{\underset{p_2}{\rightrightarrows}} A'' \qquad p_1 \circ f = p_2 \circ f$$

$$M \longrightarrow M' \rightrightarrows M''$$

Soient N_1 et N_2 deux sous-modules de M tels que $f^*(N_1) = f^*(N_2)$. Alors $N_1 = N_2$. En effet $N_1 = N_1' \cap M$ et $N_2 = N_2' \cap M$.

Démontrons le résultat plus général suivant : soient N' un A'-module, N'' un A''-module, et deux flèches $N' \overset{\pi_1}{\underset{\pi_2}{\rightrightarrows}} N''$ telles que π_i soit p_i-linéaire et induise un isomorphisme $N'' \simeq p_i^*(N')$ de A''-modules. Alors si N est le noyau du couple (π_1, π_2), N est un A-module, et la flèche $N \longrightarrow N'$ induit un isomorphisme $f^*(N) \simeq N'$ de A'-modules.

Il suffit de démontrer que l'on obtient un isomorphisme après le changement de base $A \xrightarrow{f} A'$. Donc on peut supposer que f admet une section σ

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] & A' \arrow[r, shift left, "p_1"] \arrow[r, shift right, "p_2"'] \arrow[d, "\sigma"'] & A'' \arrow[d, "\sigma\otimes 1"] \\ & A \arrow[r, "f"'] & A' \end{tikzcd}$$

avec $(\sigma \otimes 1) \circ p_1 = f \circ \sigma$ et $(\sigma \otimes 1) \circ p_2 = 1_{A'}$, donc

$$(\sigma \otimes 1)^* p_1^*(N') = f^* \sigma^*(N')$$
$$(\sigma \otimes 1)^* p_2^*(N') = N'$$

donc $N' \simeq f^*\sigma^*(N')$. Or la suite $\sigma^*(N') \longrightarrow f^*\sigma^*(N') \overset{\pi_1}{\underset{\pi_2}{\rightrightarrows}} h^*\sigma^*(N')$ est exacte, donc $\sigma^*(N')$ est le noyau de (π_1, π_2), donc $\sigma^*(N') \simeq N$, donc $N' = f^*(N)$. □

COROLLAIRE 4.2. *Soit I' un idéal de A' tel que $p_1(I')A'' = p_2(I')A''$. Si $I = I' \cap A$, alors $I' = IA'$.*

PROPOSITION 4.3. *Soit $H(S) = \{T \subset S \mid$ sous-schémas fermés de $S\}$. La suite*

$$H(S) \longrightarrow H(S') \rightrightarrows H(S'')$$

est exacte.

4.2. Descente de propriétés de Modules. $g : S' \to S$ fpqc, $\mathcal{F}$ un faisceau quasi-cohérent sur S. On se propose de mettre en relation des propriétés de $\mathcal{F}$ et de $g^*(\mathcal{F})$.

REMARQUE. Si la propriété $\mathcal{P}$ considérée est locale (au sens de ZARISKI) et stable par changement de base, si on a montré dans le cas de deux schémas affines que

$$\mathcal{F}' \text{ vérifie } \mathcal{P} \implies \mathcal{F} \text{ vérifie } \mathcal{P}$$

Alors pour un morphisme quelconque

$$\mathcal{F}' \text{ vérifie } \mathcal{P} \iff \mathcal{F} \text{ vérifie } \mathcal{P}$$

En effet on peut supposer S affine puisque la propriété est locale. Alors $S' = \bigcup_{\text{finie}} S_i'$ où chaque S_i' est affine, donc $T = \coprod S_i'$ est affine et $T \to S$ est fidèlement plat. $T \to S' \to S$.

$$\mathcal{F}' \text{ vérifie } \mathcal{P} \implies \mathcal{F}'_T \text{ vérifie } \mathcal{P} \implies \mathcal{F} \text{ vérifie } \mathcal{P}$$

EXEMPLES. — de type fini
— de présentation finie
— localement libre de type fini
— exactitude des suites

On est ramené à un problème d'agèbre commutative : soit $A \to A'$ une A-algèbre fidèlement plate, M un A-module, $M' = M \otimes_A A'$. Alors si M' est de type fini (resp. de présentation finie, resp. localement libre de type fini) il en est de même de M.

(1) de type fini
$M = \varinjlim M_i$, M_i sous-module de type fini de M, $\implies$ $M' = \varinjlim M_i'$, $M_i' = M_i \otimes_A A'$ sous-module de type fini de M' $\implies$ pour i assez grand, $M' = M_i'$ $\implies$ $M = M_i$.

(2) de présentation finie
M est donc déjà de type fini, on a une suite exacte

$$0 \to R \longrightarrow L \longrightarrow M \to 0$$

avec L libre de type fini, $\implies$

$$0 \to R' \longrightarrow L' \longrightarrow M' \to 0$$

Si M' est de présentation finie, R' est de type fini, donc R aussi, donc M de pésentation finie.

(3) localement libre de type fini
c'est équivalent à « plat et de présentation finie ». Donc c'est une propriété qui se descend.

4.3. Descente de propriétés de morphismes de schémas. La remarque faite en §4.2 reste valable. La plupart des propriétés des morphismes sont conservées par descente :
— surjectif, injectif, radiciel : [12, vol. 24, 2.6.1]
— ouvert, fermé : [12, vol. 24, 2.6.2]
— universellement ouvert, universellement fermé, universellement bicontinu, homéomorphisme universel, quasi-compact, quasi-compact dominant : [12, vol. 24, 2.6.4]
— séparé, localement de type fini, localement de présentation finie, de type fini, propre, isomorphisme, immersion ouverte, immersion fermée, affine, fini, quasi-fini : [12, vol. 24, 2.7.1]
— plat, lisse, étale : [12, vol. 32, 17.7.3]

ATTENTION. Ne sont pas conservés : *projectif, quasi-projectif, immersion locale*, voir EGA [12, vol. 24, 2.7.3].

Quelques exemples de démonstrations

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f'"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Y' \arrow[r, "\beta"'] & Y \end{tikzcd} \qquad \beta \text{ fpqc}$$

— injectif : $f(x_1) = f(x_2) = y$, β surjectif $\implies$ $\exists\, y' \in Y'$ $\beta(y') = y$. Alors $x_1' = (y', x_1), x_2' = (y', x_2) \in X'$ sont tels que $f'(x_1') = f'(x_2') = y'$, donc $x_1' = x_2'$ et ensuite $x_1 = \alpha(x_1') = \alpha(x_2') = x_2$.
— surjectif : évident puisque β surjectif

— ouvert (resp. fermé) : $g : S' \to S$, $E \subset S$. Alors $g^{-1}(E)$ ouvert (resp. fermé) $\iff$ E ouvert (resp. fermé). « être ouvert » est une propriété locale. Dans le cas affine on a vu que si $S' - g^{-1}(E) = g^{-1}(S - E)$ est fermé, $S - E$ est fermé, donc E est ouvert.

— homéomorphisme : il suffit de vérifier que f est ouvert $U \subset X$ ouvert, donc $\beta^{-1}(U)$ ouvert de X', donc $f'(\alpha^{-1}(U))$ ouvert dans Y', or $f'(\alpha^{-1}(U)) = \beta^{-1}(f(U))$, donc $\beta^{-1}(f(U))$ est ouvert dans Y', donc $f(U)$ est ouvert dans Y.

5. Exemples

5.1. Extension de corps fini galoisienne. Soit $k \to k'$ galoisienne de groupe G, $n = |G| = [k' : k]$ son degré fini. L'application suivante est un isomorphisme d'anneaux :

$$\begin{aligned} k' \otimes_k k' &\longrightarrow k'^n \\ \lambda \otimes \lambda' &\longmapsto (g(\lambda)\lambda')_{g \in G} \end{aligned}$$

L'espace topologique $\operatorname{Spec} k' \otimes_k k'$ a donc n points isolés. Sur chacun d'eux, l'anneau est le corps k'. Les deux structures de k'-algèbres sont données par les 2 flèches :

$$\begin{aligned} k' \rightrightarrows k' \otimes_k k' &\xrightarrow{\sim} k'^n \\ x \longmapsto x \otimes 1 &\longmapsto (g(x))_{g \in G} \\ x \longmapsto 1 \otimes x &\longmapsto (x)_{g \in G} \end{aligned}$$

c'est-à-dire que sur chaque composante de k'^n on a les 2 flèches : $k' \overset{g}{\underset{1}{\rightrightarrows}} k'$.

Traduction du théorème dans ce cas particulier.

X étant une variété sur k, on lui associe une variété X' sur k', puis une variété X'' sur k''

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d] & X' \arrow[l] \arrow[d] & X'' \arrow[l, shift left] \arrow[l, shift right] \arrow[d] \\ \operatorname{Spec} k & \operatorname{Spec} k' \arrow[l] & \operatorname{Spec} k'' \arrow[l, shift left] \arrow[l, shift right] \end{tikzcd}$$

G opère à gauche sur k', donc à droite sur le foncteur représenté par $\operatorname{Spec} k'$.

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{S}ch}(Z, \operatorname{Spec} k') \simeq \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}nn}(k', \mathcal{O}_Z(Z))$$

G opère à droite par composition.

$X' = X \times_k k'$ (par abus de notations)

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{S}ch}(Z, X') = \operatorname{Hom}(Z, X) \times_{\operatorname{Hom}(Z,k)} \operatorname{Hom}(Z, k')$$

G opère à droite sur $\operatorname{Hom}(Z, k')$, donc opère à droite sur le foncteur représenté par X'.

Explicitons : à $g \in G$, on associe une flèche $\operatorname{Spec} k' \to \operatorname{Spec} k'$, donc une flèche $X \times_k k' \to X \times_k k'$, donc G opère à gauche sur $\operatorname{Hom}_X(X', Z)$.

Le théorème nous dit alors que la suite :

$$\operatorname{Hom}_X(X, Z) \longrightarrow \operatorname{Hom}_X(X', Z) \rightrightarrows \operatorname{Hom}_X(X'', Z)$$

est exacte. Explicitons ces deux flèches : X'' est la somme de n variétés, sur chaque point de k'^n, donc $\mathrm{Hom}_X(X'', Z) \simeq \mathrm{Hom}_X(X', Z) \times G$. Les deux flèches sont les suivantes :

$$\begin{aligned} u &\longmapsto (gu)_{g\in G} \\ u &\longmapsto (u)_{g\in G} \end{aligned}$$

Donc le théorème montre que $\mathrm{Hom}_X(X, Z)$ s'identifie au sous-ensemble de $\mathrm{Hom}_X(X', Z)$ des morphismes invariants par G.

Descente de sous-variétés

Soient $\mathbf{A}^n_k$ et $\mathbf{A}^n_{k'}$ les espaces affines de dimension n sur k et k'. Une sous-variété de $\mathbf{A}^n_{k'}$ définie par un idéal $\mathfrak{a}'$ de $k'[X_1, \ldots, X_n]$ peut être définie par des polynômes de $k[X_1, \ldots, X_n]$ si et seulement si, pour tout $g \in G$, $g(\mathfrak{a}') = \mathfrak{a}'$.

Exemple : $k = \mathbf{R}$, $k' = \mathbf{C}$
$\mathfrak{a}'$ peut être engendré par des polynômes à coefficients réels $\iff$ $\overline{\mathfrak{a}'} = \mathfrak{a}'$.

5.2. Cas d'une extension purement inséparable de degré fini. Soit $k \to k'$ purement inséparable de degré fini :

$$k \longrightarrow k' \overset{p_1}{\underset{p_2}{\rightrightarrows}} k'' = k' \otimes_k k'$$

Théorème 5.1. *Soit $\mathfrak{a}$ un idéal de $k'[X_1, \ldots, X_n] = k'[\underline{X}]$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) $\mathfrak{a}$ est engendré par $\mathfrak{a}_0 = \mathfrak{a} \cap k[\underline{X}]$

(2) $p_1(\mathfrak{a})$ et $p_2(\mathfrak{a})$ engendrent le même idéal de $k''[\underline{X}]$

(3) Pour tout opérateur différentiel de k' sur k et pour tout polynôme F de l'idéal $\mathfrak{a}$, le polynôme F^D (obtenu en appliquant D aux coefficients de F) appartient à $\mathfrak{a}$.

Démonstration. $\boxed{(1) \iff (2)}$: résulte de l'étude faite sur la descente fpqc.

$\boxed{(1) \implies (3)}$: Pour $F \in \mathfrak{a}_0 = \mathfrak{a} \cap k[\underline{X}]$, $F = \sum a_\nu \underline{X}^\nu$ avec $\mathfrak{a}_\nu \in k$ on a donc pour un $D \in \mathrm{Diff}_k(k')$ – D étant k-linéaire – $D(a_\nu) = \alpha a_\nu$, $\alpha \in k'$. Donc $F^D = \alpha F \in k'\mathfrak{a}_0$. Comme $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_0 k'[\underline{X}]$, on a par linéarité donc (3).

$\boxed{(3) \implies (2)}$: Soit $\mathfrak{a}_1 = p_1(\mathfrak{a})k''[\underline{X}]$, $\mathfrak{a}_2 = p_2(\mathfrak{a})k''[\underline{X}]$. k'' peut être considéré comme espace vectoriel sur k' grâce à p_1. Soit $(e_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ une base correspondant à cette structure, telle que le 1er élément de la base soit 1.

Soit $F \in k''[\underline{X}]$, $F = \sum F_\lambda e_\lambda$, $F_\lambda \in k'[\underline{X}]$.

Alors :

Lemme 5.2. $\boxed{F \in \mathfrak{a}_1 \iff \forall\lambda\ F_\lambda \in \mathfrak{a}}$

Démonstration. En effet si $F_0 \in \mathfrak{a}$, $p_1(F_0)$ a pour coordonnées sur la base : $(p_1(F_0), 0, \ldots, 0)$, donc $F \in \mathfrak{a}_1 \implies F = \sum_i p_1(F_i)G_i = \sum_i p_1(F_i) \cdot \sum_\lambda G^i_\lambda e_\lambda$ avec $F_i \in \mathfrak{a}$, donc $F_\lambda = \sum_i F_i G^i_\lambda \in \mathfrak{a}$. □

Lemme 5.3. *Soit A' une A-algèbre, $A'' = A' \otimes_A A'$,*

$$A \xrightarrow{f} A' \overset{p_1}{\underset{p_2}{\rightrightarrows}} A''$$

I le noyau de l'application $\mu : A'' \to A'$, $\mu(x \otimes y) = xy$.

Soit $\delta : A'' \to A'$ une application A'-linéaire (A'' étant muni de la structure de A'-module induite par p_1). Soit $n \in \mathbf{N}$.

Les assertions suivantes sont équivalentes :

(1) $\delta(I^{n+1}) = 0$

(2) $\delta \circ p_2$ *est un opérateur différentiel d'ordre* $\leq n$ *de* A'

Démonstration. Démontrons-le par récurrence sur n.

$n = 0 : \delta(I) = 0 \implies \delta$ se factorise : $\delta = \Delta \circ \mu$

$$\begin{tikzcd} A'' \arrow[r, "\delta"] \arrow[dr, "\mu"'] & A' \\ & A' \arrow[u, "\Delta"'] \end{tikzcd}$$

, et Δ étant une application A'-linéaire, est une homothétie. Mais $\delta \circ p_2 = \Delta \circ \mu \circ p_2 = \Delta$ est une homothétie de A', donc un opérateur différentiel d'ordre 0.

Réciproquement, si $\delta \circ p_2 = \Delta$

$$\delta(x \otimes y) = x\delta(1 \otimes y) = x\delta(p_2(y)) = x\Delta(y)$$

$\implies \delta(x \otimes 1 - 1 \otimes x) = 0, \implies \delta(I) = 0.$

n quelconque ≥ 1

$D = \delta \circ p_2$, δ est alors défini par $\delta(x \otimes y) = xD(y)$. Pour $x \in A'$ on pose $D'_x = xD - Dx$ et $\delta'_x(u \otimes v) = uD'_x(v)$.

Alors D est un opérateur différentiel d'ordre $\leq n \iff \forall\, x\ D'_x$ est un opérateur d'ordre $\leq n-1 \iff \delta'_x(I^n) = 0$ (d'après l'hypothèse de récurrence).

Explicitons :
$\delta'_x(u\otimes v) = uD'_x(v) = u(xD(v) - D(xv)) = \delta(ux\otimes v - u\otimes xv) = \delta((u\otimes v)(x\otimes 1 - 1\otimes x))$

Alors $\delta(I^{n+1}) = 0 \implies \delta'_x(I^n) = 0$, donc D est un opérateur différentiel d'ordre $\leq n$.

D'autre part, si pour tout x $\delta'_x(I^n) = 0$, alors la formule explicité montre que δ s'annule sur $I^{n+1} = I^n \cdot I$. □

Revenons à notre problème : k' étant purement inséparable sur k, de degré fini, k'' est donc noethérien et tous les éléments de la forme $x \otimes 1 - 1 \otimes x$ sont nilpotents. Donc l'idéal I qu'ils engendrent est nilpotent.

Donc l'application $\delta \longmapsto D = \delta \circ p_2$ définit une bijection entre l'ensemble des formes linéaires de k'' (muni de sa structure d'espace vectoriel sur k' induite par p_1) et l'ensemble des k-opérateurs différentiels de k'.

En particulier, soient $(\varphi_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ les formes coordonnées. Alors $\varphi_\lambda \circ p_2$ est un opérateur différentiel de k'. Soit alors $F \in \mathfrak{a}$, on a

$$p_2(F) = \sum_\nu p_2(a_\nu)\underline{X}^\nu = \sum_{\lambda,\nu} \varphi_\lambda \circ p_2(a_\nu) e_\lambda \underline{X}^\nu = \sum_\lambda F^{\varphi_\lambda \circ p_2} e_\lambda$$

Par hypothèse $F^{\varphi_\lambda \circ p_2} \in \mathfrak{a}$, donc toutes les coordonnées de $p_2(F)$ sont dans $\mathfrak{a}$ et par le lemme 5.2 on a donc $p_2(F) \in \mathfrak{a}_1$, c'est-à-dire $\mathfrak{a}_2 \subset \mathfrak{a}_1$. En échangeant les rôles de p_1 et p_2, on obtient donc l'égalité $\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a}_2$. □

Chapitre 6

Descente fpqc des schémas

1. Rappels

Les propriétés d'exactitude dans les ensembles faisant intervenir des limites inductives quelconques et des limites projectives finies restent vraies dans la catégorie des faisceaux d'ensembles sur un site donné.

Exemples. Les limites inductives sont universelles ; autrement dit elles se conservent par changement de base.

Un épimorphisme de faisceaux $p : \mathcal{F}' \to \mathcal{F}$ est le conoyau de la double flèche (p_1, p_2) où p_1 et p_2 sont les projections de $\mathcal{F}' \times_{\mathcal{F}} \mathcal{F}'$ sur $\mathcal{F}'$.

Dans une catégorie où les produits fibrés sont représentables, on considère un morphisme $p : S' \to S$, les projections de $S'' = S' \times_S S'$ sur S' et les projections de $S''' = S' \times_S S' \times_S S'$ sur S'' définies par :

$$
\begin{aligned}
&p_1(s_1, s_2) = s_1 && p_{12}(s_1, s_2, s_3) = (s_1, s_2)\\
&p_2(s_1, s_2) = s_2 && p_{13}(s_1, s_2, s_3) = (s_1, s_3)\\
& && p_{23}(s_1, s_2, s_3) = (s_2, s_3)
\end{aligned}
$$

les s_i sont des points de S' à valeurs dans un objet variable T de la catégorie. On a donc un diagramme $S \xleftarrow{p} S' \underset{p_2}{\overset{p_1}{\leftleftarrows}} S'' \overset{p_{12}}{\underset{p_{23}}{\overset{p_{13}}{\Lleftarrow}}} S'''$ avec les égalités évidentes

$$
\begin{aligned}
&q_1 = p_1 \circ p_{12} = p_1 \circ p_{13} && q = p \circ p_1 = p \circ p_2\\
&q_2 = p_1 \circ p_{23} = p_2 \circ p_{12} && r = p \circ q_1 = p \circ q_2 = p \circ q_3\\
&q_3 = p_2 \circ p_{23} = p_2 \circ p_{13} &&
\end{aligned}
$$

$q_1, q_2, q_3 : S''' \Rrightarrow S'$, $q : S'' \longrightarrow S$, et $r : S''' \longrightarrow S$

Lemme 1.1. *Soit donné un diagramme avec des carrés cartésiens comme suit :*

$$
\begin{tikzcd}
 & X' \arrow[d, "f'"'] & X'' \arrow[l, "\pi_2"'] \arrow[d, "f''"'] & X''' \arrow[l, "\pi_{23}"'] \arrow[d, "f'''"'] \\
S & S' \arrow[l, "p"] & S'' \arrow[l, "p_2"] & S''' \arrow[l, "p_{23}"]
\end{tikzcd}
$$

Alors les carrés suivants sont cartésiens de même

$$
\begin{tikzcd}
X' \arrow[d, "pf'"'] & X'' \arrow[l, "\pi_2"'] \arrow[d, "p_2 f''"] \\
S & S' \arrow[l, "p"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
X'' \arrow[d, "qf''"'] & X''' \arrow[l, "\pi_{23}"'] \arrow[d, "q_3 f'''"] \\
S & S' \arrow[l, "p"]
\end{tikzcd}
$$

Démonstration. La démonstration est immédiate et laissée au lecteur. □

2. Théorème de représentabilité

THÉORÈME 2.1. *Soit $\mathcal{F}$ un faisceau fpqc sur la catégorie des schémas sur S ; s'il existe une famille $(S_\alpha \longrightarrow S)$ couvrante pour fpqc, telle que pour tout α la restriction $\mathcal{F}_\alpha$ de $\mathcal{F}$ à $\mathcal{S}ch/S_\alpha$ soit représentable par un schéma X_α affine sur S_α, alors $\mathcal{F}$ est représentable par un schéma X affine sur S.*

REMARQUE. $\mathcal{F}_\alpha$ est, en tant que faisceau sur S, un produit fibré de $\mathcal{F}$ par S_α sur S.

Les schémas S' sur S tels que $\mathcal{F}\times_S S'$ soit représentables par un schéma X' affine sur S' forment un crible, car les morphismes affines sont conservés par changement de base.

L'hypothèse de 2.1 dit que ce crible est couvrant pour fpqc, la conclusion dit que ce crible est S.

Ceci se dit encore : la propriété pour un faisceau fpqc d'être *représentable par un schéma affine* sur la base est *locale pour fpqc*.

Il suffit de montrer le théorème dans deux cas :
— $(S_\alpha \to S)$ recouvrement par des immersion ouvertes (locale pour ZARISKI)
— $S' \to S$ provient d'un morphisme d'anneaux fidèlement plat
On commence par montrer le cas : La propriété pour un faisceau pour la topologie de ZARISKI d'être représentable par un schéma est *locale pour la topologie de* ZARISKI.

DÉMONSTRATION. Considérons le diagramme de faisceaux de ZARISKI sur $\mathcal{S}ch/S$

$$\begin{tikzcd}
 & X_\alpha \arrow[d, "\xi_\alpha"'] & X_\alpha^\beta \arrow[d, "\xi_\alpha^\beta"'] \\
\mathcal{F} \arrow[d] & \mathcal{F}_\alpha \arrow[l] \arrow[d] & \mathcal{F}_{\alpha\beta} \arrow[l] \arrow[d] \\
S & S_\alpha \arrow[l] & S_{\alpha\beta} \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

$\mathcal{F}_\alpha$ est la restriction de $\mathcal{F}$ à S_α. le faisceau $\mathcal{F}_\alpha$ est représenté par le schéma X_α et l'isomorphisme de faisceaux ξ_α.

Nous avons deux représentants de $\mathcal{F}_{\alpha\beta}$, ce sont les images réciproques sur $S_{\alpha\beta}$ de (X_α, ξ_α) et (X_β, ξ_β), notées $(X_\alpha^\beta, \xi_\alpha^\beta)$ et $(X_\beta^\alpha, \xi_\beta^\alpha)$. On en tire l'isomorphisme $u_{\alpha\beta} : X_\beta^\alpha \xrightarrow{\sim} X_\alpha^\beta$ défini par $\xi_\alpha^\beta u_{\alpha\beta} = \xi_\beta^\alpha$.

De même on a trois représentants de $\mathcal{F}_{\alpha\beta\gamma}$ avec les isomorphismes de restriction des $u_{\alpha\beta}$. En oubliant les indices du haut, on a l'égalité :

$$\xi_\alpha u_{\alpha\beta} u_{\beta\gamma} = \xi_\beta u_{\beta\gamma} = \xi_\gamma = \xi_\alpha u_{\alpha\gamma}$$

On en déduit l'égalité : $u_{\alpha\beta} u_{\beta\gamma} = u_{\alpha\gamma}$, car ξ_α est un isomorphisme.

Ceci permet de recoller les X_α en un schéma X et les ξ_α en un isomorphisme de faisceaux $\xi : X \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}$.

S est la limite inductive des S_α par les immersion $(S_\alpha \to S)$, donc $\mathcal{F}$ est la limite du système correspondant par les $(\mathcal{F}_\alpha \to \mathcal{F})$. de même X est limite inductive du système correspondant par les $(X_\alpha \to X)$. Les ξ_α étant des isomorphismes, il en va de même pour leur limite ξ. $\mathcal{F}$ est donc représenté par (X, ξ).

Si, de plus, les X_α sont affines sur les S_α, X est affine sur S. $\square$

Soit $p : S' \to S$ un morphisme de schémas. On forme les produits fibrés S'' et S''', les projections étant numérotées comme en §1. Soit $\mathcal{F}$ un faisceau sur S. On appelle $\mathcal{F}'$, $\mathcal{F}''$ et $\mathcal{F}'''$ les restrictions de $\mathcal{F}$ à S', S'' et S'''.

On prendra les morphismes déduits des diverses projections par changement de base. Ceci donne un diagramme de faisceaux sur S :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F} \arrow[d, "f"'] & \mathcal{F}' \arrow[l, "p'"'] \arrow[d, "f'"'] & \mathcal{F}'' \arrow[l, shift right, "p'_1"'] \arrow[l, shift left, "p'_2"] \arrow[d, "f''"'] & \mathcal{F}''' \arrow[l, shift left] \arrow[l] \arrow[l, shift right] \arrow[d, "f'''"'] \\
S & S' \arrow[l, "p"'] & S'' \arrow[l, shift right, "p_1"'] \arrow[l, shift left, "p_2"] & S''' \arrow[l, shift left] \arrow[l] \arrow[l, shift right]
\end{tikzcd}$$

Si p est fpqc, p est un épimorphisme de faisceaux. On en tire par §1 que p est un conoyau de (p_1, p_2) ; les changements de base vont donner aussi : p_1 conoyau de (p_{12}, p_{13}), p' conoyau de (p'_1, p'_2) etc.

Démonstration. *(le deuxième cas)* Ici S et S' sont des spectres d'anneaux A et A', p provient du morphisme d'anneaux fidèlement plat i. $\mathcal{F}'$ est représenté par le spectre de la A'-algèbre B'. S'', S''', $\mathcal{F}''$ et $\mathcal{F}'''$ se représentent aussi avec des spectres d'anneaux, on obtient un diagramme :

$$\begin{tikzcd}
 & B' \arrow[r, shift left, "\pi_1"] \arrow[r, shift right, "\pi_2"'] & B'' \arrow[r, shift left, "\pi_{12}"] \arrow[r] \arrow[r, shift right] & B''' \\
A \arrow[r, hook, "i"'] & A' \arrow[u, "\varphi'"] \arrow[r, shift left, "i_1"] \arrow[r, shift right, "i_2"'] & A'' \arrow[u, "\varphi''"] \arrow[r, shift left, "i_{12}"] \arrow[r] \arrow[r, shift right] & A''' \arrow[u, "\varphi'''"']
\end{tikzcd}$$

$A'' \simeq A' \otimes_A A'$; i_1 et i_2 sont les flèches $i_1(a') = a' \otimes 1$ et $i_2(a') = 1 \otimes a'$, etc. Les carrés sont cocartésiens et i est un noyau de (i_1, i_2) etc.

Soit $\pi : B \to B'$ le noyau de (π_1, π_2). Ceci détermine $\varphi : A \to B$ tel que $\pi \circ \varphi = \varphi' \circ i$

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, hook, "\pi"] & B' \\
A \arrow[u, "\varphi"] \arrow[r, hook, "i"] & A' \arrow[u, "\varphi'"']
\end{tikzcd} \tag{3}$$

et $\mu : B \otimes_A A' \to B'$ par $\mu(b \otimes a') = \pi(b)\varphi'(a')$ On a alors un diagramme :

$$\begin{tikzcd}
B \otimes_A A' \arrow[r, "\pi\otimes 1"] \arrow[d, "\mu"'] & B' \otimes_A A' \arrow[r, shift left, "\pi_1\otimes 1"] \arrow[r, shift right, "\pi_2\otimes 1"'] \arrow[d, "\mu'"'] & B'' \otimes_A A' \arrow[d, "\mu''"] \\
B' \arrow[r, "\pi_1"'] & B'' \arrow[r, shift left, "\pi_{12}"] \arrow[r, shift right, "\pi_{13}"'] & B'''
\end{tikzcd}$$

où $\mu'(b' \otimes a') = \pi_2(b').\varphi''(a' \otimes 1)$ et $\mu''(b'' \otimes a') = \pi_{23}(b'').\varphi'''(a' \otimes 1 \otimes 1)$.

Les lignes du haut et du bas sont exactes : celle du bas naturellement et celle du haut parce que A' est plat sur A.

μ' et μ'' sont des isomorphismes (cf. §1 avec la situation duale). On vérifie aisément la commutativité du diagramme :

$$\mu' \circ (\pi \otimes 1) = \pi_1 \circ \mu$$
$$\mu'' \circ (\pi_1 \otimes 1) = \pi_{12} \circ \mu'$$
$$\mu'' \circ (\pi_2 \otimes 1) = \pi_{13} \circ \mu'$$

Ceci prouve que μ est un isomorphisme. Le carré (3) est donc cocartésien. π est donc fidèlement plat. Le morphisme qui en résulte est un épimorphisme, donc un conoyau de la paire de projection : $\operatorname{Spec} B' \otimes_B B' \rightrightarrows \operatorname{Spec} B'$.

Par changement de base dans les anneaux on voit que π_1 et π_2 font de B'' une somme amalgamée de B' et B' sur B et B'' s'identifie naturellement à $B' \otimes_B B'$, ce qui montre en repassant aux faisceaux sur S que $\mathcal{F}$ et $\operatorname{Spec} B$ sont isomorphes. $\square$

3. Données de recollement et de descente

Dans tout ce paragraphe, on considère un morphisme de schémas $p : S' \to S$ et le diagramme défini en §1.

On veut exprimer la catégorie des schémas sur S en termes de schémas sur S' munis d'une donnée supplémentaire.

Pour un schéma X au-dessus de S on a un diagramme

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "f"'] & X' \arrow[l, "\pi"'] \arrow[d, "f'"'] & X'' \arrow[l, shift right, "\pi_1"'] \arrow[l, shift left, "\pi_2"] \arrow[d, "f''"'] & X''' \arrow[l, shift left=2] \arrow[l] \arrow[l, shift right=2] \arrow[d, "f'''"'] \\ S & S' \arrow[l, "p"'] & S'' \arrow[l, shift right, "p_1"'] \arrow[l, shift left, "p_2"] & S''' \arrow[l, shift left=2] \arrow[l] \arrow[l, shift right=2] \end{tikzcd} \tag{4}$$

Mais quand on dispose seulement d'un schéma sur S' on obtient deux produit fibrés sur S'' et trois sur S''' : $X''_1 = p_1^*(X')$, $X''_2 = p_2^*(X')$, $X'''_1 = q_1^*(X')$, … etc. On a des diagrammes ($i = 1, 2,\ k = 1, 2, 3$)

$$\begin{tikzcd} & X' \arrow[d, "f'"'] & X''_i \arrow[l, "\pi_i"'] \arrow[d, "f''_i"] \\ S & S' \arrow[l, "p"'] & S'' \arrow[l, "p_i"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & X' \arrow[d, "f'"'] & X'''_k \arrow[l, "\rho_k"'] \arrow[d, "f'''_k"] \\ S & S' \arrow[l, "p"'] & S''' \arrow[l, "q_k"'] \end{tikzcd}$$

Définition 3.1. *Soit $f : X' \to S'$ un S'-schéma et soient*

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[d, "f'"'] & X''_i \arrow[l, "\pi_i"'] \arrow[d, "f''_i"] \\ S' & S'' \arrow[l, "p_i"'] \end{tikzcd}$$

deux carrés cartésiens ($i = 1, 2$). On appelle donnée de recollement sur X' relative *à p un S''-isomorphisme $u : X''_2 \xrightarrow{\sim} X''_1$. En plus, on l'appelle* donnée de descente, *si pour les images inverses sur S''' : $u_{12} = p_{12}^*(u)$, $u_{13} = p_{13}^*(u)$ et $u_{23} = p_{23}^*(u)$ on a $u_{13} = u_{12} \cdot u_{23}$*

$$\begin{tikzcd} X'''_1 \arrow[dr, "f'''_1"'] & X'''_2 \arrow[l, "u_{12}"'] \arrow[d, "f'''_2"] & X'''_3 \arrow[l, "u_{23}"'] \arrow[ll, bend right, "u_{13}"'] \arrow[dl, "f'''_3"] \\ & S''' & \end{tikzcd}$$

Dans la situation du carré cartésien (4) on a une donnée de descente naturelle. C'est une donnée effective.

Définition 3.2. *Soient* (X', u) *et* (Y', v) *deux* S'*-schémas munis de donnée de recollement relatives à* p*. On dit que le* S'*-morphisme* $h : X' \to Y'$ *est compatible avec les données de recollement* u *et* v *si l'on a :* $vh_2 = h_1 u$

$$\begin{tikzcd} X_2'' \arrow[r, "h_2"] \arrow[d, "u"'] & Y_2'' \arrow[d, "v"] \\ X_1'' \arrow[r, "h_1"] & Y_1'' \end{tikzcd}$$

Les S'-schémas munis d'une donnée de recollement relative à p forment une catégorie notée $\mathcal{R}ec(S'/S)$ dont les morphismes sont ceux que l'on vient de définir. De plus si X' et Y' proviennent de S-schémas X et Y, alors l'image inverse par p d'un S-morphisme $g : X \to Y$ est compatible avec les données de recollement naturelles sur X' et Y'. Ceci définit un foncteur

$$\begin{aligned} \Delta : \mathcal{S}ch/S &\longrightarrow \mathcal{R}ec(S'/S) \\ X/S &\longmapsto (X \times_S S', u) \end{aligned}$$

Théorème 3.3. *Si* p *est fpqc, le foncteur* Δ *est pleinement fidèle.*

Démonstration. Ceci traduit le fait que le diagramme suivant est exact :

$$\mathrm{Hom}_S(X, Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{S'}(X', Y') \rightrightarrows \mathrm{Hom}_{S''}(X'', Y'')$$

ou que le préfaisceau $\mathcal{H}om_S(X, Y)$ est un faisceau fpqc (théorème 1.1). □

Théorème 3.4. *Si* p *est fpqc et si* X' *est* affine *sur* S'*, toute donnée de descente sur* X' *relative à* p *est effective.*

Lemme 3.5. *Avec les notations ci-dessus, si* u *est une donnée de descente, il existe des morphismes* $\pi'_{12}, \pi'_{13}, \pi'_{23} :\ X_3''' \substack{\longrightarrow\\\longrightarrow\\\longrightarrow} X_2''$ *tels que les carrés*

$$\begin{tikzcd} X_2'' \arrow[d, "f_2''"'] & X_3''' \arrow[l, "\pi'_{kl}"'] \arrow[d, "f_3'''"] \\ S'' & S''' \arrow[l, "p_{kl}"'] \end{tikzcd}$$

soient cartésiens.

Si on pose $\pi'_1 = \pi_1 \circ u, \pi'_2 = \pi_2, \rho'_1 = \rho_1 \circ u_{13}, \rho'_2 = \rho_2 \circ u_{23}, \rho'_3 = \rho_3$ *on ait :*

$$\begin{aligned} \rho'_1 &= \pi'_1 \circ \pi'_{12} = \pi'_1 \circ \pi'_{13} \\ \rho'_2 &= \pi'_1 \circ \pi'_{23} = \pi'_2 \circ \pi'_{12} \\ \rho'_3 &= \pi'_2 \circ \pi'_{23} = \pi'_2 \circ \pi'_{13} \end{aligned}$$

Démonstration. Prenons $\pi'_{23} = (\rho_3, p_{23} f_3''')$. On a déjà $\pi'_2 \pi'_{23} = \pi_2 \pi'_{23} = \rho_3 = \rho'_3$. Si on définit $\pi^*_{23} : X_2''' \to X_1''$ par $\pi^*_{23} = (\rho_2, p_{23} f_2''')$ on a

$$u\pi'_{23} = \pi^*_{23} u_{23}$$

donc $\pi'_1 \pi'_{23} = \pi_1 u \pi'_{23} = \pi_1 \pi^*_{23} u_{12} = \rho_2 u_{23} = \rho'_2$.

Prenons $\pi'_{13} = (\rho_3, \pi_{13} f_3''')$. On a déjà $\pi'_2 \pi'_{13} = \pi_2 \pi'_{13} = \rho_3 = \rho'_3$. Si on définit $\pi^*_{13} : X_1''' \to X_1''$ par $\pi^*_{13} = (\rho_1, p_{13} f_1''')$ on a

$$u\pi'_{13} = \pi^*_{13} u_{13}$$

donc $\pi'_1 \pi'_{13} = \pi_1 u \pi'_{13} = \pi_1 \pi^*_{13} u_{13} = \rho_1 u_{13} = \rho'_1$.

Prenons $\pi'_{12} = (\rho_2, \pi_{12} f_2''')u_{23}$. On a déjà $\pi'_2\pi'_{12} = \pi_2\pi'_{12} = \rho_2 u_{23} = \rho'_2$. Si on définit $\pi^*_{12} : X_1''' \to X_1''$ par $\pi^*_{12} = (\rho_1, p_{12} f_1''')$ on a

$$u\pi'_{12} = \pi^*_{12} u_{12} u_{23}$$

donc $\pi'_1\pi'_{12} = \pi_1 u \pi'_{12} = \pi_1 \pi^*_{12} u_{23} = \rho_1 u_{13} = \rho'_1$. □

Démonstration. *(du théorème 3.4)*

On considère le conoyau $\pi : X' \to \mathcal{F}$ du couple (π'_1, π'_2) dans la catégorie des faisceaux fpqc. Il existe un unique morphisme $f : \mathcal{F} \to S$, tel que le carré suivant commute

$$(*) \qquad \begin{tikzcd} \mathcal{F} \arrow[d, "f"'] & X' \arrow[l, "\pi"'] \arrow[d, "f'"] \\ S & S' \arrow[l, "p"'] \end{tikzcd}$$

Montrons que si u est une donnée de descente relative à p fpqc, ce carrée est cartésien. On appelle m le morphisme $(\pi, f') : X' \to \mathcal{F} \times_S S'$. Le diagramme déduit de

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F} & X' \arrow[l, "\pi"'] & X'_2 \arrow[l, shift right, "\pi'_1"'] \arrow[l, shift left, "\pi'_2"] \end{tikzcd}$$

par le changement de base p est isomorphe à

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F} \times_S S' & X''_2 \arrow[l, "m\pi'_2"'] & X'''_3 \arrow[l, shift right, "\pi'_{12}"'] \arrow[l, shift left, "\pi'_{13}"] \end{tikzcd}$$

comme on peut voir à l'aide du lemme 1.1 et du lemme précédent 3.5. Donc $m \circ \pi'_2$ est un conoyau de (π'_{12}, π'_{13}).

D'autre part le changement de base f' appliqué au diagramme

$$\begin{tikzcd} S' & S'' \arrow[l, "p_2"'] & S''' \arrow[l, shift right, "p_{12}"'] \arrow[l, shift left, "p_{13}"] \end{tikzcd}$$

donne

$$\begin{tikzcd} X' & X''_2 \arrow[l, "\pi'_2"'] & X'''_3 \arrow[l, shift right, "\pi'_{12}"'] \arrow[l, shift left, "\pi'_{13}"] \end{tikzcd}$$

Donc π'_2 est conoyau de (π'_{12}, π'_{13}) et m est un isomorphisme.

Si X' est affine sur S' et le carré $(*)$ cartésien, alors $\mathcal{F}$ est représentable d'après le théorème 2.1. On voit alors que u est la donnée de descente naturelle, donc effective. □

4. Descente des Modules quasi-cohérents

On déduit généralement les résultats du §3 du présent §4. Nous procédons en sens inverse pour illustrer la souplesse et la commodité du langage de faisceaux utilisé au §2.

Le lecteur qui désire une démonstration directe du §4 pourra se reporter à la littérature : Grothendieck SGA1 [10, exposé VIII], « descente fidèlement plate ».

4.1. Donnée de recollement. Soit $p : S' \longrightarrow S$ un morphisme de schémas. On cherche à reconnaître parmi les $\mathcal{O}_{S'}$-Modules quasi-cohérents ceux qui sont isomorphe à l'image réciproque d'un $\mathcal{O}_S$-Module quasi-cohérent.

Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{O}_S$-Module quasi-cohérent, $p^*(\mathcal{M})$ son image réciproque par p. L'égalité: $q = pp_1 = pp_2$ fournit deux isomorphismes naturels de $\mathcal{O}_{S''}$-Modules

$$p_2^*p^*\mathcal{M} \xleftarrow{\sim} q^*\mathcal{M} \xrightarrow{\sim} p_1^*p^*\mathcal{M}$$

Ceci détermine un isomorphisme de $\mathcal{O}_{S''}$-Modules $m : p_2^*p^*\mathcal{M} \xrightarrow{\sim} p_1^*p^*\mathcal{M}$.

Soit un isomorphisme de $\mathcal{O}_{S'}$-Modules $g : p^*\mathcal{M} \xrightarrow{\sim} \mathcal{N}$. On obtient alors un isomorphisme de $\mathcal{O}_{S''}$-Modules $u : p_2^*\mathcal{N} \xrightarrow{\sim} p_1^*\mathcal{N}$ tel que

$$\begin{tikzcd}
p_2^*p^*\mathcal{M} \arrow[r, "p_2^*g"] \arrow[d, "m"', "\wr"] & p_2^*\mathcal{N} \arrow[d, "u"', "\wr"] \\
p_1^*p^*\mathcal{M} \arrow[r, "p_1^*g"'] & p_1^*\mathcal{N}
\end{tikzcd}$$

soit un diagramme commutatif.

Définition 4.1. *Une donnée de recollement du $\mathcal{O}_{S'}$-Module $\mathcal{H}$ relative à p est un isomorphisme de $\mathcal{O}_{S''}$-Modules $v : p_2^*\mathcal{H} \to p_1^*\mathcal{H}$.*

Avec les notations ci-dessus, m est la donnée de recollement naturelle *du Module $p^*\mathcal{M}$, u est la donnée de recollement sur $\mathcal{N}$ induite par g.*

Une donnée de recollement v sur $\mathcal{H}$ est dite effective *s'il existe un $\mathcal{O}_S$-Module $\mathcal{K}$ et un isomorphisme $h : p^*\mathcal{K} \to \mathcal{H}$ tels que v soit la donnée de recollement sur $\mathcal{H}$ induite par h.*

4.2. Donnée de descente. Avec les notations ci-dessus, considérons le diagramme:

$$\begin{tikzcd}
q_2^*p^*\mathcal{M} \arrow[rr, "m_{12}"] \arrow[ddd, "\wr"] & & q_1^*p^*\mathcal{M} \arrow[ddd, "\wr"] \\
& r^*\mathcal{M} \arrow[ul, "\sim"] \arrow[ur, "\sim"'] \arrow[d, "\wr"'] & \\
& p_{12}^*q^*\mathcal{M} \arrow[dl, "\sim"'] \arrow[dr, "\sim"] & \\
p_{12}^*p_2^*p^*\mathcal{M} \arrow[rr, "\sim", "p_{12}^*m"'] & & p_{12}^*p_1^*p^*\mathcal{M}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
q_2^*\mathcal{N} \arrow[r, "u_{12}"] \arrow[d, "\wr"] & q_1^*\mathcal{N} \arrow[d, "\wr"] \\
p_{12}^*p_2^*\mathcal{N} \arrow[r, "\sim", "p_{12}^*u"'] & p_{12}^*p_1^*\mathcal{N}
\end{tikzcd}$$

Le triangle intérieur est commutatif par le choix de m. Les trapèzes lateraux sont commutatifs. On choisit m_{12} de façon que le grand carré commute, aussi le triangle supérieur est-il commutatif ?

On obtient de même les triangles commutatifs relatifs à p_{13}^* et p_{23}^*.

Dans le diagramme suivant, les petit triangles sont commutatifs, et les flèches qui interviennent sont des isomorphismes ; il s'ensuit que le grand

$$\begin{tikzcd}
q_2^*p^*\mathcal{M} \arrow[rr, "m_{12}"] & & q_1^*p^*\mathcal{M} \\
& r^*\mathcal{M} \arrow[ul, "\sim"'] \arrow[ur, "\sim"] \arrow[d, "\wr"'] & \\
& q_3^*p^*\mathcal{M} \arrow[uul, "m_{23}"] \arrow[uur, "m_{13}"'] &
\end{tikzcd}$$

triangle est commutatif. Cette commutativité « se transporte »par l'isomorphisme g, ce qui donne une condition nécessaire d'effectivité:

$$u_{12}u_{23} = u_{13}$$

Définition 4.2. *Une donnée de recollement est appelée* donnée de descente *si elle vérifie la relation ci-dessus.*

On vient de montrer que toute donnée de recollement effective est une donnée de descente.

4.3. Rappel: Algèbre symétrique et fibré vectoriel. Voir les exemples 3.1 et 3.2 au chapitre 1.

Si $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{O}_S$-Module quasi-cohérent, on sait lui associer une algèbre sur $\mathcal{O}_S$ quasi cohérente et graduée $\mathcal{O}_S[\mathcal{M}] = \oplus_n(\mathcal{O}_S[\mathcal{M}])_n$, et un isomorphisme de $\mathcal{O}_S$-Modules $\mu(\mathcal{M}) : \mathcal{M} \to (\mathcal{O}_S[\mathcal{M}])_1$ qui a les propriétés universelles:

Si $\mathcal{A}$ est une $\mathcal{O}_S$-Algèbre graduée et μ' un morphisme de $\mathcal{O}_S$-Modules de $\mathcal{M}$ vers $\mathcal{A}_1$ qui est le module des termes homogènes de degré 1 de $\mathcal{A}$, alors il existe une factorisation unique par un morphisme de $\mathcal{O}_S$-Algèbres graduées $a : \mathcal{O}_S[\mathcal{M}] \to \mathcal{A}$ avec $\mu' = a\mu(\mathcal{M})$.

Si $\mathcal{A}$ est une $\mathcal{O}_S$-Algèbre et μ' un morphisme de $\mathcal{O}_S$-Modules de $\mathcal{M}$ vers $\mathcal{A}$, alors il existe une factorisation unique par un morphisme de $\mathcal{O}_S$-Algèbres $a : \mathcal{O}_S[\mathcal{M}] \to \mathcal{A}$ avec $\mu' = a\mu(\mathcal{M})$.

Soit $f : \mathbf{V}(\mathcal{M}) \to S$ le spectre de la $\mathcal{O}_S$-Algèbre $\mathcal{O}_S[\mathcal{M}]$ (son existence est une conséquence du théorème 2.1 énoncé pour la topologie de Zariski seulement). Le spectre affine $\mathbf{V}(\mathcal{M})$ s'appelle le *fibré vectoriel* du $\mathcal{O}_S$-Module $\mathcal{M}$.

Un morphisme de $\mathcal{O}_S$-Modules $u : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ donne un morphisme d'Algèbres graduées $\hat{u} : \mathcal{O}_S[\mathcal{M}] \to \mathcal{O}_S[\mathcal{N}]$, défini par $\mu(\mathcal{N})u = \hat{u}\mu(\mathcal{M})$, donc un morphisme de S-schémas $\mathbf{V}(u) : \mathbf{V}(\mathcal{N}) \to \mathbf{V}(\mathcal{M})$. On vérifie facilement que $\mathbf{V}$ est un focnteur.

Le morphisme d'adjonction $\mathcal{M} \to p_*p^*\mathcal{M}$ donne un morphisme $\bar{p}$ de schémas du fibré vectoriel de $p^*\mathcal{M}$ sur S' dans le fibré vectoriel de $\mathcal{M}$ sur S. On a alors un carré cartésien

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{V}(\mathcal{M}) \arrow[d, "f"'] & \mathbf{V}(p^*\mathcal{M}) \arrow[l, "\bar{p}"'] \arrow[d, "f'"] \\
S & S' \arrow[l, "p"]
\end{tikzcd}$$

4.4. Effectivité des données de descente fpqc des Modules quasi-cohérents.

THÉORÈME 4.3. *Soit un morphisme de schémas $p : S' \to S$. Si p est* fpqc, *toute donnée de descente sur un $\mathcal{O}_{S'}$-Module relative à p est* effective.

DÉMONSTRATION. Soit $\mathcal{N}$ un $\mathcal{O}_{S'}$-Module muni de la donnée de descente u. Notons Y', Y_i'', Y_i''' les schémas $\mathbf{V}(\mathcal{N}), \mathbf{V}(p_i^*\mathcal{N}), \mathbf{V}(q_i^*\mathcal{N})$ et f', f_i'', f_i''' leurs projections sur S', S'', S''' respectivement.

On désigne par p_{ij}'' le morphisme de schémas $Y_j''' \to Y_2''$ déduit de $\bar{p}_{ij}$ par l'isomorphisme naturel $q_j^*\mathcal{N} \xrightarrow{\sim} p_{ij}^*p_2^*\mathcal{N}$.

De même on désigne par p_{ij}' le morphisme de schémas $Y_i''' \to Y_1''$ déduit de $\bar{p}_{ij}$ par l'isomorphisme naturel $q_i^*\mathcal{N} \xrightarrow{\sim} p_{ij}^*p_1^*\mathcal{N}$.

On note $U = \mathbf{V}(u)^{-1}$ et $U_{ij} = \mathbf{V}(u_{ij})^{-1}$.

Après les quelques vérifications qui s'imposent, à savoir:
— $\bar{p}_2 p_{ij}'' = \bar{q}_j$
— $\bar{p}_1 p_{ij}' = \bar{q}_i$
— $U p_{ij}'' = p_{ij}' U_{ij}$
— compatibilité avec les projections sur le diagramme des S', S'' et S'''
on obtient une donnée de descente sur le schéma Y' affine sur S'.

Si p est fpqc, on obtient une donnée effective, donc un schéma Y sur S s'insérant dans le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[d, "f"'] & Y' \arrow[l, "\widetilde{p}"'] \arrow[d, "f'"'] & Y_1'' \arrow[l, "\bar{p}_1"'] \\
S & S' \arrow[l, "p"'] & Y_2'' \arrow[ul, "\bar{p}_2"']
\end{tikzcd}$$

Le carré est cartésien et $\widetilde{p}$ est le conoyau du couple $(\bar{p}_1 U, \bar{p}_2)$ et du couple $(\bar{p}_1, \bar{p}_2\mathbf{V}(u))$ et le morphisme f est affine.

Par adjonction, la $\mathcal{O}_S$-Algèbre quasi cohérente $f_*\mathcal{O}_Y$ apparaît comme le noyau da le double flèche $p_*f_*'\mathcal{O}_{Y'} \rightrightarrows q_*f_{2*}''\mathcal{O}_{Y''}$ déduite de $(\bar{p}_2, \bar{p}_1 U)$.

On obtient une graduation sur $f_*\mathcal{O}_Y$ par intersection avec une celle de $p_*f_*'\mathcal{O}_{Y'}$. Ceci fournit un $\mathcal{O}_S$-Module quasi-cohérent $\mathcal{M} = (f_*\mathcal{O}_Y)_1$, qui est une limite projective du système

$$\begin{tikzcd}
 & p_*p_{1*}p_1^*\mathcal{N} \\
p_*\mathcal{N} = (p_*f_*'\mathcal{O}_{Y'})_1 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & p_*p_{2*}p_2^*\mathcal{N} \arrow[uu, "q_*u"']
\end{tikzcd}$$

Nous avons de la sorte obtenu un $\mathcal{O}_S$-Module $\mathcal{M}$ avec un morphisme de $\mathcal{O}_{S'}$-Modules $\mathcal{M} \to p_*f_*'\mathcal{O}_{Y'} = p_*\mathcal{N}$; ce qui procure par adjonction un morphisme de $\mathcal{O}_{S'}$-Modules $t : p^*\mathcal{M} \to \mathcal{N}$. On a évidemment compatibilité entre la donnée de recollement naturelle sur $p^*\mathcal{M}$ et la donnée u. Reste à voir que t est un isomorphisme.

Pour cela, on sait que le carré est cartésien. Ce qui donne $p_*f_*'\mathcal{O}_{Y'}$ comme produit cartésien de $f_*\mathcal{O}_Y$ par $p_*\mathcal{O}_{S'}$ sur $\mathcal{O}_S$. En repassant aux composantes de degré 1, on voit apparaître $\mathcal{N}$ comme isomorphe à $\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_{S'}$, donc $\mathcal{N}$ isomorphe par t à $p^*\mathcal{M}$. $\square$

5. Exemples

(1) Soient k un corps et E un espace vectoriel de doimension finie. On a un k-morphisme de schémas $p : S' \to S$ où $S' = \mathbf{V}(E) - \{0\}$ et $S = \mathbf{P}(E)$. Avec une base $x_0, x_1, \ldots, x_n$ de E on peut décrire p localement (au-dessus de $x_i \neq 0$) à l'aide du morphisme d'algèbre

$$k[\tfrac{x_1}{x_i}, \ldots, \tfrac{x_n}{x_i}] \hookrightarrow k[x_1, \ldots, x_n, \tfrac{1}{x_i}]$$

Ce morphisme est affine, donc quasi-compact, et libre, donc fidèlement plat.

Sur les fibres de p, le groupe multiplicatif $\boldsymbol{\mu}_k = \operatorname{Spec} k[\mathbf{Z}]$ opère par homothéthies et le morphisme

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mu}_k \times S' &\longrightarrow S' \times_S S' \\ (\sigma, s') &\longmapsto (\sigma s', s') \end{aligned}$$

est un isomorphisme, ce qui fait apparaître $\boldsymbol{\mu}_k \times S'$ comme le produit fibré $S' \times_S S'$. On peut alors identifier le produit fibré triple de S' sur S, qui est

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mu}_k \times \boldsymbol{\mu}_k \times S' &\xrightarrow{\sim} S''' \\ (\sigma, \tau, s') &\longmapsto (\sigma\tau s', \tau s', s') \end{aligned}$$

avec les projections canoniques

$$\begin{aligned} p_{12}(\sigma, \tau, s') &= (\sigma, \tau s') \\ p_{13}(\sigma, \tau, s') &= (\sigma\tau, s') \\ p_{23}(\sigma, \tau, s') &= (\tau, s') \end{aligned}$$

Sous la forme $\boldsymbol{\mu}_k \times S'$ du produit fibré, une donnée de recollement sur un S'-schéma X' se présente comme une flèche $\boldsymbol{\mu}_k \times X' \to X'$ compatible avec l'action de $\boldsymbol{\mu}_k$ sur S'. Ce sera une donnée de descente si de plus cette loi fait opérer le groupe μ_k sur X'. On a donc ce résultat que, si X' est un schéma affine sur $\mathbf{V}(E) - \{0\}$, sur lequel $\boldsymbol{\mu}_k$ opère de façon compatible avec les projections et les homothéthies de $\mathbf{V}(E) - \{0\}$, alors X' « se descend » en un schéma affine X sur $\mathbf{P}(E)$.

On voit en passant que X est le quotient de X' par l'action de $\boldsymbol{\mu}_k$.

(2) Soit k' une extension galoisienne finie de k, de groupe G. G opère à gauche sur k' pas automorphisme sur k. Il opère donc à droite sur $S' = \operatorname{Spec} k'$ par k-isomorphismes. Si X est un schéma sur $S = \operatorname{Spec} k$, le groupe G opère sur $X' = X \times_S S'$ par X-isomorphisme, et X est le quotient de X' par l'action de G (voir Mumford [15, II., §4, Th.1, Cor.]). Le produit fibré $S' \times_S S'$ peut se mettre sous la forme $S' \times G$ avec les projections $p_1(s', \sigma) = s'\sigma, p_2(s', \sigma) = s'$.

Comme précédemment, une donnée de descente se décrit comme une opération du groupe G à droite sur X' compatible avec l'action de G sur S'.

Si le schéma X' est affine sur S' et subit une opération par G à droite compatible avec les projections, il se descend en un schéma X affine sur S, qui est le quotient de X' par l'opération de G.

(3) Si on prend $k = \mathbf{R}$ et $k' = \mathbf{C}$, la démonstration se réduit à une conjugaison u qui doit être compatible à celle de $\mathbf{C}$ (pour le recollement) et involutive (descente).

Par exemple, si on prend $X' = \operatorname{Spec} \mathbf{C}[T]/(T^2 + 1)$ et $u(T) = T$ on obtient $X = \operatorname{Spec} \mathbf{R}[T]/(T^2 + 1)$; en revanche, si $u(T) = -T$, on trouve $X = \operatorname{Spec} \mathbf{R}[W]/(W^2 - 1)$, avec $T = iW$.

Chapitre 7

Pro-représentabilité

1. Introduction

Soit $F : (\mathcal{S}ch/S)^\circ \longrightarrow \mathcal{E}ns$ un foncteur contravariant sur la catégorie des S-schémas, à valeurs dans la catégorie des ensembles. On voudrait connaître des conditions nécessaires pour que F soit représentable et éventuellement, des renseignements sur le schéma X susceptible de le représenter.

Nous appellerons *foncteur exact à gauche* (resp. *à droite*) sur une catégorie $\mathcal{C}$ tout foncteur qui commute aux limites projectives finies (resp. limites inductives finies) ou, ce qui revient au même, tel que, toutes les fois que $X \times Y$ existe dans $\mathcal{C}$, $F(X \times Y) = F(X) \times F(Y)$ et si $N \to X$ est un noyau du couple de flèches $X \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} Y$, $F(N) \to F(X)$ est un noyau du couple $F(X) \overset{F(f)}{\underset{F(g)}{\rightrightarrows}} F(Y)$ (resp. $F(X \sqcup Y) = F(X) \sqcup F(Y)$ et F commute au conoyau).

Un foncteur contravariant sur $\mathcal{C}$ sera dit exact à gauche, s'il l'est sur $\mathcal{C}^\circ$ comme foncteur (covariant).

Si F est un foncteur représentable de $(\mathcal{S}ch/S)^\circ$ dans $\mathcal{E}ns$, représenté par X (i.e. $\forall\, T \in (\mathcal{S}ch/S),\ F(T) \simeq \mathrm{Hom}_S(T, X)$) alors F est exact à gauche.

Si $\mathcal{C}'$ est une sous-catégorie pleine de $(\mathcal{S}ch/S)$ telle que les limites inductives finies dans $\mathcal{C}'$, si elles existent, soient les mêmes que dans $(\mathcal{S}ch/S)$, alors le foncteur $F|\mathcal{C}'^\circ : \mathcal{C}'^\circ \to \mathcal{E}ns$ est exact à gauche.

Dans $(\mathcal{S}ch/S)$ les sommes directes existent et il sera en général facile de vérifier que F commute aux produits dans $(\mathcal{S}ch/S)^\circ$. Mais les conoyaux dans $(\mathcal{S}ch/S)$ n'existent pas nécessairement. Les conoyaux, qui existent toujours dans la catégorie des S-schémas *affines* (correspondant aux noyaux dans la catégorie des anneaux), ne restent pas en général des conoyaux dans la catégorie $(\mathcal{S}ch/S)$.

Voici néanmoins deux cas où les conoyaux existent :

<u>1er cas</u>. Soit T un S-schéma, $T' \to T$ un S-morphisme couvrant pour la topologie fpqc, $T'' = T' \times_T T'$. Alors on a vu que $T' \to T$ est un noyau de la double flèche canonique $T'' \rightrightarrows T'$. La condition d'exactitude à gauche dans ce cas, redonne simplement le fait que F est un faisceau pour la topologie fpqc.

<u>2ème cas</u>. Soit $s \in S$, posons $\mathcal{O}_{S,s} = \Lambda$, et considérons la catégorie $\mathcal{C}^\circ_\Lambda$ des spectres de Λ-algèbres de longueur finie où $\mathcal{C}_\Lambda$ est la catégorie des Λ-algèbres de longueur finie. C'est une sous-catégorie pleine de $(\mathcal{S}ch/S)$, dans laquelle les limites inductives finies existent (trivial) et sont conservées dans $(\mathcal{S}ch/S)$. En effet, $\mathrm{Spec}\, A \sqcup \mathrm{Spec}\, B = \mathrm{Spec}(A \times B)$ est le coproduit de $\mathrm{Spec}\, A$ et $\mathrm{Spec}\, B$ aussi bien dans $\mathcal{C}^\circ_\Lambda$ que dans $(\mathcal{S}ch/S)$. De plus, si l'on a un couple de flèches $\mathrm{Spec}\, B \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} \mathrm{Spec}\, A$, il admet dans $\mathcal{C}^\circ_\Lambda$ un conoyau $\mathrm{Spec}\, K$ (où $K = \mathrm{Ker}\ A \rightrightarrows B$) qui est aussi conoyau dans

$(\mathcal{S}ch/S)$. En effet : Si $\varphi : \operatorname{Spec} A \to Y$ est un morphisme dans le S-schéma Y, tel que $\varphi \circ f = \varphi \circ g$, φ se factorise par $Y_\Lambda = Y \times_S \operatorname{Spec}(\Lambda)$, et $\varphi_\Lambda \circ f = \varphi_\Lambda \circ g$,

$$\begin{tikzcd}
Y & Y_\Lambda \arrow[l, hook'] & \\
\operatorname{Spec} K \arrow[dr] & \operatorname{Spec} A \arrow[l] \arrow[u, "\varphi_\Lambda"'] \arrow[ul, "\varphi"] \arrow[d] & \operatorname{Spec} B \arrow[l, shift right, "f"'] \arrow[l, shift left, "g"] \arrow[dl] \\
& \operatorname{Spec} \Lambda &
\end{tikzcd}$$

car $Y_\Lambda \to Y$ est un monomorphisme. D'autre part, A étant de longueur finie sur Λ, φ_Λ se factorise par $\operatorname{Spec} \prod_{1 \le i \le n} \mathcal{O}_{Y_\Lambda, y_i}$ (produit fini) ce qui nous ramène au cas affine, d'où la conclusion.

En outre, si F est représentable par X sur $(\mathcal{S}ch/S)$, pour tout $A \in \mathcal{C}_\Lambda$, en notant $F_\Lambda(A) = F(\operatorname{Spec} A)$, on a

$$F_\Lambda(A) = F(\operatorname{Spec} A) = \operatorname{Hom}_S(\operatorname{Spec} A, X) = \operatorname{Hom}_{\operatorname{Spec} \Lambda}(\operatorname{Spec} A, X_\Lambda)$$

donc

$$F_\Lambda(A) = \operatorname{Hom}_\Lambda(\prod_x \mathcal{O}_{X_\Lambda, x}, A)$$

où x parcourt l'ensemble des points de X_Λ à extensions résiduelles finies. On a alors un isomorphisme

$$\operatorname{Hom}_\Lambda(\prod_x \mathcal{O}_{X_\Lambda, x}, A) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_{\Lambda-cont}(\widehat{\prod_x \mathcal{O}_{X_\Lambda, x}}, A)$$

où $\widehat{\prod_x \mathcal{O}_{X_\Lambda, x}}$ est le complété de $\prod_x \mathcal{O}_{X_\Lambda, x}$ pour la topologie dans laquelle les idéaux ouverts $\mathfrak{I}$ sont ceux tels que $\prod_x \mathcal{O}_{X_\Lambda, x}/\mathfrak{I}$ sont de longueur finie sur Λ (idéaux de colongueur finie). Donc

$$F_\Lambda(A) = \operatorname{Hom}_{\Lambda-cont}(\widehat{\prod_x \mathcal{O}_{X_\Lambda, x}}, A)$$

La connaissance du foncteur h_X sur $\mathcal{C}_\Lambda$ équivaut donc à la connaissance de l'algèbre topologique complète $\widehat{\prod_x \mathcal{O}_{X_\Lambda, x}}$. Elle est canoniquement splittée en le produit $\prod_x \widehat{\mathcal{O}}_{X_\Lambda, x}$ des complété des anneaux de X aux points de X_s à extensions résiduelles finies (complétés pour la topologie des idéaux de colongueur finie). En particulier si X est localement de type fini sur S localement noethérien, on obtient le produit des complétés des anneaux locaux aux points fermés de X_s (complétés pour la topologie définie par leur idéal maximal).

Nour allons voir que réciproquement, un foncteur F sur $\mathcal{C}_\Lambda$, exact à gauche, est décrit par une algèbre topologique du type précédant.

Bref si $F : (\mathcal{S}ch/S)^\circ \to \mathcal{E}ns$ est localement de présentation finie sur S et exact à gauche sur $\mathcal{C}_\Lambda$ on peut dire intuitivement, que l'on connait déjà les complétés des anneaux locaux de l'hypothétique schéma X qui représente F, aux points fermés de X_s.

2. Pro-catégorie d'une catégorie. Critère de Gabriel

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. On lui associe la catégorie $\mathcal{P}ro\mathcal{C}$ (voir [9, 195, A.2]) dont les objets sont des sytèmes projectifs filtrants $X_\bullet = (X_i)_{i \in I}$ d'objets de $\mathcal{C}$, et les morphismes de l'objet $X_\bullet = (X_i)_{i\in I}$ vers l'objet $Y_\bullet = (Y_j)_{j\in J}$ sont défini par

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{P}ro\mathcal{C}}(X_\bullet, Y_\bullet) = \varprojlim_{j\in J} \varinjlim_{i\in I} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X_i, Y_j)$$

Les objets de $\mathcal{P}ro\mathcal{C}$ sont dits *pro-objets* de $\mathcal{C}$. Le foncteur $i : \mathcal{C} \to \mathcal{P}ro\mathcal{C}$, qui à X associe le système projectif $\{X\}$ est pleinement fidèle et exact à gauche.

Un foncteur F sur $\mathcal{C}$, à valeurs dans $\mathcal{E}ns$ est dit *pro-représentable* s'il existe un isomorphisme $\xi : \varinjlim \mathrm{Hom}(X_i, \bullet) \xrightarrow{\sim} F$, où $X_\bullet$ est un objet de $\mathcal{P}ro\mathcal{C}$. Si $X \in \mathcal{C}$ et si l'on pose $h_X = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \bullet)$, $\mathrm{Hom}(h_X, F) \xrightarrow{\sim} F(X)$. On peut donc considérer ξ comme élément de $\varprojlim_{i\in I} F(X_i)$. On dit que le couple $(X_\bullet, \xi)$ *pro-représente* F.

$X_\bullet$ est dit *pro-objet strict* s'il est isomorphe à un pro-objet $(X_i)_{i\in I}$ où tous les morphismes $X_i \to X_j$ sont des *épimorphismes*.

Si $(X_\bullet, \xi)$ représent F avec $X_\bullet$ pro-objet strict, F est dit *strictement* pro-représentable.

Si $F : \mathcal{C} \to \mathcal{E}ns$, $X \in \mathcal{C}$, $\xi \in F(X)$ on dit que le couple (X, ξ) est *minimal* si pour tout monomorphisme $u : X' \to X$ noyau d'un couple $X \rightrightarrows X''$, l'existence d'un $\xi' \in F(X')$ tel que $F(u)\xi' = \xi$ entraine que u est un isomorphisme.

On dit qu'un couple (X, ξ) domine un couple $X'', \xi'')$ s'il existe un morphisme $v : X \to X''$ tel que $\xi'' = F(v)\xi$.

Proposition 2.1 (critère de Gabriel). *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie avec des limites projectives finies et $F : \mathcal{C} \to \mathcal{E}ns$. Les deux conditions suivantes sont équivalentes*

(1) F est strictement pro-représentable

(2) F est exact à gauche et tout couple (X, ξ) ($\xi \in F(X)$) est dominé par un couple minimal.

Démonstration. (1) $\Longrightarrow$ (2) Si F est pro-représentable, F est exact à gauche. Soit F représenté par $(X_\bullet, \xi)$, où $X_\bullet$ est un objet strict de $\mathcal{C}$ et $\xi = (\xi_i) \in \varprojlim F(X_i)$; $h_{X_i} \xrightarrow{\xi_i} F$ est un monomorphisme (car $X_\bullet$ est un pro-objet strict).

Soit $X' \xrightarrow{u} X_i \rightrightarrows X''$ une suite exacte pour laquelle il existe $\xi' \in F(X')$ tel que $\xi_i = F(u)\xi'$. Les deux images de ξ_i par $F(X_i) \rightrightarrows F(X'')$ coïncident, donc les deux morphismes $h_{X''} \rightrightarrows F$ coïncident et se factorisent à travers $h_{X_i} \to F$ qui est un monomorphisme, donc les deux morphismes sont égaux, donc u est un isomorphisme et (X_i, ξ_i) est un couple minimal. Soit $\xi \in F(X)$ déterminé par $\eta : X_i \to X$, on vérifie que $\xi = F(\eta)\xi_i$ donc que (X, ξ) est dominé par (X_i, ξ_i).

(2) $\Longrightarrow$ (1) Soit I l'ensemble de tous les couples minimaux. Pour tout $i \in I$, on note X_i le premier élément d'un couple i. On dit que $i \le j$ s'il existe un morphisme $\varphi_{ij} : X_j \to X_i$ tel que $F(\varphi_{ij})\xi_j = \xi_i$. Un tel morphisme est unique (car (X_j, ξ_j) est minimal) donc $X_\bullet = (X_i, \varphi_{ij})_{i\in I}$ est un pro-objet strict de $\mathcal{C}$. Soit G le foncteur pro-représenté par $X_\bullet$, alors $G \simeq F$. En effet les $\xi_i : h_{X_i} \to F$ sont des épimorphisme, car si $\xi \in F(X)$, il existe un couple minimal (X_i, ξ_i) dominant (X, ξ) donc ξ est l'image de $X \to X_i$ par le morphisme $h_{X_i}(X) \to G(X) \to F(X)$, donc $G(X) \to F(X)$ est surjectif. □

Corollaire 2.2. *Si $\mathcal{C}$ est une catégorie avec des limites projectives finies où tout objet est artinien, les foncteurs strictement pro-représentables sont des foncteurs exact à gauche de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{E}ns$.*

Ce corollaire s'applique au cas de $\mathcal{C}_\Lambda$ dont tout objet est artinien.

Soit F un foncteur exact à gauche sur $\mathcal{C}_\Lambda$, pro-représenté par l'algèbre topologique R. Alors R se décompose canoniquement en produit de ses composants locaux, $R_i, i \in I$. Chacun de ces R_i, correspond à un sous-foncteur exact à gauche F_i de F. On souhaiterait traiter séparément chacun des foncteurs F_i. Le foncteur F_i est facile à décrire dans le cas où l'extension résiduelle de R_i, relativement à Λ, est triviale.

En effet, soit k le corps résiduel de Λ. Le morphisme canonique $R_i \to k$ définit un point $\xi \in F_\Lambda(k)$. Pour toute $A \in \mathcal{C}_\Lambda$, locale à extension résiduelle triviale, $F_i(A)$ est alors la partie $F_\xi(A)$ de $F(A)$ dont l'image dans $F(k)$ est égale à ξ. On définit ainsi un sous-foncteur F_ξ de F, sur la sous-catégorie de $\mathcal{C}_\Lambda$ formés des algèbres locales à extension résiduelle triviale, qui est pro-représenté par R_i.

3. Espace tangent

3.1. Espace tangent à un k-schéma en un point rationnel. Soit k un corps, A une k-algèbre $A = k[X_i]_{i\in J}/I$, $X = \operatorname{Spec} A$. Soit $x \in X$ tel que $k \simeq k(x)$ (i.e. x rationnel).

On supposera que x est le point origine de l'espace k^J, ce qui est loisible moyennant un changement d'origine de cet espace.

Si $F \in I$ on notera $F^{(1)}$ la composante homogène de degré 1 de F. On a : $\forall\, F \in I \quad F(0) = 0$ et $F^{(1)} = \sum_{i\in J} \frac{\partial F}{\partial X_i}(0) \cdot X_i$.

Soit $v = (v_i)_{i\in J} \in k^J$ (espace vectoriel). On dira que v est *tangent* en x à X relativement à k si et seulement si « la droite D de direction v », passant par (0), a avec le schéma X une intersection d'ordre au moins égal à 2.

$$\forall\, F \in I \quad F(tv) = tF^{(1)}(v) + t^2\varphi(t, v)$$

on doit donc avoir $\forall\, F \in I : F^{(1)}(v) = 0$ i.e. $\sum_{i\in J} \frac{\partial F}{\partial X_i}(0) \cdot v_i = 0$. Il apparait clairement que l'ensemble des vecteurs tangents v est un k-espace vectoriel.

Définition 3.1. *Soit $X = \operatorname{Spec} A$ comme ci-dessus. Soit $x \in X$ rationnel sur k. On appelera espace tangent en x à X relativement à k et on notera $T_{X/k}(x)$ l'espace vectoriel défini ci-dessus.*

Proposition 3.2. *Soient X, x comme ci-dessus. Soit $\mathcal{O}_{X,x}$ l'anneau local de X en x, $\mathfrak{m}_x$ son idéal maximal. Alors*

$$\begin{aligned} T_{X/k}(x) &\xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_{X,x}}(\Omega_{\mathcal{O}_{X,x}/k}, k(x)) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Der}_k(\mathcal{O}_{X,x}, k(x)) \\ &\xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_k(\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2, k(x)) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_{k-alg}(\mathcal{O}_{X,x}, k(x)[T]/(T^2)) \end{aligned}$$

Démonstration. 1) $\Omega_{\mathcal{O}_{X,x}/k}$: module des k différentielles de $\mathcal{O}_{X,x}$, isomorphe à

$$\Big(\bigoplus_{i\in J} \mathcal{O}_{X,x} dX_i\Big)/\Big(\sum_{i\in J} \frac{\partial F}{\partial X_i} dX_i\Big)_{F\in I}$$

Si on munit $k(x)$ de sa structure de A-module au moyen de $A \to \mathcal{O}_{X,x} \to k(x)$ on a alors: $\operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_{X,x}}(\Omega_{\mathcal{O}_{X,x}/k}, k(x)) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_A(\Omega_{A/k}, k(x))$ et comme

$$\Omega_{A/k} \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{i\in J} A dX_i/\Big(\sum_{i\in J} \frac{\partial F}{\partial X_i} dX_i\Big)_{F\in I}$$

la définition d'un vecteur tangent entraîne que $T_{X/k}(x) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_A(\Omega_{A/k}, k(x))$

2) $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{X,x}}(\Omega_{\mathcal{O}_{X,x}/k}, k(x)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Der}_k(\mathcal{O}_{X,x}, k(x))$ par définition de $\Omega_{\mathcal{O}_{X,x}/k}$.

$$\mathrm{Der}_k(\mathcal{O}_{X,x}, k(x)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{k-alg}(\mathcal{O}_{X,x}, k(x)[T]/(T^2))$$
$$\text{par } D \longmapsto f$$

avec pour $z \in \mathcal{O}_{X,x}$ $\quad f(z) = \bar{z} + D(z) \cdot T$, où $\bar{z} = z + \mathfrak{m}_x \in \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x = k(x)$ la classe de z dans le corps résiduel.

3) $\mathrm{Der}_k(\mathcal{O}_{X,x}, k(x)) \to \mathrm{Hom}_k(\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2, k(x))$ est défini par : si D est une dérivation, $D(\mathfrak{m}_x^2) = 0$ d'où une application linéaire $f : \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2 \to k(x)$.

Réciproquement:
on considère $k \simeq k(x) \subset \mathcal{O}_{X,x}$, soit $z \in \mathcal{O}_{X,x}$ alors $z - \bar{z} \in \mathfrak{m}_x$, donc si f est une application linéaire $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2 \to k(x)$ on définira D par $D(z) = f(z-\bar{z}) \mod \mathfrak{m}_x^2$. $\square$

Remarque. (1) Si A est une k-algèbre de type fini, $T_{X/k}(x)$ est un k-espace vectoriel de type fini.

(2) On voit que $T_{X/k}(x)$ ne dépend que de l'anneau local de X en x, ce qui conduit à poser:

Définition 3.3. *Soit X un k-schéma, x un point rationnel de X. On appelle* espace tangent *en x à X relativement à k l'espace vectoriel*

$$T_{X/k}(x) = \mathrm{Hom}_k(\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2, k(x))$$

Si X est localement de type fini sur k, $T_{X/k}(x)$ est un k-espace vectoriel de type fini.

Si l'on n'impose pas de corps de base, il y a quand même une suite utile dans la situation locale, donnant l'espace cotangent, comme suit: soit donné un morphisme locale $u : A \to B$ d'anneaux locaux à extensions résiduelles triviales : $\kappa_A \xrightarrow{\sim} \kappa_B =: k$. Pour tout k-espace vectoriel V il y a la suite exacte suivante (démonstration immédiate):

$$0 \to \mathrm{Der}_A(B, V) \to \mathrm{Hom}_k(\mathfrak{m}_B/\mathfrak{m}_B^2, V) \to \mathrm{Hom}_k(\mathfrak{m}_A/\mathfrak{m}_A^2, V)$$

On a donc la suite exacte de k-espaces vectoriels:

$$\mathfrak{m}_A/\mathfrak{m}_A^2 \to \mathfrak{m}_B/\mathfrak{m}_B^2 \to \Omega_{B/A} \otimes_B k \to 0 \tag{5}$$

3.2. Espace tangent à un k-foncteur. Soit $\mathcal{E}$ la catégorie des k-algèbres locales finies de la forme $k[V] = k \oplus V$ où V est un k-espace vectoriel de type fini, considéré comme un idéal de carré nul. Soit $F : \mathcal{E} \to \mathcal{E}ns$ un foncteur. Alors la catégorie $\mathcal{E}$ possède des produits finis : $k[V \oplus W] \xrightarrow{\sim} k[V] \times k[W]$.

Soit G le foncteur qui a tout k-espace vectoriel de type fini associe $G(V) = F(k[V])$. Pour tout $\xi \in G(0) = F(k)$ on définira un foncteur G_ξ de la façon suivante: Soit $V \to 0$ l'application canonique, d'où l'application augmentation : $k[V] \xrightarrow{\pi} k$. Alors: $G_\xi(V) = F(\pi)^{-1}(\xi)$.

Considérons la condition suivante : $\forall\ \xi \in F(k)$ et $\forall\ V, W$ espace vectoriel de dimension finie, l'application canonique :

$$G_\xi(V \oplus W) \to G_\xi(V) \times G_\xi(W) \quad \text{est bijective} \tag{E}$$

Soit ε le k-espace vectoriel k.

Proposition 3.4. *Soit $\mathcal{V}$ la catégorie des k-espaces vectoriels de dimension finie. Soit $\mathcal{A}b$ la catégorie des groupes abéliens, soit $\mathcal{V}'$ la catégorie des k-espaces vectoriels.*

(1) Tout foncteur additif $G : \mathcal{V} \to \mathcal{A}b$ se factorise en $\mathcal{V} \to \mathcal{V}' \hookrightarrow \mathcal{A}b$.

(2) *Tout foncteur additif* $G : \mathcal{V} \to \mathcal{A}b$ *vérifie :* $G(0) = 0$ *et* $\forall\ V, W \in \mathcal{V}$ *on a* $G(V \oplus W) \xrightarrow{\sim} G(V) \times G(W)$. *Sous ces conditions la structure de groupe abélien de* $G(V)$ *est la structure déduite de l'isomorphisme ci-dessus au moyen de l'application canonique :* $G(V) \times G(V) \xrightarrow{\sim} G(V \oplus V) \xrightarrow{G(\sigma)} G(V)$ *où* $\sigma : V \oplus V \to V$ *est l'addition dans* V.

(3) *Soit* $F : \mathcal{E} \to \mathcal{E}ns$ *un foncteur vérifiant* (E). *Alors pour tout* $\xi \in F(k)$, G_ξ *est un foncteur en espaces vectoriels, l'addition dans* $G_\xi(V)$ *est celle décrite dans* (2). *Alors* G_ξ *est additif et il existe un homomorphisme canonique et fonctoriel en* V *:* $G_\xi(\varepsilon) \otimes_k V \to G_\xi(V)$ *qui est un isomorphisme.*

Démonstration. (1) provient de la fonctorialité et du fait que la multiplication par un scalaire est k-linéaire.

(2) Si G est un foncteur en groupe abélien et si G est additif (i.e. si f, g sont deux homomorphismes de V dans W, alors $G(f+g) = G(f)+G(g)$), alors $G(0) = 0$ provient de ce que l'identité de $G(0)$ est égale à la multiplication nulle. L'isomorphisme de déduit alors de l'existence de sections et retractions pour la suite $0 = G(0) \to G(V) \to G(V \oplus W) \to G(W) \to G(0) = 0$. Il est clair que l'homomorphisme $G(V) \times G(V) \xrightarrow{\sim} G(V \oplus V) \to G(V)$ vérifie les propriétés d'une addition dans $G(V)$. Comme c'est un homomorphisme pour la structure de groupe abélien, on en déduit, par un argument du genre [13, II, lemme 3.10] que c'est l'application définissant la structure de groupe de $G(V)$.

(3) Soit F vérifiant (E), alors l'isomorphisme en question permet de définir une application $G_\xi(V) \times G_\xi(V) \xrightarrow{\sim} G_\xi(V \oplus V) \to G_\xi(V)$ qui vérifie les propriétés d'une addition, si $f : V \to W$ est un homomorphisme, $G_\xi(f)$ est un homomorphisme, la propriété pour une loi de composition (resp. pour une application) d'être une loi de groupe (resp. un homomorphisme) se traduisant à l'aide de diagrammes commutatifs où interviennent des applications entre produits d'objets de la catégorie.

L'additivité de G_ξ : si $f, g \in \mathrm{Hom}_k(V, W)$, $V \xrightarrow{(f,g)} W \oplus W \to W$ où le 2è morphisme est l'addition de W, d'où le résultat d'après la définition de l'addition de $G(V)$.

On a d'ailleurs : $V \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_k(\varepsilon, V)$, d'où un homomorphisme fonctoriel en V : $G_\xi(\varepsilon) \otimes_k V \to G_\xi(V)$. Les deux membres commutent aux sommes directes finies et on a un isomorphisme si $V = \varepsilon$, d'où le résultat. □

Définition 3.5. *Soit* $F : \mathcal{E} \to \mathcal{E}ns$ *un foncteur, soit* $\xi \in F(k)$. *Alors on appelle* espace tangent *en* ξ *à* F *l'ensemble* $G_\xi(\varepsilon)$. *Si* F *vérifie* (E) *c'est un espace vectoriel d'après la proposition 3.4. On le note* $T_{F/k}(\xi)$.

Remarque. Soit S un schéma, X un S-schéma, $s \in S$, $\mathcal{O}_{S,s}$ l'anneau local de S en s, k le corps résiduel de $\mathcal{O}_{S,s}$. Alors X définit un foncteur de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}ns$, à savoir $F(k[V]) \times \mathrm{Hom}_S(\mathrm{Spec}\, k[V], X)$. Alors tout $\xi \in F(k)$ correspond biunivoquement à un point x de X rationnel sur S au-dessus de s ; la proposition 3.4 montre alors que l'espace tangent en x de $X \otimes_S k(s)$ est isomorphe à $G_\xi(s)$, le foncteur F vérifiant alors (E).

Proposition 3.6. *Soit* $F : \mathcal{E} \to \mathcal{E}ns$ *un foncteur vérifiant* (E). *Alors* $\forall\ \xi \in F(k)$ *le foncteur* $G_\xi : \mathcal{V} \to \mathcal{E}ns$ *(qui est alors un foncteur en* k*-espace vectoriel) est pro-représentable. En outre:* G_ξ *représentable* $\iff$ $G_\xi(\varepsilon)$ *est un* k*-module de type fini ; alors* G_ξ *est représentable par le dual de* $G_\xi(\varepsilon)$.

Démonstration. Soit $G(\varepsilon) = \varinjlim_{i\in I} W_i$ limite inductive filtrante de sous-module de type fini. Soit $V \in \mathcal{V}$; on a

$$(\varinjlim_{i\in I} W_i) \otimes_k V \xrightarrow{\sim} \varinjlim_{i\in I}(W_i \otimes_k V) \xrightarrow{\sim} \varinjlim_{i\in I} \mathrm{Hom}_k(W_i^\vee, V) \xrightarrow{\sim} G_\xi(V)$$

Autrement dit, le système projectif $(W_i^\vee)_{i\in I}$ pro-représente G_ξ.

Montrons: si $G_\xi(\varepsilon)$ est un module de type fini, le système inductif (W_i) est stationnaire, il existe i tel que $W_i = G_\xi(\varepsilon)$, alors $W_i^\vee = G_\xi(\varepsilon)^\vee$ représente G_ξ. Si G_ξ est représentable par un k-module de type fini W, on a:

$$G_\xi(\varepsilon) = \mathrm{Hom}_k(W, \varepsilon) \xrightarrow{\sim} W^\vee \iff W \xrightarrow{\sim} G_\xi(\varepsilon)^\vee$$

Le système projectif $(W_i^\vee)_{i\in I}$ pro-représente G_ξ. On aura donc

$$G_\xi(V) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{cont}(\varprojlim_{i\in I} W_i^\vee, V)$$

$\varprojlim_{i\in I} W_i^\vee$ étant muni de la topologie limite projective des topologies discrètes. Alors ce module n'est autre que le complété $\widehat{G_\xi(\varepsilon)^\vee}$ de $G_\xi(\varepsilon)^\vee$ pour la topologie linéaire dont un système fondamental de voisinages de 0 est fourni par les $(G_\xi(\varepsilon)/W_i)^\vee$.

Soit l'homomorphisme canonique $G_\xi(\varepsilon)^\vee \to \widehat{G_\xi(\varepsilon)^\vee} = \varprojlim W_i^\vee$ On en déduit pour tout k-espace vectoriel de type fini V, un homomorphisme :

$$\mathrm{Hom}_{cont}(\varprojlim_{i\in I} W_i^\vee, V) \to \mathrm{Hom}_k(G_\xi(\varepsilon)^\vee, V)$$

Supposons que ces deux foncteurs sont isomorphes. Alors en prenant $V = \varepsilon$, on obtient $G_\xi(\varepsilon) \xrightarrow{\sim} G_\xi(\varepsilon)^{\vee\vee}$, $\implies$ $G_\xi(\varepsilon)$ est un k-espace vectoriel de type fini. Alors $G_\xi(\varepsilon)^\vee$ représente G_ξ. □

Remarque. (1) Le catégorie $\mathcal{V}$ des espaces vectoriels de type fini étant artinienne, la pro-représentabilité de G_ξ se déduit aussitôt de son exactitude à gauche, par le critère de Gabriel corollaire 2.2.

(2) Si X est un k-schéma, on a vu que le foncteur $F : \mathcal{E} \to \mathcal{E}ns$ qui à $k[V]$ associe $\mathrm{Hom}_k(\mathrm{Spec}\, k[V], X)$ vérifie (E) et que $G_\xi(\varepsilon)$ était isomorphe à $T_{X/k}(\xi)$ pour tout $\xi \in F(k)$. Alors si X est localement de type fini, $G_\xi(\varepsilon)$ est un espace de type fini dont le dual représente G_ξ. Comme $G_\xi \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_k(\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2, k(x))$ on déduit que G_ξ est représentable par $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$.

Exemple 3.7. *Soit V un k-espace vectoriel de type fini. Soit $\mathbf{GL}(V)$ le foncteur de $(\mathcal{S}ch/k)^\circ$ dans $\mathcal{E}ns$ tel que : $\mathbf{GL}(V)(S) = \mathrm{Aut}_{\mathcal{O}_S}(V \otimes_k \mathcal{O}_S)$.*

On en déduit un foncteur de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}ns$, qui vérifie (E) (car $\mathbf{GL}(V)$ est représentable par un k-schéma affine de type fini).

Proposition 3.8. *Soit $e \in \mathbf{GL}(V)(k)$ l'identité $V \to V$. Alors il y a un isomorphisme canonique*

$$\mathrm{End}_k(V) \xrightarrow{\sim} T_{\mathbf{GL}(V)/k}(e)$$

Démonstration. $T_{\mathbf{GL}(V)/k}(e) = \mathbf{GL}(V)_e(k[\varepsilon])$ = ensemble des $k[\varepsilon]$ automorphisme de $V \otimes_k k[\varepsilon]$ qui se réduisent à l'identité par le changement de base $k[\varepsilon] \to k$. Si $f \in \mathrm{End}_k(V)$ soit $h \in \mathrm{Hom}_{k[\varepsilon]}(V \otimes_k k[\varepsilon], V \otimes_k k[\varepsilon])$ défini par $h = Id_{V\otimes k[\varepsilon]} + (f\otimes 1)(0\otimes 1)$ i.e. $h(z) = z + (0\otimes 1)(f\otimes 1)(z)$, alors $h \in \mathrm{Aut}_{k[\varepsilon]}(V \otimes_k k[\varepsilon])$ et h se réduit suivant l'identité.

Réciproquement à tout h on associe l'endomorphisme f de V tel que $(0\otimes 1)f \otimes 1 = h - Id_{V\otimes k[\varepsilon]}$ □

3.3. Foncteurs pro-représentables. Soit $F : \mathcal{C}_\Lambda \to \mathcal{E}ns$ un foncteur où Λ = anneau local noethérien ; $\mathcal{C}_\Lambda$ = catégorie des Λ-algèbres de longueur finie à extensions résiduelles triviales. Soit k le corps résiduel de Λ. Soit E la restriction de F à la catégorie $\mathcal{E}$ et $\xi \in E(k)$. On suppose que F est pro-représentable ; alors E vérifie (E). Soit $\mathcal{O}_\xi$ l'algèbre locale séparée complète correspondant à ξ et $\mathfrak{m}_\xi$ son idéal maximal.

Alors on sait que : $\mathcal{O}_\xi$ noethérien $\iff$ $\mathfrak{m}_\xi/\mathfrak{m}_\xi^2$ est un $\mathcal{O}_\xi/\mathfrak{m}_\xi$ espace vectoriel de type fini (Bourbaki [2, III, §2, cor. 5 du th. 2]). De plus la topologie de $\mathcal{O}_\xi$ est alors la topologie $\mathfrak{m}_\xi$-adique.

Soit (cf. la suite (5) de la section 3.1) $\mathfrak{m}_\Lambda/\mathfrak{m}_\Lambda^2 \to \mathfrak{m}_\xi/\mathfrak{m}_\xi^2 \to \mathfrak{m}_\xi/(\mathfrak{m}_\xi^2+\mathfrak{m}_\Lambda\mathcal{O}_\xi) \to 0$ d'où: $\mathfrak{m}_\xi/\mathfrak{m}_\xi^2$ est de type fini $\iff$ $\mathfrak{m}_\xi/(\mathfrak{m}_\xi^2+\mathfrak{m}_\Lambda\mathcal{O}_\xi)$ de type fini.

Alors $G_\xi(\varepsilon) = \mathrm{Hom}_k(\mathcal{O}_\xi/\mathfrak{m}_\Lambda\mathcal{O}_\xi, k[\varepsilon]) = \mathrm{Hom}_k(\mathfrak{m}_\xi/(\mathfrak{m}_\xi^2+\mathfrak{m}_\Lambda\mathcal{O}_\xi), \varepsilon)$.

Donc $\mathcal{O}_\xi$ noethérien $\iff$ $T_{F/k}(\xi)$ est un k-espace vectoriel de type fini.

Proposition 3.9. *Soit $F : \mathcal{C}_\Lambda \to \mathcal{E}ns$ un foncteur pro-représentable. Soit $\xi \in F(k)$. Pour que l'algèbre locale séparée complète $\mathcal{O}_\xi$ correspondant à ce point soit noethérienne, il faut et il suffit que $F(k[\varepsilon]) = T_{F/k}(\xi)$ soit un k-espace vectoriel de type fini.*

4. Le critère de pro-représentabilité de Schlessinger

4.1. Préliminaires. Soit Λ un anneau local noethérien complet. Soit $\mathcal{C}_\Lambda$ la catégorie des Λ-algèbres de longueur finie. Si Λ' est une Λ-algèbre finie plate locale, on posera :

$\mathcal{C}'_{\Lambda'}$ = catégorie des Λ'-algèbres de longueur finie, locales, à extension résiduelles triviale (i.e. si k' est le corps résiduel de Λ' et K est celui de $A \in \mathcal{C}'_{\Lambda'}$, on a $k' \xrightarrow{\sim} K$)

$\mathcal{C}''_{\Lambda'}$ = catégorie des Λ'-algèbres de longueur finie, non nécessairement locales, à extension résiduelles triviales.

Tout $A \in \mathcal{C}''_{\Lambda'}$ est produit fini d'éléments A_i de $\mathcal{C}'_{\Lambda'}$.

Théorème 4.1. *Soit $F : \mathcal{C}_\Lambda \to \mathcal{E}ns$ un foncteur ; pour que F soit pro-représentable (c'est-à-dire exact à gauche, d'après le critère de* Gabriel, *corollaire 2.2) il faut et il suffit qu'il vérifie:*

(1) F commute aux produits finis

(2) Pour toute extension $\Lambda \to \Lambda'$ finie locale et plate, la restriction de F à $\mathcal{C}'_{\Lambda'}$ est exacte à gauche

(3) Pour tout morphisme plat $A \to B$ de $\mathcal{C}_\Lambda$, avec A local, la suite d'ensembles
$$F(A) \longrightarrow F(B) \rightrightarrows F(B \otimes_A B) \quad \textit{est exacte.}$$

Remarque. La condition (2) sera analysée en détails au §4.3. La condition (1) permet alors de montrer que la restriction de F à $\mathcal{C}''_{\Lambda'}$ est exacte à gauche. La condition (3) sera vérifiée dans la pratique car on ne considérera que les foncteurs F qui seront des faisceaux pour la topologie fidèlement plate de présentation finie.

Si F est exact à gauche, ces 3 conditions sont évidemment vérifiées. Montrons que ces conditions sont suffisantes ; on utilisera les lemmes ci-dessous :

Lemme 4.2. *(1) Soit $\Lambda \to \Lambda'$ une extension finie locale et plate. Alors pour tout couple $B \to A$ et $C \to A$ de morphisme de $\mathcal{C}_\Lambda$ on aura :*
$$(B \times_A C) \otimes_\Lambda \Lambda' \xrightarrow{\sim} (B \otimes_\Lambda \Lambda') \times_{A \otimes_\Lambda \Lambda'} (C \otimes_\Lambda \Lambda')$$

(2) *Soient A, B, C comme ci-dessus. Il existe alors une extension $\Lambda \to \Lambda'$ finie locale plate telle que si A', B', C' sont les Λ'-algèbres obtenues par changement de base, les Λ'-algèbres A', B', C' et $B' \times_{A'} C'$ soient à extension résiduelles triviales.*

Démonstration. (1) Soit la suite exacte $B \times_A C \longrightarrow B \times C \rightrightarrows A$ définissant le produit fibré $B \times_A C$. $\Lambda \to \Lambda'$ étant plat on en déduit la suite exacte: $(B \times_A C) \otimes_\Lambda \Lambda' \longrightarrow B' \times C' \rightrightarrows A'$, d'où (1).

(2) Soit k le corps résiduel de Λ. Soit K une extension finie normale de k, contenant les extensions résiduelles de $A, B, C, B \times_A C$.

De proche en proche, en étudiant d'abord le cas d'une extension monogène, on construit une Λ-algèbre Λ' locale, finie et libre, de corps résiduel K. Il est clair alors que A', B', C' et $B' \times_{A'} C'$ déduites de A par l'extension $\Lambda \to \Lambda'$ ont toutes leurs extension résiduelles triviales. □

Lemme 4.3. *Soit le diagramme d'ensembles ci-dessous. On supposera qu'il est commutatif, que les lignes $\varepsilon, \beta, \gamma$ sont des suites exactes et que les carrés (2) et (3) sont cartésiens. Alors le carré (1) est cartésien.*

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[rr, "\varepsilon"] \arrow[dr] \arrow[dd] \arrow[ddr, phantom, "(1)"] & & E' \arrow[rr, shift left, "\varepsilon_1"] \arrow[rr, shift right, "\varepsilon_2"'] \arrow[dr] \arrow[dd] \arrow[ddr, phantom, "(2)"] & & E'' \arrow[dr] \arrow[dd] \arrow[ddr, phantom, "(3)"] & \\
& C \arrow[rr, "\gamma"] \arrow[dd] & & C' \arrow[rr, shift left, "\gamma_1"] \arrow[rr, shift right, "\gamma_2"'] \arrow[dd] & & C'' \arrow[dd] \\
B \arrow[rr, "\beta"] \arrow[dr] & & B' \arrow[rr, shift left, "\beta_1"] \arrow[rr, shift right, "\beta_2"'] \arrow[dr] & & B'' \arrow[dr] & \\
& A \arrow[rr] & & A' \arrow[rr, shift left] \arrow[rr, shift right] & & A''
\end{tikzcd}$$

Démonstration. La démonstration consiste en une simple chasse au diagramme. □

Démonstration. (du Théorème 4.1)

Soient $B \to A$ et $C \to A$ deux morphismes de $\mathcal{C}_\Lambda$, et soit $E = B \times_A C$. On veut montrer :

$$F(B \times_A C) \simeq F(B) \times_{F(A)} F(C)$$

On peut supposer B et C locaux. Au moyen du lemme 4.2, 2) on choisit $\Lambda \to \Lambda'$ fini plat local tel que par changement de base A', B', C' et $E' = B' \times_{A'} C'$ soient des Λ'-algèbres à extension résiduelles triviales.

Alors si $\Lambda'' = \Lambda' \otimes_\Lambda \Lambda'$ les algèbres $A'', B'', C'', E'' = B'' \times_{A''} C''$ obtenus à partir de $A, B, C, B \times_A C$ par l'extension $\Lambda \to \Lambda''$, sont aussi à extensions résiduelles triviales. On a alors le diagramme d'ensembles ci-dessous:

$$\begin{tikzcd}
F(E) \arrow[rr, "\varepsilon"] \arrow[dd] \arrow[dr] & & F(E') \arrow[rr, shift left, "\varepsilon_1"] \arrow[rr, shift right, "\varepsilon_2"'] \arrow[dd] \arrow[dr] & & F(E'') \arrow[dd] \arrow[dr] & \\
& F(C) \arrow[rr, "\gamma"] \arrow[dd] \arrow[dl, phantom, "(1)"] & & F(C') \arrow[rr, shift left, "\gamma_1"] \arrow[rr, shift right, "\gamma_2"'] \arrow[dd] \arrow[dl, phantom, "(2)"] & & F(C'') \arrow[dd] \arrow[dl, phantom, "(3)"] \\
F(B) \arrow[rr, "\beta"] \arrow[dr] & & F(B') \arrow[rr, shift left, "\beta_1"] \arrow[rr, shift right, "\beta_2"'] \arrow[dr] & & F(B'') \arrow[dr] & \\
& F(A) \arrow[rr] & & F(A') \arrow[rr, shift left] \arrow[rr, shift right] & & F(A'')
\end{tikzcd}$$

Il est commutatif. $\Lambda \to \Lambda'$ étant plat, $A \to A'$, $B \to B'$, $C \to C'$, $E \to E'$ sont plats, donc d'après l'hypothèse (3) les lignes $\varepsilon, \beta, \gamma$ sont exactes. D'après l'hypothèse (2) et l'hypothèse (1) du Théorème, les carrés (2) et (3) sont cartésiens. D'après le lemme 4.3, le carré (1) est cartésien. $\square$

4.2. Foncteurs à Enveloppe sur $\mathcal{C}'_\Lambda$.

4.2.1. *Exemple.* Pour tout Λ-module de type fini M soit Γ_M le foncteur covariant $\mathcal{C}'_\Lambda \to \mathcal{E}ns$ défini par $\Gamma_M(A) = A \otimes_\Lambda M$.

Soit $\mathfrak{m}_\Lambda$ l'idéal maximal de Λ ; soit $r = \mathrm{rk}_{\,k}(M/\mathfrak{m}_\Lambda M)$. Alors il existe une suite exacte $L \to M \to 0$ où L est libre de rang r (Nakayama). D'où un morphisme de foncteurs $u : \Gamma_L \to \Gamma_M$ surjectif.

Si $\bar{M} = M \otimes_\Lambda k$, $\bar{L} = L \otimes_\Lambda k$, on a $\bar{u} : \Gamma_{\bar{L}} \xrightarrow{\sim} \Gamma_{\bar{M}}$.

Soit $L^\vee$ le module dual de L. Pour tout Λ-algèbre A on a un isomorphisme canonique :

$$\Gamma_L(A) = A \otimes_\Lambda L \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_\Lambda(L^\vee, A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\Lambda-alg}(\mathbf{S}_\Lambda(L^\vee), A)$$

On en déduit que Γ_L est pro-représentable par le complété de l'algèbre symétrique $\mathbf{S}_\Lambda(L^\vee)$ suivant l'idéal $L^\vee \mathbf{S}_\Lambda(L^\vee)$.

Définition 4.4. *Soit $F \to G$ un morphisme de foncteurs définis de $\mathcal{C}'_\Lambda \to \mathcal{E}ns$. On dira que $F \to G$ est* lisse *si: pour toute surjection $B \to A$ dans $\mathcal{C}'_\Lambda$, l'application canonique*

$$F(B) \to F(A) \times_{G(A)} G(B) \tag{L}$$

est surjective.

Dans le cas des foncteurs Γ définis ci-dessus, il résulte de l'exactitude à droite du produit tensoriel que $\Gamma_L \to \Gamma_M$ est lisse.

D'autre part, pour tout $\zeta \in \Gamma_M(k)$ comme l'espace tangent à un foncteur ne dépend que de la restriction du foncteur aux k-algèbres il résulte de l'isomorphisme $\bar{L} \to \bar{M}$ que l'homomorphisme canonique $T_{\Gamma_{L/k}}(\zeta) \to T_{\Gamma_{M/k}}(\zeta)$ est un isomorphisme.

Nous verrons plus loin que Γ_M est pro-représentable si et seulement si M est libre. Même si Γ_M n'est pas pro-représentable, on a trouvé un foncteur pro-représentable Γ_L d'un morphisme $u : \Gamma_L \to \Gamma_M$ tel que le couple (Γ_L, u) possède les deux propriétés suivantes:

(1) u est un morphisme *lisse*

(2) u induit un isomorphisme sur les espaces tangents en tout point $\zeta \in \Gamma_M(k)$

Nous dirons que (Γ_L, u) est une *enveloppe* de Γ_M en tout point $\zeta \in \Gamma_M(k)$.

4.2.2. *Généralités sur les morphismes lisses.* Soit $\widehat{\mathcal{C}'_\Lambda}$ la catégorie des Λ-algèbres locales noethériennes complètes A, telles que si $\mathfrak{m}_A$ est l'idéal maximal de A, pour tout entier n on ait $A/\mathfrak{m}_A^n \in \mathcal{C}'_\Lambda$. Dans la suite on ne considère que des foncteurs F tels que $F(k)$ soit réduit à un seul point. On désigne par $\widehat{F}$ le prolongement de F à $\widehat{\mathcal{C}'_\Lambda}$, défini par $\widehat{F}(A) = \varprojlim_n F(A/\mathfrak{m}_A^n)$

DÉFINITION 4.5. *Soit $B \to A$ une surjection (c'est-à-dire un épimorphisme) de $\mathcal{C}'_\Lambda$. On dira que c'est un* épimorphisme simple *si et seulement si u n'est pas composé de deux épimorphisme (non triviaux).*

Le noyau $J = \mathrm{Ker}(B \to A)$ est donc *minimal*, $J \neq 0$; en particulier on doit avoir $\mathfrak{m}_B J = 0$.

PROPOSITION 4.6. *Soit $F \to G$ un morphisme de foncteurs. Alors $F \to G$ lisse $\iff$ pour tout épimorphisme simple $B \to A$, l'application canonique* (L) *est surjective.*

DÉMONSTRATION. En effet, tout épimorphisme de $\mathcal{C}'_\Lambda$ est composé d'un nombre fini d'épimorphismes simples. □

PROPOSITION 4.7 ([16, prop. 2.5]). *Soit $F \to G$ un morphisme de foncteurs.*

(1) $F \to G$ est lisse $\implies$ $\widehat{F} \to \widehat{G}$ surjectif

(2) Soit $R \to S$ un morphisme de $\widehat{\mathcal{C}'_\Lambda}$. $h_S \to h_R$ lisse $\iff$ S est une algèbre de séries formelles sur R

(3) (sorites des morphismes lisses)
- *$F \to G$ lisse et $G \to H$ lisse $\implies$ $F \to H$ lisse*
- *$F \to G$ surjectif et $G \to H$ tel que $F \to H$ soit lisse alors $G \to H$ est lisse*
- *$F \to G$ lisse $\implies$ pour tout $H \to G$, $F \times_G H \to H$ est lisse*

DÉMONSTRATION. (1) Si $A \in \widehat{\mathcal{C}'_\Lambda}$ alors $F(A/\mathfrak{m}_A) \xrightarrow{\sim} G(A/\mathfrak{m}_A)$. En utilisant la surjection (L) on montre la surjectivité.

(2) non utilisé dans la suite de l'exposé. La démonstration se trouve dans [16] ; voir aussi EGA [12, 0_{IV}.19.3] et SGA [10, chap. III, th. 2.1].

(3) Généralités sur les morphismes lisses découlant directement des définitions. □

DÉFINITION 4.8 ([16, def. 2.7]). *Soit $F : \mathcal{C}'_\Lambda \to \mathcal{E}ns$ un foncteur. Soit $R \in \widehat{\mathcal{C}'_\Lambda}$ et soit h_R le foncteur $\mathcal{C}'_\Lambda \to \mathcal{E}ns$ défini par $h_R(A) = \mathrm{Hom}_{\Lambda-cont}(R, A)$. Un morphisme de foncteur $\xi : h_R \to F$ est une* enveloppe *de F si:*

(1) $T_{F/k} \simeq T_{h_R/k} \simeq \mathrm{Hom}_{\Lambda-cont}(R, k[\varepsilon])$

(2) $\xi : h_R \to F$ est lisse

REMARQUE. (1) le morphisme $h_R \to F$ correspond biunivoquement à un élément $\xi \in \widehat{F}(R)$.

(2) le morphisme $\Gamma_L \to \Gamma_M$ défini ci-dessus est une enveloppe de Γ_M

PROPOSITION 4.9 ([16, prop. 2.9]). *Soient $\xi : h_R \to F$ et $\xi' : h_{R'} \to F$ deux enveloppes de F. Alors il existe un isomorphisme (non canonique) $u : R \to R'$ tel que $\widehat{F}(u)(\xi) = \xi'$.*

On uilisera le lemme de SCHLESSINGER suivant

LEMME 4.10. [16, Lemma 1.1] *Soit $u : R \to S$ un morphisme dans $\widehat{\mathcal{C}'_\Lambda}$. Alors $R \to S$ surjectif $\iff T^\vee_{R/k} \to T^\vee_{S/k}$ surjectif.*

DÉMONSTRATION. On a $T^\vee_{R/k} = \mathfrak{m}_R/(\mathfrak{m}_R^2 + \mathfrak{m}_\Lambda R)$, $T^\vee_{S/k} = \mathfrak{m}_S/(\mathfrak{m}_S^2 + \mathfrak{m}_\Lambda S)$. On a un diagramme (cf. la suite (5) de la section 3.1)

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathfrak{m}_\Lambda R/\mathfrak{m}_\Lambda R \cap \mathfrak{m}_R^2 \arrow[r] \arrow[d] & \mathfrak{m}_R/\mathfrak{m}_R^2 \arrow[r] \arrow[d] & T^\vee_{R/k} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathfrak{m}_\Lambda S/\mathfrak{m}_\Lambda S \cap \mathfrak{m}_S^2 \arrow[r] & \mathfrak{m}_S/\mathfrak{m}_S^2 \arrow[r] & T^\vee_{S/k} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

où les lignes sonts exactes, et les carrés commutatifs. La flèche verticale de gauche est surjective, comme les objets sont les images de $\mathfrak{m}_\Lambda/\mathfrak{m}_\Lambda^2 \to \mathfrak{m}_R/\mathfrak{m}_R^2$ resp. de $\mathfrak{m}_\Lambda/\mathfrak{m}_\Lambda^2 \to \mathfrak{m}_S/\mathfrak{m}_S^2$. Donc :

$$T^\vee_{R/k} \to T^\vee_{S/k} \text{ surjectif } \iff \mathfrak{m}_R/\mathfrak{m}_R^2 \to \mathfrak{m}_S/\mathfrak{m}_S^2 \text{ surjectif}$$

Ce qui équivaut à $R \to S$ surjectif d'après BOURBAKI [2, III, §2, cor. 2 du th. 1], car le diagramme commutatif à lignes exactes

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{m}_R/\mathfrak{m}_R^2 \otimes_k \mathfrak{m}_R^n/\mathfrak{m}_R^{n+1} \arrow[r] \arrow[d] & \mathfrak{m}_R^{n+1}/\mathfrak{m}_R^{n+2} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
\mathfrak{m}_S/\mathfrak{m}_S^2 \otimes_k \mathfrak{m}_S^n/\mathfrak{m}_S^{n+1} \arrow[r] & \mathfrak{m}_S^{n+1}/\mathfrak{m}_S^{n+2} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

nous montre, en raisonnant par récurrence sur n, que $\mathfrak{m}_R/\mathfrak{m}_R^2 \to \mathfrak{m}_S/\mathfrak{m}_S^2$ surjectif implique $\mathrm{gr}_n(u) : \mathfrak{m}_R^n/\mathfrak{m}_R^{n+1} \to \mathfrak{m}_S^n/\mathfrak{m}_S^{n+1}$ surjectif, donc $\mathrm{gr}(u)$ surjectif, et on peut appliquer loc.cit. □

DÉMONSTRATION. *Montrons la proposition 4.9*

D'après la proposition 4.7, (1) il existe $u : R \to R'$ et $u' : R' \to R$ tels que $\widehat{F}(u)(\xi) = \xi'$ et $\widehat{F}(u')(\xi') = \xi$ et induisant tous deux un morphisme sur les espaces tangents, par définition des enveloppes. Alors $u'u$ induit un morphisme de T_{h_R}. Le lemme montre que $u'u$ est surjectif. R est noethérien donc $u'u$ est un isomorphisme. De même, uu' est un isomorphisme. □

REMARQUE. On en déduit que Γ_M pro-représentable $\iff M$ est libre, puisque $\Gamma_L \to \Gamma_M$ est une enveloppe de Γ_M.

PROPOSITION 4.11 ([16, rem. 2.10]). *Soit (R, ξ) une enveloppe de F. Alors les conditions suivantes sont équivalentes*

(1) R est un anneau de séries formelles sur Λ

(2) F transforme les surjections en surjections

DÉMONSTRATION. Résulte de la proposition 4.7, (2) et (3). □

4.3. Le critère de SCHLESSINGER.

DÉFINITION 4.12. *Soit $p : B \to A$ une surjection dans $\mathcal{C}'_\Lambda$. On dit que p est* essentielle *si: Pour tout $q : C \to B$ dans $\mathcal{C}'_\Lambda$ tel que $p \circ q$ soit surjectif, q est surjectif.*

LEMME 4.13 ([16, Lemma 1.4]). *Soit $p : B \to A$ une surjection dans $\mathcal{C}'_\Lambda$.*

(1) p est essentielle $\iff T^\vee_{h_B} \simeq T^\vee_{h_A}$

(2) *Si p est un épimorphisme simple :*
p n'est pas essentielle $\iff$ p a une section $\sigma : A \to B$

DÉMONSTRATION. (1) Si $T^\vee_{h_B} \xrightarrow{\sim} T^\vee_{h_A}$, le lemme de SCHLESSINGER 4.10 entraîne que p est essentielle.

Si p est essentielle: soit $\{\bar{t_1}, \dots, \bar{t_r}\}$ uns base de $T^\vee_A$. On relève les $\bar{t_i}$ en $t_i \in B$. Soit $C = \Lambda[t_1, \dots, t_r]$ la sous Λ-algèbre de B engendrée par les t_i. Alors p induit une surjection de C sur A, donc si p est essentielle $C = B$. Alors: $\dim_k(T^\vee_{h_B}) \leq r = \dim_k(T^\vee_A)$, donc $T^\vee_{h_B} \xrightarrow{\sim} T^\vee_{h_A}$

(2) Si p a une section σ, on a $B \xrightarrow{\sim} A \oplus k[J]$ où $J = \mathrm{Ker}(p)$, alors σ n'est pas surjective donc p n'est pas essentielle.

Si p n'est pas essentielle, $T^\vee_{h_B}$ n'est pas isomorphe à $T^\vee_{h_A}$. L'anneau C construit ci-dessus est différent de B, donc est isomorphe à A car la longueur est $\ell_\Lambda(B) = \ell_\Lambda(A) + 1$. Alors $C \xrightarrow{\sim} A$ donne une section. □

THÉORÈME 4.14 (SCHLESSINGER [16, Th. 2.11]). *Soit $F : \mathcal{C}'_\Lambda \to \mathcal{E}ns$ un foncteur tel que $F(k)$ soit réduit à un seul point. Soient $A' \to A$ et $A'' \to A$ des morphismes dans $\mathcal{C}'_\Lambda$. Soit l'application canonique*

$$F(A' \times_A A'') \to F(A') \times_{F(A)} F(A'') \tag{S}$$

(1) *F a une enveloppe si et seulement si il vérifie H_1, H_2, H_3 ci-dessous:*
   (H_1) (S) *est surjective si $A'' \to A$ est un épimorphisme simple*
   (H_2) (S) *est bijective si $A = k$ et si $A'' = k[\varepsilon]$*
   (H_3) $\dim_k T_{F/k} < \infty$

(2) *F est pro-représentable par une algèbre noethérienne si et seulement si F vérifie H_1, H_2, H_3 ainsi que*

$$F(A' \times_A A') \xrightarrow{\sim} F(A') \times_{F(A)} F(A') \tag{H_4}$$

pour tout épimorphisme simple $A' \to A$.

REMARQUE. (1) H_2 implique que pour tout espace vectoriel V de dimension finie $F(k[V])$ est canoniquement muni d'une structure d'espace vectoriel telle que $T_F \otimes_k V \xrightarrow{\sim} F(k[V])$ (voir la prop. 3.4 en section 3.2), de plus $\forall\, V \quad F(k[V])$ est de dimension finie (H_3).

(2) H_1 entraîne par récurrence que pour toute surjection $A'' \to A$ l'application (S) est surjective

(3) Conséquences géométriques des propriétés H_1

Soit $p : A' \to A$ surjectif, I son noyau. Supposons $\mathfrak{m}_{A'} I = 0$ (par exemple si p est *simple*). Alors $A' \times_A A' \xrightarrow{\sim} A' \times k[I]$ par $(x, y) \mapsto (x, x_0 \oplus (y - x))$ où $x_0 =$ classe de x dans k. On en déduit une flèche canonique

$$F(A') \times (T_F \otimes_k I) \longrightarrow F(A') \times_{F(A)} F(A')$$

Par composition avec la seconde projection on en déduit une application

$$F(A') \times (T_F \otimes_k I) \xrightarrow{u} F(A')$$

compatible avec la projection dans $F(A)$.

Il résulte facilement de la définition de l'addition dans T_F, que u définit une opération canonique du groupe $T_F \otimes_k I$ sur les fibre du morphisme $F(A') \to F(A)$.

La condition H_1 entraîne alors que $T_F \otimes_k I$ opère *transitivement* sur chaque fibre. La condition H_4 équivaut au fait que $T_F \otimes_k I$ opère sans points fixes.

La conjonction de H_1 et H_4 entraîne donc que $T_F \otimes_k I$ opère librement et transitivement sur les fibres de $F(A') \to F(A)$, autrement dit ces fibres sont vides ou bien des espaces principaux homogènes sous le groupe $T_F \otimes_k I$.

Démonstration. A – *Ces conditions sont nécessaires:*

Si F est pro-représentable par une algèbre noethérienne, F vérifie H_1, H_2, H_3, H_4 car il est exact à gauche.

Si F a une enveloppe $h_R \to F$ où $R \in \widehat{\mathcal{C}'_\Lambda}$, le foncteur h_R vérifie les quatre condition H_i et F vérifie H_3 car $T_{h_R} \xrightarrow{\sim} T_F$.

1) Montrons que F vérifie H_1.

On sait que $h_R \to F$ est surjectif (prop. 4.7, (1)). On a un diagramme commutatif d'ensembles:

$$\begin{tikzcd} h_R(A' \times_A A'') \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "f"'] & h_R(A') \times_{h_R(A)} h_R(A'') \arrow[d, "g"] \\ F(A' \times_A A'') \arrow[r] & F(A') \times_{F(A)} F(A'') \end{tikzcd}$$

il suffit de montrer que g est surjectif.

Soient $\eta' \in F(A')$ et $\eta'' \in F(A'')$ ayant même image $\eta \in F(A)$. Il existe alors $\xi' \in h_R(A')$ dont l'image dans $F(A')$ est η'. Soit $\xi \in h_R(A)$ l'image de ξ'. Par lissité, il existe $\xi'' \in h_R(A'')$ dont l'image dans $h_R(A)$ est égale à ξ, et dont l'image dans $F(A'')$ est η''. Alors $g(\xi', \xi'') = (\eta', \eta'')$.

2) Montrons que F vérifie H_2.

Supposons que $A'' = k[\varepsilon]$ et $A = k$. On a vu que l'application (S) était surjective. Montrons qu'elle est injective. On a le diagramme commutatif:

$$\begin{tikzcd} h_R(A' \times_k k[\varepsilon]) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] & h_R(A') \times T_{h_R} \arrow[d] \\ F(A' \times_k k[\varepsilon]) \arrow[r] & F(A') \times T_F \end{tikzcd}$$

Soient $\zeta_1, \zeta_2 \in F(A' \times_k k[\varepsilon])$ ayant même projections $\eta' \in F(A')$ et $\eta'' \in T_F$ respectivement. L'application $h_R(A' \times_k k[\varepsilon]) \to F(A' \times_k k[\varepsilon]) \times_{F(A')} h_R(A')$ est surjective par lissité.

Soit $\xi' \in h_R(A')$ qui relève η'. Il existe u_1 et u_2 dans $h_R(A' \times_k k[\varepsilon])$, d'images ζ_1 et ζ_2 dans $F(A' \times_k k[\varepsilon])$ et d'image ξ' dans $h_R(A')$. Alors u_1 et u_2 ont pour image (ξ', η'') dans $h_R(A') \times T_R$, donc $\zeta_1 = \zeta_2$.

B – *Ces conditions sont suffisantes:*

1) Supposons que F vérifie H_1, H_2, H_3. D'après H_2 le foncteur F a un espace tangent T_F muni canoniquement d'une structure d'espace vectoriel sur k de dimension finie $r = \dim_k T_F$ d'après H_3. Alors $T_F = \coprod_{i=1}^{r} t'_i$ où les t'_i sont des espaces vectoriels de dimension 1 ; soit $t_i = t_i'^{\vee}$ l'espace dual pour $i = 1, \ldots, r$. Soit $S = \Lambda[[T_1, \ldots, T_r]]$ d'idéal maximal $\mathfrak{m}_S$. On va construire une enveloppe R de F, où R sera un quotient de S (limite projective de quotients successive de S).

Commençons par $R_1 = S/\mathfrak{m}_S = k$. Alors $F(R_1)$ est un ensemble à un élément, d'où un et un seul morphisme $h_{R_1} \xrightarrow{\xi_1} F$.

Soit $R_2 = S/(\mathfrak{m}_S^2 + \mathfrak{m}_\Lambda S) \xrightarrow{\sim} k[\oplus_{i=1}^r t_i] \in \mathcal{C}'_\Lambda$. La restriction de F aux algèbres du type $k[V]$ est repésentable par $T_F^\vee = \oplus_i t_i$ (voir le §3.2) donc $F(R_2) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_k(\oplus_i t_i, \oplus_i t_i)$. Si on prend dans $F(R_2)$ l'élément correspondant à l'identité de $\oplus_i t_i$, il définira un morphisme $h_{R_2} \xrightarrow{\xi_2} F$ qui induit un isomorphisme des espaces tangents. On posera $J_2 = \mathfrak{m}_S^2 + \mathfrak{m}_\Lambda S$. J_2 est de codimension finie dans S.

Supposons obtenus pour $1 \leq \nu \leq n$ des idéaux J_ν de S de codimension finie et des morphismes $\xi_\nu : h_{R_\nu} \to F$, tels que $\mathfrak{m}_S J_{\nu-1} \subset J_\nu \subset J_{\nu-1}$ et tels que $\xi_{\nu-1} : h_{R_{\nu-1}} \to F$ se prolonge en $h_{R_\nu} \xrightarrow{\xi_\nu} F$. Alors $S/J_{\nu-1} \to S/J_\nu$ est surjective, son noyau est annulé par $\mathfrak{m}_S$, ce qui permettra d'appliquer H_1 à l'aide de la remarque (3) ci-dessus. Soit $\mathcal{J}$ l'ensemble idéaux J de S tels que $\mathfrak{m}_S J_n \subset J \subset J_n$ et $\xi_n : h_{R_n} \to F$ se prolonge en $h_{S/J} \to F$; alors J est de codimension finie, car il contient $\mathfrak{m}_S^{n+1}$.

Notons que les idéaux $J \in \mathcal{J}$ correspondent à des sous-espaces vectoriels du k-espace vectoriel de dimension finie $J_n/\mathfrak{m}_S J_n$. En particulier toute suite décroissante d'éléments de $\mathcal{J}$ est stationnaire et pour voir que $\mathcal{J}$ possède un plus petit élément, il suffit de voir que $\mathcal{J}$ est stable par intersection. Or soient $J, K \in \mathcal{J}$, et montrons que $J \cap K \in \mathcal{J}$. Quitte à agrandir J, on peut sans changer $J \cap K$, supposer que $J + K = J_n$. Alors on a $S/(J \cap K) \xrightarrow{\sim} S/J \times_{S/J_n} S/K$. Compte tenu de H_1, $J \cap K \in \mathcal{J}$.

Soit $J_{n+1} = \bigcap_{J \in \mathcal{J}} J$ et $\xi_{n+1} : S/J_{n+1} \to F$ un proplongement de ξ_n.

Soit $J_\infty = \bigcap_n J_n$ et $R = S/J_\infty$ qui est muni d'une famille d'idéaux J_n/J_∞, qui définissent une topologie sur R.

$\forall\, n \in \mathbf{N} \quad J_n \supset \mathfrak{m}_S^n$, donc R_n est artinien et par suite, pour tout n, il existe r_n tel que $J_{n+1} \supset J_n^{r_n}$, donc J_{n+1} contient une puissance de $\mathfrak{m}_S$; donc R, muni de cette topologie est le quotient topologique de S et est séparé complet (et noethérien).

2) $h_R \xrightarrow{\xi} F$ est une enveloppe. (ξ étant défini par la famille $(\xi_n)_{n \in \mathbf{N}}$). Par construction $T_{h_R} \xrightarrow{\sim} T_F$. Montrons que ξ est lisse. Soit $A' \xrightarrow{p} A$ un épimorphisme simple de noyau I. Montrons :

$$h_R(A') \to h_R(A) \times_{F(A)} F(A')$$

est surjectif. Soit $\eta' \in F(A')$, η son image dans $F(A)$ et $u \in h_R(A)$ d'image η. u correspond à un morphisme continu $R \xrightarrow{u} A$.

Supposons qu'il existe un morphisme continu $R \xrightarrow{u'} A'$ tel que $p \circ u' = u$. $T_F \otimes_k I$ opérant transitivement sur $F(p)^{-1}(\eta)$ (resp. $h_R(p)^{-1}(u)$), il existe $\sigma \in T_F \otimes_k I$ tel que $F(u')(\xi)^\sigma = \eta'$. Alors $v' = (u')^\sigma$ répond à la question: $F(v')(\xi) = \eta', p \circ v' = u$. Montrons qu'il existe u' comme ci-dessus.

Il existe n tel que u soit le composé $R \to R_n = S/J_n \xrightarrow{u_n} A$ avec $\xi_n(u_n) = \eta$. Il suffira donc de compléter le diagramme:

$$\begin{tikzcd} R_{n+1} \arrow[r, dashed] \arrow[d] & A' \arrow[d, "p"] \\ R_n \arrow[r, "u_n"] & A \end{tikzcd}$$

c'est-à-dire le diagramme

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "w"] \arrow[d] & R_n \underset{A}{\times} A' \arrow[d, "pr_1"] \\ R_{n+1} \arrow[r] \arrow[ur, dashed, "v"] & R_n \end{tikzcd}$$

w étant choisi pour rendre le carré commutatif (h_S est lisse). p est un épimorphisme simple, donc $pr_1 : R_n \times_A A' \to R_n$ est un épimorphisme simple. Alors: si pr_1 a une section, v existe évidemment.

Si pr_1 n'a pas de section, par le lemme (4.13) pr_1 est essentiel. Comme $pr_1 \circ w$ est surjectif, w est surjectif. Donc $S/\operatorname{Ker} w \xrightarrow{\sim} R_n \times_A A'$. On a evidemment $\mathfrak{m}_S J_n \subset \operatorname{Ker} w \subset J_n$, comme $w(\mathfrak{m}_S J_n) = \mathfrak{m}_S w(J_n) \subset \mathfrak{m}_{A'} I = 0$. De plus $\xi_n : h_{R_n} \to F$ se relève à $S/\operatorname{Ker} w \xrightarrow{\sim} R_n \times_A A'$, ce qui se voit en appliquant H_1 à $R_n \times_A A'$. Donc $\operatorname{Ker} w \in \mathcal{J}$ et par contruction $\operatorname{Ker} w \supset J_{n+1}$ et w se factorise par R_{n+1}.

3) Si de plus F vérifie H_4, h_R est isomorphe à F. On prouve $h_R(A) \xrightarrow{\sim} F(A)$ par récurrence sur la longueur de A. Soit $p : A' \to A = A'/I$ un épimorphisme simple. Par lisseté, $h_R(A') \to F(A')$ est surjectif. On suppose $h_R(A) \xrightarrow{\sim} F(A)$. Pour tout $\eta \in F(A)$ $T_F \otimes_k I$ opère sans point fixe sur $h_R(p)^{-1}(\eta)$ et sur $F(p)^{-1}(\eta)$ donc $h_R(A') \to F(A')$ est injective. $\square$

4.4. Relations entre pro-représentabilité et représentabilité de la diagonale. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie, $F, G : \mathcal{C}^\circ \to \mathcal{E}ns$ deux foncteurs.

DÉFINITION 4.15. *Si $u, v : G \to F$ sont deux morphismes, le foncteur des coïncidences de u et v est le sous-foncteur $G_{u,v}$ de G défini comme suit: Pour tout objet T de $\mathcal{C}$*

$$G_{u,v}(T) = \{t \in G(T) | u \circ t = v \circ t\}$$

Autrement dit, c'est le noyau du double flèche: $G_{u,v} = \operatorname{Ker}(\ G \overset{u}{\underset{v}{\rightrightarrows}} F\ )$.

PROPOSITION 4.16. *Soit $F : \mathcal{C}'_\Lambda \to \mathcal{E}ns$. Alors la diagonale de F est représentable si et seulement si, pour tout $R \in \widehat{\mathcal{C}'_\Lambda}$ et tout couple de morphismes $h_R \overset{\xi_1}{\underset{\xi_2}{\rightrightarrows}} F$ le foncteur noyau est pro-représentable par $K \in \widehat{\mathcal{C}'_\Lambda}$.*

DÉMONSTRATION. $\Longrightarrow$: Si F est relativement représentable $h_R \overset{\xi_1}{\underset{\xi_2}{\rightrightarrows}} F$ correspont à $(\xi_{1,n})_{n \in N}$ et $(\xi_{2,n})_n \in \varprojlim F(R/\mathfrak{m}_R^n)$ et les couples $h_{R/\mathfrak{m}_R^n} \overset{\xi_{1,n}}{\underset{\xi_{2,n}}{\rightrightarrows}} F$ ont des noyaux K_n appartenant à $\mathcal{C}'_\Lambda$. Alors le système projectif des K_n admet une limite projective dans $\widehat{\mathcal{C}'_\Lambda}$ qui pro-représente $\operatorname{Ker}(\xi_1, \xi_2)$.

$\Longleftarrow$: Si F vérifie la condition ci-dessus et si $A \in \mathcal{C}'_\Lambda$ et $h_A \rightrightarrows F$ est un couple de morphismes, le noyau de ce couple est un élément de $\widehat{\mathcal{C}'_\Lambda}$, qui est un sous objet de A, donc appartient à $\mathcal{C}'_\Lambda$. $\square$

THÉORÈME 4.17. *Soit $F : \mathcal{C}'_\Lambda \to \mathcal{E}ns$ un foncteur admettant une enveloppe (R, ξ). Alors: F est pro-représentable $\Longleftrightarrow$ la diagonale de F est représentable*

DÉMONSTRATION. $\Longrightarrow$: Si F est pro-représentable, sa diagonale est représentable.

$\Longleftarrow$: Le foncteur $h_R \underset{h_\Lambda}{\times} h_R$ est exact à gauche, donc pro-représentable et est muni de deux flèches $h_R \underset{h_\Lambda}{\times} h_R \rightrightarrows F$. Alors

$$h_R \times_F h_R = \operatorname{Ker}(h_R \underset{h_\Lambda}{\times} h_R \rightrightarrows F)$$

est pro-représenté par $S \in \widehat{\mathcal{C}'_\Lambda}$ et $h_S \to h_R$ est lisse (prop. 4.7).

$$h_S(k[\varepsilon]) = h_R(k[\varepsilon]) \underset{F(k[\varepsilon])}{\times} h_R(k[\varepsilon]) = T_{h_R} = T_F$$

donc $T_{h_S} \xrightarrow{\sim} T_{h_R}$. Donc $h_S \to h_R$ est une enveloppe, donc $S \xrightarrow{\sim} R$ (prop. 4.9).

Soit Δ le morphisme diagonal: $h_R \longrightarrow h_S \overset{\sim}{\underset{\sim}{\rightrightarrows}} h_R$. Δ est surjectif, donc $h_R \to F$ est injectif, donc bijectif. □

4.5. Le critère de Grothendieck.

Définition 4.18. *Dans $\mathcal{C}_\Lambda$ on appelle* monomorphisme simple *tout monomorphisme qui ne peut se décomposer en deux monomorphismes non triviaux.*

Autrement dit $A \xrightarrow{u} B$ est un monomorphisme simple si c'est une injection et s'il n'existe pas A' strictement inclus entre $u(A)$ et B.

Théorème 4.19 (Grothendieck). *Soit $F : \mathcal{C}_\Lambda \to \mathcal{E}ns$ un foncteur. Alors: « F pro-représenté par une algèbre topologique dont les composants locaux sont des algèbres locales nothériennes complètes » est équivalent à*

(1) F commute aux produits finie

(2) Si $A \to B$ est un morphisme de $\mathcal{C}_\Lambda$ avec A local et si B est fidèlement plat sur A, la suite d'ensembles

(G) $$F(A) \to F(B) \rightrightarrows F(B \otimes_A B)$$

est exacte.

(3) Si A est local et si $A \to B$ est un monomorphisme simple à extensions résiduelles triviales, la suite (G) est exacte.

(4) Si $\Lambda \to \Lambda'$ est un morphisme fini local libre avec Λ' local dans $\mathcal{C}_\Lambda$, si F' est la restriction de F à $\mathcal{C}'_{\Lambda'}$, sous les conditions ci-dessus $T_{F'}$ est un espace vectoriel sur le corps résiduel k' de Λ'. Alors $\dim_{k'} T_{F'} < \infty$

Démonstration. $\Longrightarrow$: Necessité

(1) évident ; (2) et (3): la suite $A \longrightarrow B \rightrightarrows B \otimes_A B$ est exacte dans le cas (2) par fidèle platitude. Dans le cas (3) car le noyau des deux flèches est distinct de B et contient A, donc est égal à A. (4) évident.

$\Longleftarrow$: Ces conditions sont suffisantes

Les conditions (1) et (3) du théorème de pro-représentabilité 4.1 sont vérifiées, grâce à (1) et (2) ci-dessus. Reste à verifier (2) du théorème 4.1: la restriction de F à $\mathcal{C}'_{\Lambda'}$ est exacte à gauche pour toute extension $\Lambda \to \Lambda'$ finie, locale et plate. Pour celà on va utiliser le critère de Schlessinger, théorème 4.14. On peut supposer que $\Lambda' = \Lambda$ puisque seule intervient la catégorie $\mathcal{C}'_{\Lambda'}$.

La condition (3) ci-dessus entraîne que F transforme les injections en injections, car toute injection est composé d'un nombre fini de monomorphismes simples. Ceci implique que l'application (S) $F(A' \times_A A'') \to F(A') \times_{F(A)} F(A'')$ est toujours injectif, car le composé avec l'injection $F(A') \times_{F(A)} F(A'') \subset F(A') \times F(A'')$ est injectif, par $A' \times_A A'' \subset A' \times A''$.

Ceci entraîne déjà que la condition H_1 implique les conditions H_2 et H_4.

Il suffit de montrer H_1 si $A' \to A$ est un monomorphisme simple et $A'' \to A$ un épimorphisme simple. En effet H_1 sera vrai pour toute injection $A' \to A$; pour toute surjection $A' \to A$ on aura $A' \underset{A}{\times} A'' \xrightarrow{\sim} A \underset{A\times A}{\times} (A' \times A'')$ avec $\Delta : A \to A \times A$ le morphisme diagonale et $A' \times A'' \to A \times A$ l'application canonique déduite de $A' \to A$ et $A'' \to A$. Alors, Δ est une injection et $A' \times A'' \to A \times A$ une surjection. Donc: $F(A' \times_A A'') \to F(A) \underset{F(A)\times F(A)}{\times} (F(A') \times F(A''))$ est surjectif, ce qui signifie que $F(A' \times_A A'') \to F(A') \times_{F(A)} F(A'')$ est surjectif.

Montrons donc que H_1 est vérifié si $A' \to A$ est un monomorphisme simple et $A'' \to A$ un épimorphisme simple, de noyau J. On a le diagramme commutatif, où on a posé $D = A' \times_A A''$:

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[r, "u'"] \arrow[d, "p'"'] & A'' \arrow[r, shift left, "i'_1"] \arrow[r, shift right, "i'_2"'] \arrow[d, "p"'] & A'' \otimes_D A'' \arrow[r] \arrow[d, "f"] & A'' \arrow[d, "p"] \\
A' \arrow[r, "u"] & A \arrow[r, shift left, "i_1"] \arrow[r, shift right, "i_2"'] & A \otimes_{A'} A \arrow[r] & A
\end{tikzcd}$$

$p' : D \to A'$ est un épimorphisme, $u' : D' \to A''$ est un monomorphisme simple.

Prouvons $\operatorname{Ker} f \xrightarrow{\sim} J$. En effet, $D \to A'$ est surjectif donc $A \otimes_{A'} A \xrightarrow{\sim} A \otimes_D A$ et f est surjectif. Le noyau $\operatorname{Ker} f$ = idéal engendré par les images de $J \otimes_D A''$ et $A'' \otimes_D J$. Soit $z \in \operatorname{Ker} f, z = \sum_{i=1}^n b_i \otimes b'_i$ avec soit $b_i \in J$, soit $b'_i \in J$.

Soit $x \in A'', y \in J$; et soit $(0, y) \in D$ l'élément correspondant à y ; dans $A'' \otimes_D A''$ on aura $x \otimes y = x \otimes (0, y) \cdot 1 = (0, y) \cdot x \otimes 1 = xy \otimes 1 = (0, xy) \cdot 1 \otimes 1$, donc $z = \sum_{i=1}^n b_i \otimes b'_i = (\sum b_i b'_i) \otimes 1$ avec $\sum b_i b'_i \in J$, d'où une application de $\operatorname{Ker} f$ dans J, bijective et qui est $A'' \otimes_D A''$ linéaire si on munit A'' de la structure de $A'' \otimes_D A''$ module définie par l'application diagonale $x \otimes y \mapsto x \cdot y$ (multiplication). Le carré de droite est donc cartésien par $\operatorname{Ker} f \simeq J$, c'est-à-dire: $A'' \otimes_D A'' \xrightarrow{\sim} (A \otimes_{A'} A) \underset{A}{\times} A''$.

Soient alors $(\alpha', \alpha'') \in F(A') \times_{F(A)} F(A'')$ ayant pour image $\alpha \in F(A)$, alors $F(i_1)(\alpha) = F(i_2)(\alpha) = \gamma \in F(A \otimes_{A'} A)$. Soient $\eta'_1 = F(i'_1)(\alpha'')$ et $\eta'_2 = F(i'_2)(\alpha'')$, éléments de $F(A'' \otimes_D A'')$, dont l'image dans $F(A'')$ est α'' et dans $F(A \otimes_{A'} A)$ est γ. Or, l'application $F(A'' \otimes_D A'') \to F(A \otimes_{A'} A) \times_{F(A)} F(A'')$ est *injective*, donc $\eta'_1 = \eta'_2$. Par conséquent (appliquant (3): (G) est exacte) il existe $\delta \in F(D)$ tel que $F(u')(\delta) = \alpha''$; u étant injective, on en déduit que $F(p')(\delta) = \alpha'$, d'où le résultat. □

5. Applications du critère de Schlessinger

5.1. Foncteur Quot **et foncteur de Hilbert.** Soit S un schéma ; $X \to S$ un schéma au-dessus de S ; $\mathcal{F}$ un Module quasi cohérent sur X. On désigne par $\operatorname{Quot}(\mathcal{F}/X/S)$ l'ensemble des $\mathcal{O}_X$-Modules quasi-cohérents, quotients de $\mathcal{F}$ et plats sur S.

Si $S' \to S$ est un morphisme de schémas, notant $X' = X \times_S S'$ et $\mathcal{F}' = \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_{S'}$ l'image réciproque de $\mathcal{F}$ par $X' \to X$, $\mathcal{F}'$ est un Module quasi-cohérent sur X'.

On définit le foncteur

$$\mathrm{Quot}_{\mathcal{F}/X/S} : (\mathcal{S}ch/S)^\circ \longrightarrow \mathcal{E}ns \quad \text{par}$$
$$\mathrm{Quot}_{\mathcal{F}/X/S}(S') = \mathrm{Quot}(\mathcal{F}'/X'/S')$$

Pour tout S-morphisme $S'' \to S'$, $X'' = X \times_S S''$ est isomorphe à $X' \times_{S'} S''$ et $\mathcal{F}'' = \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_{S''}$ à $\mathcal{F}' \otimes_{\mathcal{O}_{S'}} \mathcal{O}_{S''}$; comme la platitude est stable par changement de base et le foncteur image réciproque est exact à droite, on a une application naturelle :

$$\mathrm{Quot}_{\mathcal{F}/X/S}(S') \longrightarrow \mathrm{Quot}_{\mathcal{F}/X/S}(S'')$$

$\mathrm{Quot}_{\mathcal{F}/X/S}$ est un faisceau fpqc par la proposition 4.1 du §4.1 du chap. 5. Pour $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X$ on obtient le *foncteur de* Hilbert. Alors $\mathrm{Hilb}_{X/S}(S') = \mathrm{Quot}_{\mathcal{O}_X/X/S}(S')$ est l'ensemble des sous-schémas fermés de X' plats sur S'.

On suppose maintenant $S = \operatorname{Spec} \Lambda$ ou Λ est un anneau local noethérien complet de corps résiduel k. $\mathcal{C}'_\Lambda$ est la catégorie de Λ-algèbres locales de longueur finie à extensions triviale. On notera X_A pour $X \times_{\operatorname{Spec}\Lambda} \operatorname{Spec} A$ et $\mathcal{F}_A$ pour $\mathcal{F} \otimes_\Lambda A$, $A \in \mathcal{C}'_\Lambda$. Soit e un élément de $\mathrm{Quot}_{\mathcal{F}/X/S}(\operatorname{Spec} k)$ fixé une fois pour toutes et $Q_e(A)$ le sous-ensemble de $\mathrm{Quot}_{\mathcal{F}/X/S}(\operatorname{Spec} A)$ image réciproque de e par l'application canonique

$$\mathrm{Quot}_{\mathcal{F}/X/S}(\operatorname{Spec} A) \longrightarrow \mathrm{Quot}_{\mathcal{F}/X/S}(\operatorname{Spec} k)$$

Q_e est un foncteur covariant $\mathcal{C}'_\Lambda \to \mathcal{E}ns$. Sous certaines conditions Q_e est pro-représentable, plus précisément:

Théorème 5.1. *Si X est propre sur S et $\mathcal{F}$ cohérent sur X, alors Q_e est pro-représentable par une Λ-algèbre noethérienne.*

Pour la démonstration nous aurons besoin de quelques lemmes.

Lemme 5.2. *Soit A un anneau, J un idéal nilpotent de A et $u : M \to N$ un homomorphisme de A-modules, $\bar{u} : M/JM \to N/JN$.*

(1) Si $\bar{u}$ est surjectif, alors u est surjectif

(2) Si N est plat sur A et $\bar{u}$ bijectif, alors u est bijectif.

Démonstration. (1) Soit $K = \operatorname{Coker} u$. En tensorisant la suite exacte

$$M \to N \to K \to 0$$

par A/J on obtient $K/JK = 0$ donc $K = 0$ puisque J est nilpotent.

(2) Posons $L = \operatorname{Ker} u$, par la partie (1) on a une suite exacte

$$0 \to L \to M \to N \to 0$$

la platitude de N entraîne l'exactitude de la suite

$$0 \to L/JL \to M/JM \to N/JN \to 0$$

par Bourbaki [2, I, §2, prop. 4], d'où $L = 0$. □

Remarque. Si A est dans $\mathcal{C}'_\Lambda$, tout module plat est libre puisque l'idéal maximal de A est nilpotent.

LEMME 5.3. *Considérons un diagramme commutatif*

$$\begin{tikzcd}
N \arrow[rr, "p''"] \arrow[dr, "p'"'] \arrow[dd, no head] & & M'' \arrow[dr, "u''"] \arrow[dd, no head] & \\
& M' \arrow[rr, "u'"'] \arrow[dd, no head] & & M \arrow[dd, no head] \\
B \arrow[rr] \arrow[dr] & & A'' \arrow[dr] & \\
& A' \arrow[rr] & & A
\end{tikzcd}$$

d'homomorphismes d'anneaux et de modules compatibles où $B = A' \times_A A''$, $N = M' \times_M M''$ *et* M' *(resp.* M''*) est libre sur* A' *(resp.* A''*). Supposons*

(1) $A''/J \xrightarrow{\sim} A$ *où* J *est un idéal nilpotent de* A''

(2) u' *induit* $M' \otimes_{A'} A \xrightarrow{\sim} M$ *(resp.* u'' *induit* $M'' \otimes_{A''} A \xrightarrow{\sim} M$*)*

Alors N *est plat sur* B, p' *induit* $N \otimes_B A' \xrightarrow{\sim} M'$ *resp.* p'' *induit* $N \otimes_B A'' \xrightarrow{\sim} M''$.

DÉMONSTRATION. On suppose de plus que M' est libre sur A'. Soit $(x'_i)_{i \in I}$ une base de M'. Par (2) M est un A-module libre de base $(u'(x'_i))_{i \in I}$. Soit $x''_i \in M''$ tel que $u''(x''_i) = u'(x'_i)$. On a alors une application $\sum A'' x''_i \to M''$ de A''-module qui modulo J est un isomorphisme par (1). D'où M'' est libre de base $(x''_i)_i$ (lemme 5.2). On en déduit que N est libre de base $(x'_i, x''_i)_i$ et les projections p' et p'' induisent des isomorphismes $N \otimes_B A' \xrightarrow{\sim} M'$ et $N \otimes_B A'' \xrightarrow{\sim} M''$. □

LEMME 5.4. *Avec les notations et hypothèses précédentes, soit* L *un* B*-module et un diagramme commutatif*

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[r, "q''"] \arrow[d, "q'"'] & M'' \arrow[d, "u''"] \\
M' \arrow[r, "u'"'] & M
\end{tikzcd}$$

où q' *induit* $L \otimes_B A' \xrightarrow{\sim} M'$. *Alors* $q' \times q'' : L \to N$ *est un isomorphisme.*

DÉMONSTRATION. En effet, modulo J' noyau de $B \to A'$, $q' \times q''$ est un isomorphisme ; on implique le lemme 5.2. □

LEMME 5.5. *Dans une catégorie abélienne soient* $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$ *une suite exacte,* $A' \to Q$ *un morphisme,* $A'' \to P$ *un épimorphisme de noyau* C. *Soit* E *l'ensemble des quadruplets* (B, f, g, h) *(à un isomorphisme près) tels que*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "u"] \arrow[d] & A \arrow[r, "v"] \arrow[d, "h"] & A'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & Q \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, "g"] & P \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

soit un diagramme commutatif où les lignes sont exactes. Alors

(1) *E est non vide si et seulement si l'image dans* $Ext^1(C, Q)$ *de l'élément* A *de* $Ext^1(A'', A')$ *est nulle.*

(2) *Sous ces conditions,* E *est un ensemble principal homogène sous le groupe abélien* $\mathrm{Hom}(C, Q)$.

Démonstration. Quitte à remplacer l'extension A de A'' par A' par son image dans $Ext^1(C,Q)$ on peut supposer $A' = Q$. (1) résulte de l'exactitude de la suite

$$Ext^1(P,A') \to Ext^1(A'',A') \to Ext^1(C,A')$$

L'ensemble E est évidemment en correspondence binunivoque avec l'ensemble des sous-objets N de A tel que $A \to A''$ induise un isomorphisme $A \xrightarrow{\sim} C$ (lemme du serpent [2, I, §1.4]), i.e. l'ensemble des morphismes $C \to A$ relevant le morphisme canonique $C \to A''$.

On a la suite exacte

$$0 \to \mathrm{Hom}(C,A') \xrightarrow{\bar{u}} \mathrm{Hom}(C,A) \xrightarrow{\bar{v}} \mathrm{Hom}(C,A'')$$

et $E = \bar{v}^{-1}(C \to A'')$. D'où l'assertion (2). □

Remarque. Si la suite exacte $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$ est scindée, E est non vide et est isomophe à $\mathrm{Hom}(C,Q)$.

Démonstration. *du théorème 5.1*

$\mathrm{Spec}\, k \to \mathrm{Spec}\, A$, $A \in \mathcal{C}'_\Lambda$, induit l'identité sur les espaces topologiques sous-jacents. Tous les faisceaux que l'on écrira dans la suite seront des faisceaux sur l'espace topologique X_k.

Soit un diagramme commutatif *cartésien* dans $\mathcal{C}'_\Lambda$

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r] \arrow[d] & A' \arrow[d, "u'"] \\ A'' \arrow[r, "u''"'] & A \end{tikzcd}$$

Nous prétendons que si $u' : A' \to A$ est surjectif, autrement dit $A'/I \xrightarrow{\sim} A$ où I est un idéal nilpotent de A', $\alpha : Q_e(B) \to Q_e(A'') \underset{Q_e(A)}{\times} Q_e(A')$ est une bijection.

En effet, soit J le noyau de $B \to A''$; on a $B/J \xrightarrow{v} A''$ et J est un idéal nilpotent de B. Soient $\mathcal{G}, \mathcal{G}', \mathcal{G}''$ respectivement des quotients quasi-cohérents de $\mathcal{F}_A, \mathcal{F}_{A'}, \mathcal{F}_{A''}$, plats sur S, et des morphismes $\mathcal{G}' \to \mathcal{G}$, $\mathcal{G}'' \to \mathcal{G}$ compatibles avec $\mathcal{O}_{X_{A'}} \to \mathcal{O}_{X_A}$, $\mathcal{O}_{X_{A''}} \to \mathcal{O}_{X_A}$, induisant des isomorphismes $\mathcal{G}' \otimes_{A'} A \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}$, $\mathcal{G}'' \otimes_{A''} A \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}$.

L'homomorphism canonique de $\mathcal{O}_{X_B}$-Modules $\mathcal{F}_B \to \mathcal{G}' \underset{\mathcal{G}}{\times} \mathcal{G}'' = \mathcal{H}$ est un épimorphisme (lemme 5.2): consiérons le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}_B \otimes_B A'' \arrow[r] \arrow[d, "\wr"'] & \mathcal{H} \otimes_B A'' \arrow[d] \\ \mathcal{F}_{A''} \arrow[r] & \mathcal{G}'' \end{tikzcd}$$

Il résulte du lemme 5.3 que $\mathcal{H}$ est plat sur B et que $\mathcal{H} \otimes_B A'' \simeq \mathcal{G}''$ et $\mathcal{H} \otimes_B A' \simeq \mathcal{G}'$, d'où la surjectivité de α. L'injectivité résulte du lemme 5.4.

Reste à verifier la condition de finitude sur l'espace tangent $Q_e(k[\varepsilon])$ où $k[\varepsilon]$ est l'algèbre des nombres duaux sur k. Soit $\bar{\mathcal{G}} = \mathcal{F}_k/\bar{\mathcal{H}}$ le $\mathcal{O}_{X_k}$-Module correspondant à e. Il y a un isomorphisme d'espace vectoriel $Q_e(k[\varepsilon]) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{X_{k[\varepsilon]}}}(\bar{\mathcal{H}}, \varepsilon\bar{\mathcal{G}})$; plus précisément : de la suite exacte scindée $0 \to \varepsilon k[\varepsilon] \to k[\varepsilon] \to k \to 0$ on déduit par tensorisation les suites exactes scindées

$$0 \to \varepsilon\mathcal{O}_{X_{k[\varepsilon]}} \to \mathcal{O}_{X_{k[\varepsilon]}} \to \mathcal{O}_{X_k} \to 0$$
$$0 \to \varepsilon\mathcal{F}_{k[\varepsilon]} \to \mathcal{F}_{k[\varepsilon]} \to \mathcal{F}_k \to 0$$

Soit $\mathcal{G}$ un $\mathcal{O}_{X_{k[\varepsilon]}}$-Module quasi-cohérent et des morphismes f et g compatible avec $\mathcal{O}_{X_{k[\varepsilon]}} \to \mathcal{O}_{X_k}$ tels que le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}_{k[\varepsilon]} \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & \mathcal{F}_k \arrow[d] \\ \mathcal{G} \arrow[r, "g"'] & \bar{\mathcal{G}} \end{tikzcd}$$

soit commutatif. Il est équivalent de dire

— g induit un isomorphisme $\mathcal{G} \otimes_{k[\varepsilon]} k \xrightarrow{\sim} \bar{\mathcal{G}}$ et g est un épimorphisme de noyau $\varepsilon\mathcal{G}$.

— $\mathcal{G}$ est plat sur $k[\varepsilon]$ et $\mathcal{G} \otimes_{k[\varepsilon]} \varepsilon k[\varepsilon] \to \varepsilon\mathcal{G}$ est un isomorphisme

Sous ces conditions $\mathcal{G} \otimes_{k[\varepsilon]} \varepsilon k[\varepsilon] \simeq \bar{\mathcal{G}} \otimes_k \varepsilon k[\varepsilon]$. D'autre part, puisque $\bar{\mathcal{G}}$ est plat sur k, $\bar{\mathcal{G}} \otimes_k \varepsilon k[\varepsilon] \xrightarrow{\sim} \varepsilon\bar{\mathcal{G}}$.

Le résultat cherché se déduit alors de la remarque au lemme 5.5. Enfin les hypothèses du théorème sur X et $\mathcal{G}$ entraînent $\dim_k \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{X_{k[\varepsilon]}}}(\mathcal{H}, \varepsilon\mathcal{G}) < \infty$. $\square$

5.2. Groupes et foncteurs de Picard relatifs. Soit X un schéma. On appelle *groupe de* Picard de X, et l'on note $\mathrm{Pic}(X)$, le groupe des classes à isomorphismes près, de $\mathcal{O}_X$-Modules inversibles (i.e. localement isomorphes à $\mathcal{O}_X$).

Rappelons que l'on a un isomorphisme canonique [11, 0_I, 5.6.3.1]

$$\mathrm{Pic}(X) \xrightarrow{\sim} H^1(X, \mathcal{O}_X^*) \tag{6}$$

où $\mathcal{O}_X^*$ désigne le faisceau des unités de $\mathcal{O}_X$.

$X \mapsto \mathrm{Pic}(X)$ est un foncteur contravariant de la catégorie des schémas dans la catégorie des groupes commutatifs et l'isomorphisme (6) est fonctoriel.

Soient S un schéma, X un S-schéma, T un S-schéma variable. La correspondence $T \mapsto \mathrm{Pic}(X \times_S T)$ définit un foncteur contravariant de la catégorie $\mathcal{S}ch/S$ des S-schémas dans celle des groupes abéliens, donc un préfaisceau sur $\mathcal{S}ch/S$. Le faisceau associé à ce préfaisceau pour la topologie fidèlement plate de présentation finie (fppf) se note $\mathrm{Pic}_{X/S}$ et s'appelle le *foncteur de* Picard *relatif* de X sur S. On appelle *groupe de* Picard *relatif* de X sur S, et l'on note $\mathrm{Pic}(X/S)$ le groupe $\mathrm{Pic}_{X/S}(S)$. Alors, pour tout S-schéma T on a

$$\mathrm{Pic}_{X/S}(T) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Pic}(X \times_S T/T)$$

Explicitons le fait que $\mathrm{Pic}_{X/S}$ est le faisceau associé, pour la topologie fppf, au préfaisceau $T \mapsto \mathrm{Pic}(X \times_S T)$.

Un élément de $\mathrm{Pic}(X/S) = \mathrm{Pic}_{X/S}(S)$ est défini par un élément ξ' d'un groupe $\mathrm{Pic}(X \times_S S')$, où $S' \to S$ est un morphisme fppf, tel que l'on puisse trouver un morphisme fppf $S'' \to S' \times_S S'$ tel que les deux images de ξ' dans $\mathrm{Pic}(X \times_S S'')$ coïncident.

Deux éléments ξ' et ξ'' de $\mathrm{Pic}(X \times_S S')$ définiront le même élément ξ de $\mathrm{Pic}(X/S)$ si l'on peut trouver un morphisme fppf $S'' \to S' \times_S S'$ tel que les images de ξ' et ξ'' dans $\mathrm{Pic}(X \times_S S'')$ coïncident.

5.3. Relations entre groupe de Picard relatifs et absolus. Le théorème suivant permet de décrire dans un cas particulier le groupe de Picard relatif $\mathrm{Pic}(X/S)$ en termes de groupes de Picard absolus.

Théorème 5.6. *Soit $f : X \to S$ un morphisme quasi compact et quasi séparé tel que $\mathcal{O}_S \xrightarrow{\sim} f_*(\mathcal{O}_X)$. Alors:*

(1) *On a une suite exacte de groupes abéliens :*

$$0 \to \operatorname{Pic}(S) \to \operatorname{Pic}(X) \to \operatorname{Pic}(X/S)$$

(2) *Lorsque, de plus, X admet une section sur S, le dernier morphisme de cette suite est surjectif et l'on a donc :*

$$\operatorname{Pic}(X/S) \simeq \operatorname{Pic}(X)/\operatorname{Pic}(S)$$

Démonstration. (1): Le morphisme $\operatorname{Pic}(S) \to \operatorname{Pic}(X)$ provient du morphisme $f : X \to S$ et est injectif. En effet, soient $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}'$ deux $\mathcal{O}_S$-Modules inversibles. Le morphisme canonique $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{L}, \mathcal{L}') \to f_*\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(f^*\mathcal{L}, f^*\mathcal{L}')$ est un isomoprphisme car $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{L}, \mathcal{L}')$ et $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(f^*\mathcal{L}, f^*\mathcal{L}')$ sont inversibles donc localement isomorphes respectivement à $\mathcal{O}_S$ resp. $\mathcal{O}_X$ et d'autre part $f_*\mathcal{O}_X \simeq \mathcal{O}_S$. par conséquent $\operatorname{Hom}_S(\mathcal{L}, \mathcal{L}')$ et $\operatorname{Hom}_X(f^*\mathcal{L}, f^*\mathcal{L}')$ sont isomorphes, ce qui montre que si $f^*\mathcal{L} \xrightarrow{\sim} f^*\mathcal{L}'$, $\mathcal{L}$ est isomorph à $\mathcal{L}'$.

Le morphisme $\operatorname{Pic}(X) \to \operatorname{Pic}(X/S)$ s'obtient en constatant que $\operatorname{Pic}(X/S) = \operatorname{Pic}_{X/S}(S)$ où $\operatorname{Pic}_{X/S}$ est le faisceau associé au préfaisceau $T \mapsto \operatorname{Pic}(X \times_S T)$, qui à S fait correspondre $\operatorname{Pic}(X \times_S S) = \operatorname{Pic}(X)$.

Reste à prouver l'exactitude de la suite en $\operatorname{Pic}(X)$.

Montrons d'abord que $\operatorname{Pic}(S) \to \operatorname{Pic}(X) \to \operatorname{Pic}(X/S)$ est nul. Soit $\mathcal{L}$ un

$$\begin{tikzcd} X & X_U \arrow[l] \arrow[d, "f_U"] \\ S & U \arrow[l] \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} X \arrow[d, "f"'] \\ S \end{tikzcd}$$

$\mathcal{O}_S$-Module inversible, U un ouvert de S tel que $\mathcal{L}|_U \simeq \mathcal{O}_S|_U$ donc $f^*(\mathcal{L})|_{X_U} \simeq f_U^*(\mathcal{L}|_U) \simeq f_U^*(\mathcal{O}_S|_U) \simeq \mathcal{O}_{X_U}$ donc la classe de $f^*(L)_{X_U}$ dans $\operatorname{Pic}(X \times_S U)$ est nul, donc $f^*(\mathcal{L})$ donne 0 quand on prend le faisceau associé à $U \mapsto \operatorname{Pic}(X \times_S U)$ pour la topologie de Zariski, donc à fortiori lorsqu'on prend le faisceau associé pour la topologie fppf.

Réciproquement, soit $\mathcal{L}$ un $\mathcal{O}_X$-Module inversible dont l'image dans $\operatorname{Pic}(X/S)$

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r] \arrow[d, "f'"'] & X \arrow[d, "f"] \\ S' \arrow[r] & S \end{tikzcd}$$

est triviale. Il existe alors un morphisme $S' \to S$ fppf tel que, en posant $X' = X \times_S S'$, $\mathcal{L}$ donne $\mathcal{L}' \simeq \mathcal{O}_{X'}$ au dessus de X' par image réciproque. La propriété $f_*(\mathcal{O}_X) = \mathcal{O}_S$ se conserve par changement de base fidèlement plat, puisque f est quasi-compact et quasi-séparé. Donc $f'_*(\mathcal{O}_{X'}) \simeq \mathcal{O}_{S'}$. Comme $\mathcal{L}' \simeq \mathcal{O}_{X'}$, $f'_*(\mathcal{L}') \simeq \mathcal{O}_{S'}$, donc $f'_*(\mathcal{L}')$ est inversible sur S' et $f'^*(f'_*(\mathcal{L}')) \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}'$ est un isomorphisme. Ces propriétés restant vraie par extension fppf, on en déduit que $f_*(\mathcal{L})$ est inversible sur S et $f^*(f_*(\mathcal{L})) \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}$ est un isomorphisme donc $\mathcal{L}$ provient d'un faisceau inversible sur S, donc appartient à un élément de l'image de $\operatorname{Pic}(S) \to \operatorname{Pic}(X)$, ce qui achève la démonstration.

(2): Supposons à présent que $f : X \to S$ admette une section g. Soit $\mathcal{L}$ un $\mathcal{O}_X$-Module inversible. On appelle *g-rigidification* de $\mathcal{L}$ un isomorphisme $\alpha : \mathcal{O}_S \xrightarrow{\sim} g^*(\mathcal{L})$. Un *$\mathcal{O}_X$-Module inversible g-rigidifé* est un couple $(\mathcal{L}, \alpha)$, où $\mathcal{L}$ est un $\mathcal{O}_X$-Module inversible et α une g-rigidification de $\mathcal{L}$. Un morphisme de $\mathcal{O}_X$-Modules inversibles g-rigidifiés $(\mathcal{L}, \alpha)$ et $(\mathcal{M}, \beta)$ est un morphisme $\varphi : \mathcal{L} \to \mathcal{M}$ tel que le diagramme soit commutatif.

$$\begin{tikzcd} g^*(\mathcal{L}) \arrow[rr, "g^*(\varphi)"] & & g^*(\mathcal{M}) \\ & \mathcal{O}_S \arrow[ul, "\alpha"] \arrow[ur, "\beta"'] & \end{tikzcd}$$

Si $f_*(\mathcal{O}_X) \simeq \mathcal{O}_S$ on voit immédiatement que tout automorphisme d'un $\mathcal{O}_X$-Module inversible g-rigidifié est l'identité.

Démontrons à présent le (2) du théorème 5.6.

Un point de $\mathrm{Pic}(X/S)$ provient d'un $\mathcal{O}_{X'}$-Module inversible $\mathcal{L}'$, où $X' = X \times_S S'$ et $S' \to S$ est fppf. Montrons que si f admet une section g, il existe un $\mathcal{O}_X$-Module inversible $\mathcal{L}$ qui donne le même point de $\mathrm{Pic}(X/S)$.

Puisque f admet une section g, $f' : X' \to S'$ admet une section g'. $g'^*(\mathcal{L}')$ n'est pas nécessairement isomorphe à $\mathcal{O}_{S'}$. Mais on peut modifier $\mathcal{L}'$ par $f'^*(g'^*(\mathcal{L}))$ sans changer le point obtenu dans $\mathrm{Pic}(X'/S')$ d'après le (1). Donc, quitte à faire cette modification, on peut supposer $g'^*(\mathcal{L}') \simeq \mathcal{O}_{S'}$, donc $\mathcal{L}'$ g'-rigidifiable. Soit donc $\alpha' : \mathcal{O}_{S'} \xrightarrow{\sim} g'^*(\mathcal{L}')$ une g'-rigidification de $\mathcal{L}'$. On va montrer que $(\mathcal{L}', \alpha')$ est muni d'une donnée de descente relativement à $S' \to S$. Soit $S'' = S' \times_S S'$ et soient

$$\begin{tikzcd}
X''' \arrow[r, shift left=2] \arrow[r] \arrow[r, shift right=2] \arrow[d, "f'''"'] & X'' \arrow[r, shift left, "q_1"] \arrow[r, shift right, "q_2"'] \arrow[d, "f''"'] & X' \arrow[r, "q"] \arrow[d, "f'"'] & X \arrow[d, "f"'] \\
S''' \arrow[r, shift left=2] \arrow[r] \arrow[r, shift right=2] & S'' \arrow[r, shift left, "p_1"] \arrow[r, shift right, "p_2"'] & S' \arrow[r, "p"'] & S
\end{tikzcd}$$

$(\mathcal{L}_1'', \alpha_1'')$ et $(\mathcal{L}_2'', \alpha_2'')$ les images réciproques par q_1 et q_2 de $(\mathcal{L}', \alpha')$. Elles définissent le même point de $\mathrm{Pic}(X''/S'')$, donc leur différence donne 0 dans $\mathrm{Pic}(X''/S'')$ et, par conséquent, d'après le (1) et du fait que $f_*''(\mathcal{O}_{X''}) \simeq \mathcal{O}_{S''}$, cette différence provient d'un $\mathcal{O}_{S''}$-Module inversible rigidifié, donc isomorph à $\mathcal{O}_{S''}$, donc $\mathcal{L}_1''$ et $\mathcal{L}_2''$ sont isomorphes. Quitte à modifier cet isomorphisme, on peut trouver un isomorphisme $\varphi : (\mathcal{L}_1'', \alpha_1'') \xrightarrow{\sim} (\mathcal{L}_2'', \alpha_2'')$. des $\mathcal{O}_{X''}$-Modules *rigidifiés.*

Pour montrer que φ est une donnée de descente sur $(\mathcal{L}', \alpha')$ relativement à $S' \to S$, considérons les trois images réciproques $(\mathcal{L}_1''', \alpha_1'''), (L_2''', \alpha_2'''), (\mathcal{L}_3''', \alpha_3''')$ de

$$\begin{tikzcd}
(\mathcal{L}_1''', \alpha_1''') & \\
& (\mathcal{L}_2''', \alpha_2''') \arrow[ul, "\varphi_{12}"'] \\
(\mathcal{L}_3''', \alpha_3''') \arrow[uu, "\varphi_{13}"] \arrow[ur, "\varphi_{23}"'] &
\end{tikzcd}$$

$(\mathcal{L}', \alpha')$ sur X''', et les trois morphismes $\varphi_{12}, \varphi_{13}, \varphi_{23}$ de $\mathcal{O}_{X'''}$-Modules rigidifiés. Alors la condition de cocycle $\varphi_{13} = \varphi_{12} \circ \varphi_{23}$ sur X''' est automautiquement vérifiée, car il ne peut y avoir qu'un seul isomorphisme d'un faisceau rigidifié dans un autre, tout automorphisme d'une telle structure étant trivial. $(\mathcal{L}', \alpha')$ est donc muni d'une donnée de descente relativement à $S' \to S$, ce qui montre qu'il existe un $\mathcal{O}_X$-Module rigidifié $(\mathcal{L}, \alpha)$ qui donne le même point de $\mathrm{Pic}(X/S)$ que $(\mathcal{L}', \alpha')$, donc $\mathrm{Pic}(X) \to \mathrm{Pic}(X/S)$ est surjectif et dans ce cas $\mathrm{Pic}(X/S) \simeq \mathrm{Pic}(X)/\mathrm{Pic}(S)$. $\square$

5.4. Application du critère de Schlessinger au foncteur de Picard relatif. Soit Λ un anneau local noethérien complet de corps résiduel k et $\mathcal{C}'_\Lambda$ la catégorie des Λ-algèbres artiniennes à extensions résiduelles triviales.

Soit X un schéma sur $S = \mathrm{Spec}\,\Lambda$. Pour tout $A \in \mathcal{C}'_\Lambda$ nous noterons $X_A = X \times_S \mathrm{Spec}\,A$, et nous poserons $X_0 = X_k$. Nous nous proposons d'étudier le foncteur $\mathcal{P}ic_{X/S}$, ou, plus précisément, sa restriction à la catégorie $\mathcal{C}'^{\circ}_\Lambda$ des spectres d'objets de $\mathcal{C}'_\Lambda$.

On a le théorème suivant:

Théorème 5.7. *Si*

(1) X *est de type fini et plat sur* S

(2) $H^0(X_0, \mathcal{O}_{X_0}) \simeq k$

(3) $\dim_k H^1(X_0, \mathcal{O}_{X_0}) < \infty$

alors $\mathrm{Pic}_{X/S}$*, restreint à* $\mathcal{C}'^{\circ}_\Lambda$*, est pro-représentable.*

Tout d'abord, notons que si la condition (1) est réalisé, la condition (2) équivaut à la condition

$$(2') \qquad H^0(X_A, \mathcal{O}_{X_A}) \simeq A \text{ pour tout } A \in \mathcal{C}'_\Lambda$$

En effet, par platitude, le foncteur $M \mapsto H^0(X, \mathcal{O}_X \otimes M)$, sur la catégorie des Λ-modules est exact à gauche. Par application du lemme des cinq [3, I, prop. 1.1], on peut montrer facilement que le morphisme canonique $M \to H^0(X, \mathcal{O}_X \otimes M)$ est un isomorphisme pour tout M de longueur finie (par récurrence sur cette longueur).

Si la condition (2′) est réalisé, pour tout $A \in \mathcal{C}'_\Lambda$ on a $f_*(\mathcal{O}_{X_A}) \simeq \mathcal{O}_{S_A}$ (ici $S_A = \operatorname{Spec} A$). On le voit aisément en constatant que $H^0(X, \mathcal{O}_{X_A}) = \Gamma(X, \mathcal{O}_{X_A}) \simeq \Gamma(S_A, f_*(\mathcal{O}_{X_A})) = A$ et que S_A est affine d'anneau A.

Montrons d'autre part que l'on peut toujours, sous les hypothèses du théorème 5.7, se ramener au cas où f admet une section. Pour cela, nous allons montrer le lemme suivant :

LEMME 5.8. *Soit X un S-schéma de type fini, plat sur S, où S est le spectre d'un anneau Λ local, noethérien, complet, de corps résiduel k. Soit s le point fermé de S. Supposons $X_s \neq \varnothing$. Si X_s est de type fini sur k, l'ensemble des points où X_s est de* COHEN-MACAULAY *(i.e. où l'anneau local est de* COHEN-MACAULAY*) contient un ouvert dense.*

DÉMONSTRATION. Nous supposerons que X est affine irréductible de dimension r. D'après le théorème de *normalisation* [2, V, §3, th. 1] (*Emmy* NOETHER), $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ est une algèbre finie sur $k[T_1, \dots, T_r]$. Comme $r = \dim X$, le morphisme $X \to \operatorname{Spec} k[T_1, \dots, T_r]$ est injectif. Le point générique η de X s'envoie sur le point générique ξ de $\operatorname{Spec} k[T_1, \dots, T_r]$. X_ξ est fini et libre sur ξ, donc X est fini et libre au dessus d'un ouvert dense de $\operatorname{Spec} k[T_1, \dots, T_r]$ et, a fortiori, est de COHEN-MACAULAY en ses points. □

Soit donc x un point fermé de X_s où X_s est de COHEN-MACAULAY. On peut trouver une suite regulière de paramètres $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_r$ de $\mathcal{O}_{X_s,x}$. Quitte à restreindre X à un voisinage ouvert affine de x, on peut supposer que $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_r$ se relèvent en $a_1, \dots, a_r$ dans $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$.

Considérons alors le fermé $Z = V(a_1, \dots, a_r)$. Z est plat sur S ([12, 0_{III}.10]) et quasi-fini en x (car $\mathcal{O}_{X_s,x}/(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_r)$ est de longueur finie et le corps résiduel de $\mathcal{O}_{X_s,x}$ est fini sur k).

S étant complet est hensélien et l'on peut par conséquent écrire $Z = Z' \sqcup Z''$, où Z' est le composant local de x et est fini sur S. Z' est donc à la fois fini et plat sur S. Quitte à faire le changement de base fini et plat $Z' \to S$, on peut supposer que $X \to S$ admet une section.

Nous pouvons par conséquent supposer à présent que $f : X \to S$ admet une section et que $f_*(\mathcal{O}_{X_A}) \simeq \mathcal{O}_{S_A}$ pour tout $A \in \mathcal{C}'_\Lambda$.

Alors pour tout $T \in {\mathcal{C}'_\Lambda}^\circ$, $\operatorname{Pic}_{X/S}(T)$, qui est isomorphe à $\operatorname{Pic}(X \times_S T/T)$, n'est autre que $\operatorname{Pic}(X \times_S T)/\operatorname{Pic}(T) = \operatorname{Pic}(X \times_S T)$, en vertu du théorème 5.6 et du fait que $\operatorname{Pic}(T) = 0$, puisque T est le spectre d'une Λ-algèbre artinienne locale. Donc le préfaisceau $T \mapsto \operatorname{Pic}(X \times_S T)$ est un fasiceau qui coïncide avec $\operatorname{Pic}_{X/S}$.

On étudie donc le foncteur contravariant $\operatorname{Spec} A \mapsto \operatorname{Pic}(X \times_S \operatorname{Spec} A)$ de ${\mathcal{C}'_\Lambda}^\circ$ dans $\mathcal{A}b$. Rappellons tout d'abord deux lemmes de platitude.

Lemme 5.9. *Soient A un anneau, J un idéal nilpotent de A, $u : M \to N$ un homomorphisme de A-modules, avec N plat sur A. Alors, si $\bar{u} : M/JM \to N/JN$ est un isomorphisme, il en est de même de u*

Lemme 5.10. *Si on a un diagramme commutatif d'homomorphismes d'anneaux*

$$\begin{tikzcd}
N \arrow[rr, "p''"] \arrow[dr, "p'"'] \arrow[dd, dashed] & & M'' \arrow[dr, "u''"] \arrow[dd, dashed] & \\
& M' \arrow[rr, "u'"] \arrow[dd, dashed] & & M \arrow[dd, dashed] \\
B \arrow[rr] \arrow[dr] & & A'' \arrow[dr] & \\
& A' \arrow[rr] & & A
\end{tikzcd}$$

et de modules, compatibles, où $B = A' \times_A A''$ et $N = M' \times_M M''$, et où M' (resp. M'') est un A'- (resp. A''-) module plat, et si l'on suppose:

(1) $A''/J \xrightarrow{\sim} A$ où J est un idéal nilpotent de A''

(2) u' (resp. u'') réduit un isomorphisme entre $M' \otimes_{A'} A$ (resp. $M'' \otimes_{A''} A$) et M.

Alors N est B-plat et p' (resp. p'') réduit un isomorphisme entre $N \otimes_B A'$ et M' (resp. entre $N \otimes_B A''$ et M'').

Corollaire 5.11. *Avec les notations ci-dessus, soit L un B-module qui peut*

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[r, "q''"] \arrow[d, "q'"'] & M'' \arrow[d, "u''"] \\
M' \arrow[r, "u'"'] & M
\end{tikzcd}$$

être placé dans un diagramme commutatif où q' induit un isomorphisme $L \otimes_B A' \xrightarrow{\sim} M'$. Alors le morphisme canonique $L \to N$ est un isomorphisme.

Démonstration. Précisons tout d'abord quelques notations. Soient A et B deux objets de $\mathcal{C}'_\Lambda$. Si $\eta \in \operatorname{Pic}(X_A)$ (resp. $\mathcal{L}$ est un $\mathcal{O}_{X_A}$-Module inversible) et $A \to B$ un morphisme dans $\mathcal{C}'_\Lambda$, on note $\eta \otimes_A B$ (resp. $\mathcal{L} \otimes_A B$) l'élément image de η dans $\operatorname{Pic}(X_B)$ (resp. le faisceau inversible image réciproque de $\mathcal{L}$ sur X_B). Fixons une fois pour toutes un élément ξ_0 de $\operatorname{Pic}(X_0)$. Nous pouvons nous borner à étudier le foncteur $P : \mathcal{C}'_\Lambda \to \mathcal{E}ns$ qui à $A \in \mathcal{C}'_\Lambda$ associe $P(A)$, sous-ensemble de $\operatorname{Pic}(X_A)$ formé des η tels que $\eta \otimes_A k = \xi_0$.

Soient $u' : (A', \eta') \to (A, \eta)$ et $u'' : (A'', \eta'') \to (A, \eta)$ des morphismes de couples, où u'' est une surjection. Soient $\mathcal{L}'$, $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}''$ des faisceaux inversibles correspondant sur $X' = X_{A'}$, $Y = X_A$ et $X'' = X_{A''}$. On a des morphismes $p' : \mathcal{L}' \to \mathcal{L}$ et $p'' : \mathcal{L}'' \to \mathcal{L}$ (de faisceau sur l'espace $|X_0|$ sous-jacent de X_0) compatibles avec $\mathcal{O}_{X'} \to \mathcal{O}_Y$ et $\mathcal{O}_{X''} \to \mathcal{O}_Y$ qui induisent des isomorphismes $\mathcal{L}' \otimes_{A'} A \simeq \mathcal{L}$ et $\mathcal{L}'' \otimes_{A''} A \simeq \mathcal{L}$. Soient $B = A' \times_A A''$ et $Z = X_B$. On a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_Z \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{O}_{X''} \arrow[d] \\
\mathcal{O}_{X'} \arrow[r] & \mathcal{O}_X
\end{tikzcd}$$

de faisceau sur $|X_0|$. Comme X est plat sur S il y a un isomorphisme $\mathcal{O}_Z \simeq \mathcal{O}_{X'} \underset{\mathcal{O}_Y}{\times} \mathcal{O}_{X''}$ où $\mathcal{O}_{X'} \underset{\mathcal{O}_Y}{\times} \mathcal{O}_{X''}$ est le faisceau de B-algèbres dont les sections sur l'ouvert U de $|X_0|$ sont données par $\mathcal{O}_Z(U) = \mathcal{O}_{X'}(U) \times_{\mathcal{O}_Y(U)} \mathcal{O}_{X''}(U)$.

Par conséquent $\mathcal{N} = \mathcal{L}' \times \mathcal{L}''$ est un faisceau sur Z inversible et les projections de $\mathcal{N}$ sur $\mathcal{L}'$ et $\mathcal{L}''$ induisent des isomorphismes $\mathcal{N} \otimes_B A' \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}'$ et $\mathcal{N} \otimes_B A'' \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}''$ (d'après lemme 5.10).

Si $\mathcal{M}$ est un autre faisceau inversible sur Z tel qu'il y ait des isomorphismes $\mathcal{M} \otimes_B A' \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}'$ et $\mathcal{M} \otimes_B A'' \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}''$, on a des morphismes $q' : \mathcal{M} \to \mathcal{L}'$, $q'' : \mathcal{M} \to \mathcal{L}''$

qui les induisent, donc un diagramme commutatif où θ est un automorphisme

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{L}'' \arrow[dr] & \\ \mathcal{L}' \arrow[r] & \mathcal{L} \arrow[r, "\theta"] & \mathcal{L} \end{tikzcd}$$

de $\mathcal{L}$, donné par composition $\mathcal{L} \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}' \otimes_{A'} A \xrightarrow{\sim} \mathcal{M} \otimes_B A \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}'' \otimes_{A''} A \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}$. Comme $A \xrightarrow{\sim} H^0(X_A, \mathcal{O}_{X_A})$ pour tout $A \in \mathcal{C}'_\Lambda$, θ est la multiplication par une unité a de A.

Remontrant a en $a'' \in A''$, on peut changer q'' en $a''q''$ et rendre le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{L}'' \arrow[d] \\ \mathcal{L}' \arrow[r] & \mathcal{L} \end{tikzcd}$$

commutatif. Donc $\mathcal{M} \simeq \mathcal{N}$.

Par conséquent $P(A' \times_A A'') \simeq P(A') \times_{P(A)} P(A'')$ pour toute surjection $A'' \to A$ dans $\mathcal{C}'_\Lambda$.

Pour finir, supposons que $Y = X_{k[\varepsilon]}, \mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_{X_0} \oplus \varepsilon \mathcal{O}_{X_0}$ avec $\varepsilon^2 = 0$. On a la suite exacte : $0 \longrightarrow \mathcal{O}_{X_0} \xrightarrow{\exp} \mathcal{O}_Y^* \longrightarrow \mathcal{O}_{X_0}^* \longrightarrow 1$ (où $\exp f = 1 + \varepsilon f$). Donc $t_P \simeq \operatorname{Ker}(H^1(Y, \mathcal{O}_Y^*) \to H^1(X_0, \mathcal{O}_{X_0}^*)) \simeq H^1(X_0, \mathcal{O}_{X_0})$ est de dimension finie sur k.

On a montré plus qu'il n'en fallait pour appliquer le critère de SCHLESSINGER. $\square$

Chapitre 8

Schémas formels

1. Introduction

Soit A un anneau local noethérien complet d'idéal maximal $\mathfrak{m}$: $A = \varprojlim A/\mathfrak{m}^n$. Supposons qu'on ait un foncteur $F : \mathcal{S}ch \longrightarrow (\mathcal{E}ns)^\circ$, dont la restriction à $\mathcal{S}ch/S$ soit représentable si S est artinien ; en particulier, pour tout n, la restriction de F à $\mathcal{S}ch/(A/\mathfrak{m}^n)$ est représentable par un schéma X_n. On obtient ainsi un système inductif de schémas :

$$\begin{array}{ccccccccccc} X_1 & \longrightarrow & X_2 & \longrightarrow & X_3 & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & X_n & \longrightarrow & \dots \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \\ A/\mathfrak{m} & \longleftarrow & A/\mathfrak{m}^2 & \longleftarrow & A/\mathfrak{m}^3 & \longleftarrow & \dots & \longleftarrow & A/\mathfrak{m}^n & \longleftarrow & \dots \end{array}$$

En général la limite inductive n'existe pas dans la catégorie des schémas.

C'est pour faire face à ce genre de problèmes (dans un cadre plus général) que l'on introduit une nouvelle catégorie, celle des schémas formels dont la catégorie des schémas est une sous-catégorie pleine.

2. Anneaux topologiques

Au lieu de se reporter entièrement aux Éléments [11, 0_I, § 7], on a rassemblé quelques définitions et propriétés des anneaux topologiques dans cette section.

2.1. Quelques classes d'anneaux topologiques. On dit qu'un anneau topologique A est *linéairement topologisé* s'il existe un système fondamental de voisinages de zéro formé d'idéaux (nécessairement ouverts). On dit alors qu'un idéal $\mathfrak{a}$ de A est un *idéal de définition* si $\mathfrak{a}$ est ouvert et si pour tout voisinage V de zéro, il existe un entier $n > 0$ tel que $\mathfrak{a}^n$ soit inclus dans V.

Un anneau linéairement topologisé dans lequel existe un idéal de définition est dit *préadmissible*, les idéaux de définition forment alors un système fondamental de voisinages de zéro. Si de plus l'anneau est séparé et complet, on dit qu'il est *admissible*.

On dit qu'un anneau préadmissible est *préadique* s'il existe un idéal de définition dont les puissances forment un système fondamental de voisinages de zéro. Il en est alors de même pour les puissances de tout idéal de définition. Si de plus l'anneau est séparé et complet, on dit qu'il est *adique*.

Proposition 2.1 (EGA [11, 0_I, 7.1.10]). *Soient A un anneau admissible et $\mathfrak{a}$ un idéal de définition de A. Alors $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{r}$ (le radical de A).*

Démonstration. Il suffit de montrer que pour tout $x \in \mathfrak{a}$, $1 + x$ est inversible. Or par hypothèse A est séparé et complet et $\mathfrak{a}^n$ tend vers zéro, donc la série $\sum_{n\geq 0}(-1)^n x^n$ est convergente dans A. Soit y sa somme, on a $y(1 + x) = 1$. □

2.2. Eléments topologiquement nilpotents. Dans un anneau topologique, on dit qu'un élément x est *topologiquement nilpotent* si 0 est une limite de la suite $(x^n)_{n>0}$. On vérifie immédiatement les assertions suivantes :

PROPOSITION 2.2 (EGA [11, 0_I, 7.1.3]). *Soient A un anneau préadmissible, $\mathfrak{a}$ un idéal de définition et $x \in A$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) x est topologiquement nilpotent

(2) l'image canonique de x dans $A/\mathfrak{a}$ est nilpotente

(3) x est contenu dans un idéal de définition

COROLLAIRE 2.3 (EGA [11, 0_I, 7.1.3,(ii)]). *L'ensemble $\mathfrak{t}$ des éléments topologiquement nilpotents est un idéal ouvert, l'image réciproque du nilradical de $A/\mathfrak{a}$.*

COROLLAIRE 2.4 (EGA [11, 0_I, 7.1.6]). *Soit $\mathfrak{a}_0$ un idéal de A ; les propriétés suivantes sont équivalentes:*

(1) $\mathfrak{a}_0$ est le plus grand idéal de définition de A

(2) $\mathfrak{a}_0$ est un idéal de définition maximal

(3) $\mathfrak{a}_0$ est un idéal de définition tel que $A/\mathfrak{a}_0$ soit réduit

Et alors $\mathfrak{a}_0 = \mathfrak{t}$.

COROLLAIRE 2.5 (EGA [11, 0_I, 7.1.7]). *Un anneau préadmissible noethérien possède un plus grand idéal de définition.*

2.3. Anneaux complets de fractions. Soit A un anneau linéairement topologisé, $(\mathfrak{a}_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ un système fondamental de voisinages de zéro formé d'idéaux et S une partie multiplicative de A. Alors $S^{-1}A$ est un anneau linéairement topologisé, les $S^{-1}\mathfrak{a}_\lambda$ formant un système fondamental de voisinages de zéro. On appelle *anneau complet des fractions* de A à dénominateurs dans S, noté $A\{S^{-1}\}$, le séparé complété de $S^{-1}A$ pour cette topologie:

$$A\{S^{-1}\} = \varprojlim_{\lambda\in\Lambda} S^{-1}A/S^{-1}\mathfrak{a}_\lambda$$

L'application canonique $A \to S^{-1}A$ est continue pour les topologies ci-dessus ; si on la compose avec l'application canonique $S^{-1}A \to A\{S^{-1}\}$, on obtient un homomorphisme canonique continu $A \to A\{S^{-1}\}$, limite projective des homomorphismes $A \to S^{-1}(A/\mathfrak{a}_\lambda)$.

Cet homomorphisme $A \to A\{S^{-1}\}$ est caractérisé par la propriété *universelle* suivante : tout homomorphisme continu u de A dans un anneau linéairement topologisé B, séparé et complet, tel que $u(S)$ soit formé d'éléments inversibles de B, se factorise d'une manière unique en $A \to A\{S^{-1}\} \xrightarrow{u'} B$, où u' est continu.

PROPOSITION 2.6 (EGA [11, 0_I, 7.6.13]). *Si A est un anneau adique noethérien, $A\{S^{-1}\}$ est plat sur A.*

DÉMONSTRATION. En effet $A\{S^{-1}\}$ est le séparé complété de l'anneau $S^{-1}A$ pour la topologie $S^{-1}\mathfrak{m}$-préadique (où $\mathfrak{m}$ est un idéal de définition de A), il est donc plat dur $S^{-1}A$, qui est lui-même plat sur A. □

PROPOSITION 2.7 (EGA [11, 0_I, 7.6.11]). *Si A est admissible (resp. adique, resp. adique noethérien), il en est de même de $A\{S^{-1}\}$.*

Soit $\mathfrak{a}$ un idéal ouvert de A, alors $S^{-1}\mathfrak{a}$ est un idéal ouvert de $S^{-1}A$; soit $\mathfrak{a}\{S^{-1}\} = \varprojlim S^{-1}\mathfrak{a}/S^{-1}\mathfrak{a}_\lambda$ son séparé complété. C'est un idéal ouvert de $A\{S^{-1}\}$ et l'application canonique $S^{-1}A/S^{-1}\mathfrak{a} \to A\{S^{-1}\}/\mathfrak{a}\{S^{-1}\}$ est un isomorphisme.

Inversement si $\mathfrak{a}'$ est un idéal ouvert de $A\{S^{-1}\}$, il s'écrit : $\mathfrak{a}' = \mathfrak{a}\{S^{-1}\}$, où $\mathfrak{a}$ est un idéal ouvert de A ([11, 0_I, 7.6.9]). En particulier :

PROPOSITION 2.8 (EGA [11, 0_I, 7.6.10]). *L'application* $\mathfrak{p} \mapsto \mathfrak{p}\{S^{-1}\}$ *est une bijection croissante de l'ensemble des idéaux premiers ouverts de* A *tels que* $\mathfrak{p} \cap S = \varnothing$ *sur l'ensemble des idéaux premiers ouverts de* $A\{S^{-1}\}$.

De plus les corps des fractions de $A\{S^{-1}\}/\mathfrak{p}\{S^{-1}\}$ *et de* $A/\mathfrak{p}$ *sont canoniquement isomorphes.*

2.4. Cas particuliers. Soit A un anneau linéairement topologisé et $f \in A$, soit S_f la partie multiplicative $\{f^n \mid n \geq 0\}$, on notera $A_{\{f\}} = A\{S_f^{-1}\}$. Si $g \in A$, il y a un homomorphisme continu canonique $A_{\{f\}} \to A_{\{fg\}}$.

Ainsi si f parcoure une partie multiplicative S de A, les $A_{\{f\}}$ forment un système inductif filtrant ; on pose :

$$A_{\{S\}} = \varinjlim_{f \in S} A_{\{f\}}$$

Pour tout $f \in S$, on a un homomorphisme $A_{\{f\}} \to A\{S^{-1}\}$, d'où par passage à la limite inductive un homomorphisme canonique

$$A_{\{S\}} \longrightarrow A\{S^{-1}\}$$

PROPOSITION 2.9 (EGA [11, 0_I, 7.6.16]). *Si* A *est adique noethérien,* $A\{S^{-1}\}$ *est plat sur* $A_{\{S\}}$.

DÉMONSTRATION. D'après prop. 2.6 $A\{S^{-1}\}$ est plat sur $A_{\{f\}}$ pour tout $f \in S$, donc sur la limite inductive. □

REMARQUE. Contrairement au cas des anneaux de fractions usuels, on n'a pas en général $A_{\{S\}} = A\{S^{-1}\}$.

PROPOSITION 2.10 (EGA [11, 0_I, 7.6.17]). *Soient* A *un anneau admissible,* $\mathfrak{p}$ *un idéal premier ouvert de* A *et* $S = A - \mathfrak{p}$. *Alors :*

(1) *les anneaux* $A_{\{S\}}$ *et* $A\{S^{-1}\}$ *sont locaux,*
(2) *l'homomorphisme canonique* $A_{\{S\}} \to A\{S^{-1}\}$ *est local,*
(3) *les corps résiduel de* $A_{\{S\}}$ *et* $A\{S^{-1}\}$ *sont canoniquement isomorphes au corps des fractions de* $A/\mathfrak{p}$.

DÉMONSTRATION. $A\{S^{-1}\}$ *est local :* Soit $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$ un idéal de définition de A, alors $A\{S^{-1}\}$ est le complété de $A_\mathfrak{p}$ pour la topologie définie par l'idéal $S^{-1}\mathfrak{a}$ inclus dans l'idéal maximal $\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$, il est donc local d'idéal maximal $\mathfrak{p}\{S^{-1}\}$.

$A_{\{S\}}$ *est local :* Soit $\mathfrak{m} = \varinjlim \mathfrak{p}_{\{f\}}$, on montre facilement (mais c'est ennuyeux à écrire), en remontant la limite inductive et en se servant du fait que $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{r}$, qu'un élément de $A_{\{S\}}$ qui n'appartient pas à $\mathfrak{m}$ est inversible. Donc $A_{\{S\}}$ est local d'idéal maximal $\mathfrak{m}$.

l'homomorphisme $A_{\{S\}} \to A\{S^{-1}\}$ *est local :* En effet l'image de $\mathfrak{p}_{\{f\}}$ dans $A\{S^{-1}\}$ est contenu dans $\mathfrak{p}\{S^{-1}\}$; à fortiori il en est de même pour l'image de $\mathfrak{m} = \varinjlim \mathfrak{p}_{\{f\}}$.

Les corps résiduels sont isomorphes : En effet les homomorphismes canoniques $A_\mathfrak{p} \to A_{\{S\}} \to A\{S^{-1}\}$, induisent par passage au quotient des homomorphismes $A_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}A_\mathfrak{p} \to A_{\{S\}}/\mathfrak{m} \to A\{S^{-1}\}/\mathfrak{p}\{S^{-1}\}$ et on a vu au prop. 2.8 que le composé est un isomorphisme. □

COROLLAIRE 2.11. *Soit* A *un anneau adique noethérien,* $\mathfrak{p}$ *un idéal premier ouvert de* A *et* $S = A - \mathfrak{p}$. *Alors les anneaux* $A_{\{S\}}$ *et* $A\{S^{-1}\}$ *sont noethériens et* $A\{S^{-1}\}$ *est fidèlement plat sur* $A_{\{S\}}$.

Démonstration. L'homomorphisme $A_{\{S\}} \to A\{S^{-1}\}$ est local et plat, donc fidèlement plat. On a vu plus haut (2.7) que $A\{S^{-1}\}$ est noethérien, par fidèle platitude il en est de même de $A_{\{S\}}$. □

3. Schémas formels affines

3.1. Spectres formels. A tout anneau *admissible* A (§2.1), nous allons associer un espace topologiquement annelé $(\mathfrak{X}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}})$, dit *spectre formel* de A.

L'*espace topologique* sous-jacent, $\mathfrak{X} = \operatorname{Spf} A$, est l'ensemble des idéaux premiers ouverts de A muni de la topologie de Zariski (si $\mathfrak{a}$ est un idéal de définition, $\mathfrak{X} = V(\mathfrak{a})$ est un fermé de $\operatorname{Spec} A$).

Le faisceau d'anneaux topologiques $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ est défini comme une limite projective. Pour tout idéal de définition $\mathfrak{a}_\lambda$ de A, soit $\mathcal{O}_\lambda$ le faisceau d'anneaux induit sur $\mathfrak{X}$ par $\widetilde{(A/\mathfrak{a}_\lambda)}$. Si $\mathfrak{a}_\mu$ est inclus dans $\mathfrak{a}_\lambda$, l'homomorphisme canonique $A/\mathfrak{a}_\mu \to A/\mathfrak{a}_\lambda$ induit un homomorphisme de faisceaux $u_{\lambda\mu} : \mathcal{O}_\mu \to \mathcal{O}_\lambda$. On obtient ainsi un système projectif de faisceaux d'anneaux.

Au faisceau d'anneaux discrest $\mathcal{O}_\lambda$ est associé un faisceau d'anneaux topologiques $\mathcal{O}'_\lambda$ dit pseudo-discret [11, 0_I, 3.9.1]. L'anneau des section de $\mathcal{O}'_\lambda$ au-dessus d'un ouvert quasi-compact est discret, en particulier si A est noethérien $\mathcal{O}'_\lambda = \mathcal{O}_\lambda$. On obtient ainsi un système projectif de faisceaux d'anneaux topologiques et on pose : $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}} = \varprojlim \mathcal{O}'_\lambda$, où $\mathfrak{a}_\lambda$ parcoure l'ensemble filtrant des idéaux de définition. Pour tout ouvert quasi-compact U de $\mathfrak{X}$, on a

$$\Gamma(U, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}) = \varprojlim \Gamma(U, \mathcal{O}_\lambda)$$

En particulier, puisque A est séparé et complet :

$$\Gamma(\mathfrak{X}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}) = \varprojlim A/\mathfrak{a}_\lambda = A$$

Définition 3.1. *On dit qu'un espace topologiquement annelé est un* schéma formel affine *s'il est isomorphe au spectre formel d'un anneau admissible.*

Exemple 3.2. *Soit A un anneau noethérien muni de la topologie discrète, alors l'idéal $\{0\}$ est un idéal de définition et* $\operatorname{Spf} A = \operatorname{Spec} A$.

Exemple 3.3. *Soit A un anneau local d'idéal maximal $\mathfrak{m}$ et $\widehat{A}$ le séparé complété de A muni de la topologie $\mathfrak{m}$-adique ; alors* $\operatorname{Spf} \widehat{A}$ *est réduit à un point $\mathfrak{m}$ avec pour fibre $\widehat{A}$.*

3.2. Ouverts affines – Fibres. On dit qu'un ouvert U d'un schéma formel affine $\mathfrak{X}$ est un *ouvert formel affine* si la restriction de $\mathfrak{X}$ à U est un schéma formel affine. De même que dans le cas des schémas usuels, les ouverts formels affines forment une base de la topologie de $\mathfrak{X}$.

Plus précisément, soient A un anneau admissible et $\mathfrak{X} = \operatorname{Spf} A$; pour tout $f \in A$, posons $\mathfrak{D}(f) = D(f) \cap \mathfrak{X}$. Les $\mathfrak{D}(f)$ forment uns base d'ouverts de $\mathfrak{X}$ et il résulte immédiatement des définitions que l'espace topologiquement annelé $(\mathfrak{D}(f), \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}|\mathfrak{D}(f))$ est isomorphe au spectre formel affine $\operatorname{Spf} A_{\{f\}}$.

En tant que faisceau d'anneau sans topologie, le faisceau structural $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ de $\operatorname{Spf} A$ admet pour tout point $\mathfrak{p} \in \mathfrak{X}$ une *fibre* :

$$\mathcal{O}_{\mathfrak{p}} = \varinjlim_{f \notin \mathfrak{p}} A_{\{f\}} = A_{\{S\}}$$

si l'on pose $S = A - \mathfrak{p}$. C'est un anneau local dont le corps résiduel est canoniquement isomorphe à $\kappa(\mathfrak{p})$, corps résiduel en $\mathfrak{p}$ dans $\operatorname{Spec} A$ (prop. 2.10).

3.3. Morphismes de schémas formels affines. Soient A et B des anneaux admissibles, $\mathfrak{X} = \operatorname{Spf} A$, $\mathfrak{Y} = \operatorname{Spf} B$ et $\varphi : B \to A$ un homomorphisme continu. L'image réciproque par φ d'un idéal premier ouvert de A est un idéal premier ouvert de B, ainsi l'application canonique ${}^a\varphi : \operatorname{Spec} A \to \operatorname{Spec} B$ induit par restriction une application continue :

$$^a\varphi : \operatorname{Spf} A \longrightarrow \operatorname{Spf} B$$

Pour tout élément g de B, φ induit un homomorphisme continu $B_{\{g\}} \to A_{\{\varphi(g)\}}$ compatible aux restrictions, et l'on a : $\mathfrak{D}(\varphi(g)) = {}^a\varphi^{-1}(\mathfrak{D}(g))$, d'où un homomorphisme continu de faisceaux d'anneaux topologiques :

$$\widetilde{\varphi} : \mathcal{O}_{\mathfrak{Y}} \longrightarrow {}^a\varphi_*(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}})$$

On a ainsi défini un *homomorphisme d'espaces topologiquement annelés* :

$$\phi = ({}^a\varphi, \widetilde{\varphi}) : \mathfrak{X} \longrightarrow \mathfrak{Y}$$

En tant qu'homomorphisme de faisceaux d'anneaux sans topologie, $\widetilde{\varphi}$ induit pour tout $x \in \mathfrak{X}$ un homomorphisme *local* sur les fibres :

$$\varphi_x : \mathcal{O}_{{}^a\varphi(x))} \longrightarrow \mathcal{O}_x$$

Réciproquement, pour qu'un homomorphisme $u = (\psi, \theta) : \mathfrak{X} \longrightarrow \mathfrak{Y}$ d'espaces topologiquement annelés soit de la forme $({}^a\varphi, \widetilde{\varphi})$ où φ est un homomorphisme continu de B dans A, il suffit que pour tout $x \in \mathfrak{X}$, l'homomorphisme $\theta_x : \mathcal{O}_{\psi(x)} \longrightarrow \mathcal{O}_x$ soit local.

De tels morphismes sont dits *morphismes de schémas formels affines*.

En résumé, la catégorie des schémas formels affines est une sous-catégorie pleine de celles des espaces topologiquement annelés en anneaux locaux. Les foncteurs $A \mapsto \operatorname{Spf} A$ et $\mathfrak{X} \mapsto \Gamma(\mathfrak{X}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}})$ définissent une équivalence de catégories entre la catégorie des anneaux admissibles (avec pour morphismes les homomorphismes continus) et la catégorie duales de celles des schémas formels affines.

4. Schémas formels

4.1. Schémas formels et morphismes de schémas formels. On dit qu'un ouvert U d'un espace topologiquement annelé $(\mathfrak{X}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}})$ est un *ouvert formel affine* si $(U, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}|U)$ est un schéma formel affine. On dit que U est un *ouvert formel affine noethérien* si $(U, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}|U)$ est isomorphe au spectre formel d'un anneau adique noethérien.

On dit qu'un espace topologiquement annelé est un *schéma formel* si tout point possède un voisinage ouvert formel affine. On dit qu'un schéma formel est *localement noethérien* si tout point possède un voisinage ouvert affine noethérien.

Proposition 4.1. *Si $\mathfrak{X}$ est un schéma formel (resp. localement noethérien), les ouverts formels affines (resp. noethériens) forment une base de la topologie de $\mathfrak{X}$.*

Démonstration. Si $\mathfrak{X} = \operatorname{Spf} A$, les $\mathfrak{D}(f) \simeq \operatorname{Spf} A_{\{f\}}$ forment une base de la topologie ; si A est adique noethérien, il en est de même de $A_{\{f\}}$. □

Soient $\mathfrak{X}$ et $\mathfrak{Y}$ deux schémas formels, on appelle *morphisme de schémas formels* de $\mathfrak{X}$ dans $\mathfrak{Y}$ tout morphisme $(\psi, \theta) : \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ d'espaces topologiquement annelés tel que, pour tout $x \in \mathfrak{X}$, l'homomorphisme $\theta_x : \mathcal{O}_{\psi(x)} \longrightarrow \mathcal{O}_x$ soit local.

Les schémas formels forment alors une catégorie. De même que dans le cas des schémas usuels, on démontre :

Proposition 4.2. *Soeient $\mathfrak{X}$ un schémas formel et $\mathfrak{S} = \operatorname{Spf} A$ un schéma formel affine. L'application canonique :*

$$\operatorname{Hom}(\mathfrak{X}, \mathfrak{S}) \longrightarrow \operatorname{Hom} cont(A, \Gamma(\mathfrak{X}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}))$$

est bijective.

4.2. Idéaux de définition. Soient A un anneau admissible, $\mathfrak{X} = \operatorname{Spf} A$ et $\mathfrak{a}$ un idéal ouvert de A. Soit $(\mathfrak{a}_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ l'ensemble filtrant des idéaux de définition de A contenus dans $\mathfrak{a}$. On notera $\mathfrak{a}^\Delta$ le faisceau d'idéaux de $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ définit par :

$$\mathfrak{a}^\Delta = \varprojlim_{\lambda\in\Lambda} \widetilde{(\mathfrak{a}/\mathfrak{a}_\lambda)}$$

Etant donné un schéma formel quelconque $\mathfrak{X}$, on dit qu'un faisceau $\mathcal{I}$ d'idéaux de $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ est un *Idéal de définition* de $\mathfrak{X}$ si tout point de $\mathfrak{X}$ possède un voisinage ouvert affine U tel que $\mathcal{I}|U$ soit de la forme $\mathfrak{b}^\Delta$, où $\mathfrak{b}$ est un idéal de définition de $\Gamma(U, \mathfrak{X})$.

Proposition 4.3 (EGA [11, 10.3.5]). *Si $\mathfrak{X} = \operatorname{Spf} A$ est un schéma formel affine, tout Idéal de définition de $\mathfrak{X}$ est de la forme $\mathfrak{a}^\Delta$, où $\mathfrak{a}$ est un idéal de définition de A.*

Démonstration. Soit $\mathcal{I}$ un Idéal de définition de $\mathfrak{X}$. Par hypothése $\mathfrak{X}$ est quasi-compact, donc il existe un nombre fini de $f_i \in A$ tels que $\mathcal{I}|\mathfrak{D}(f_i) = \mathfrak{b}_i^\Delta$, où $\mathfrak{b}_i$ est un idéal de définition de $A_{\{f_i\}}$.

L'idéal $\mathfrak{b}_i$ est de la forme $(\mathfrak{c}_i)_{\{f_i\}}$, où $\mathfrak{c}_i$ est un idéal ouvert de A ; soit $\mathfrak{c}$ un idéal de définition de A contenu dans tous les $\mathfrak{c}_i$. L'image canonique de $\mathcal{I}/\mathfrak{c}^\Delta$ dans $\widetilde{A/\mathfrak{c}}$ est telle que sa restriction à chaque $\mathfrak{D}(f_i)$ soit de la forme $\widetilde{\mathfrak{c}_i/\mathfrak{c}}$; c'est un faisceau quasi-cohérent d'idéaux sur $\operatorname{Spec} A/\mathfrak{c}$, il est donc de la forme $\widetilde{\mathfrak{a}/\mathfrak{c}}$, où $\mathfrak{a}$ est un idéal de A contenant $\mathfrak{c}$. Et alors $\mathcal{I} = \mathfrak{a}^\Delta$.

Par ailleurs pour tout i, $\mathfrak{b}_i$ est un idéal de définition de $A_{\{f_i\}}$, donc il existe n_i tel que $\mathfrak{b}_i^{n_i} \subset \mathfrak{c}_{\{f_i\}}$. Si l'on pose $n = \sup n_i$, il vient $(\mathcal{I}/\mathfrak{c}^\Delta)^n = 0$; d'où $(\mathfrak{a}/\mathfrak{c})^n = 0$, l'image de $\mathfrak{a}$ dans $A/\mathfrak{c}$ est un idéal nilpotent, donc $\mathfrak{a}$ est un idéal de définition de A. □

Soient $\mathfrak{X}$ un schéma formel et $\mathcal{I}$ un Idéal de définition de $\mathfrak{X}$, alors l'espace annelé $(\mathfrak{X}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}/\mathcal{I})$ est un schéma (usuel), qui est affine (resp. localement noethérien) lorsque $\mathfrak{X}$ est un schéma formel affine (resp. un schéma formel localement noethérien).

Il n'est pas certain que tout schéma formel admette des Idéaux de définition, cependant :

Proposition 4.4 (EGA [11, 10.5.4]). *Soit $\mathfrak{X}$ un schéma formel localement noethérien, alors il existe un plus grand Idéal de définition $\mathcal{T}$ de $\mathfrak{X}$. C'est le seul Idéal de définition $\mathcal{I}$ de $\mathfrak{X}$ tel que le schéma $(\mathfrak{X}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}/\mathcal{I})$ soit réduit.*

Démonstration. Dans un anneau adique noethérien A il existe un plus grand idéal de définition $\mathfrak{t}$, l'ensemble deséléments topologiquement nilpotents et l'anneau $A/\mathfrak{t}$ est réduit, voir corollaire 2.5.

Alors il suffit de montrer que si $U \supset V$ sont deux ouverts formels affines nothériens de $\mathfrak{X}$, le plus grand idéal de définition $\mathcal{T}_U$ de U induit en restriction à V le plus grand idéal de définition $\mathcal{T}_V$ de V. Ceci résulte du fait que le schéma $(V, (\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}|V)/(\mathcal{T}_U|V))$ est réduit. □

On dit qu'une famille $(\mathcal{I}_\lambda)_\lambda$ d'Idéaux de définition d'un schéma formel $\mathfrak{X}$ est un *système fondamental d'Idéaux de définition* s'il existe un recouvrement (U_α) de $\mathfrak{X}$ par des ouverts formels affines tel que, pour tout α, la famille des $\mathcal{I}_\lambda|U_\alpha$ soit cofinale dans l'ensemble filtrant des Idéaux de définition de $\mathfrak{X}|U_\alpha$. Alors le faisceau d'anneaux topologiques $\mathcal{O}_\mathfrak{X}$ est limite projective des faisceaux d'anneaux pseudo-discrets $\mathcal{O}_\mathfrak{X}/\mathcal{I}_\lambda$.

Si $\mathfrak{X}$ est affine d'anneau A, $(\mathcal{I}_\lambda = \mathfrak{a}_\lambda^\Delta)$ est un système fondamental d'Idéaux de définition si et seulement si les $\mathfrak{a}_\lambda$ forment un système fondamental de voisinages de 0 dans A.

Si $\mathfrak{X}$ est localement noethérien et $\mathcal{I}$ un Idéal de définition de $\mathfrak{X}$, les puissances $\mathcal{I}^n$ de $\mathcal{I}$ forment un système fondamental d'Idéaux de définition.

4.3. Limites inductives de schémas. Soient $\mathfrak{X}$ un schéma formel *localement noethérien* et $\mathcal{I}$ un Idéal de définition de $\mathfrak{X}$. Pour tout entier n, soit X_n le schéma $(\mathfrak{X}, \mathcal{O}_\mathfrak{X}/\mathcal{I}^{n+1})$ et $f_n : X_n \to \mathfrak{X}$ le morphisme canonique.

Pour $n \leq m$, $\mathcal{I}^{m+1} \subset \mathcal{I}^{n+1}$ et l'homomorphisme canonique $\mathcal{O}_\mathfrak{X}/\mathcal{I}^{m+1} \to \mathcal{O}_\mathfrak{X}/\mathcal{I}^{n+1}$ définit un morphisme de schémas $f_{mn} : X_n \to X_m$ tel que $f_n = f_m \circ f_{mn}$. Les schémas X_n et les morphismes f_{mn} constituent donc un système inductif de schémas.

PROPOSITION 4.5 (EGA [11, 10.6.2]). *Le schéma formel localement noethérien $\mathfrak{X}$ muni des morphismes f_n est une limite inductive dans la catégorie des schémas formels du système inductif de schémas (X_n, f_{mn}).*

DÉMONSTRATION. Soient $\mathfrak{Y}$ un schéma formel et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $g_n : X_n \to \mathfrak{Y}$ un morphisme de schémas formels tel que $g_n = g_m \circ f_{mn}$.

Les applications continues sous-jacentes aux g_n sont toutes identiques à une même application $\psi : \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$. Les homomorphismes de faisceaux $\psi^*(\mathcal{O}_\mathfrak{Y}) \to \mathcal{O}_{X_n}$ induits par les g_n forment un système projectif, dont la limite projective est un homomorphisme $\psi^*(\mathcal{O}_\mathfrak{Y}) \to \mathcal{O}_\mathfrak{X}$, puisque $\mathcal{O}_\mathfrak{X}$ est limite projective des faisceaux $\mathcal{O}_{X_n}$.

On obtient ainsi un morphisme d'espaces annelés $g : \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$, qui est le seul rendant commutatif les diagrammes :

$$(*) \qquad \begin{tikzcd} X_n \arrow[rr, "g_n"] \arrow[dr, "f_n"'] & & \mathfrak{Y} \\ & \mathfrak{X} \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

Montronsque g est un morphisme de schémas formels. La question est locale sur $\mathfrak{X}$ et $\mathfrak{Y}$, on peut donc supposer $\mathfrak{X} = \operatorname{Spf} A$, $\mathfrak{Y} = \operatorname{Spf} B$ et $\mathcal{I} = \mathfrak{a}^\Delta$ où $\mathfrak{a}$ est un idéal de définition de A et $A = \varprojlim A/\mathfrak{a}^n$. Alors l'existence d'un morphisme de schémas formels affines g rendant commutatif des diagrammes $(*)$ résulte de la définition des limites projectives d'anneaux et de la correspondance biunivoque entre morphismes de schémas formels affines et homomorphismes continus d'anneaux admissibles. Mais g est unique en tant que morphisme d'espaces annelés, il coïncide donc avec le morphisme défini plus haut. □

4.4. Limites inductives de morphismes. Soient $\mathfrak{X}$ et $\mathfrak{Y}$ deux schémas formels *localement noethériens*, $\mathcal{T}$ le plus grand idéal de définition de $\mathfrak{X}$ et $\mathcal{I}$ un idéal de définition de $\mathfrak{Y}$.

LEMME 4.6. *Pour tout morphisme de schémas formels* $f : \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$, *on a* $f^*(\mathcal{J}) \subset \mathcal{T}$.

DÉMONSTRATION. La question étant locale, on peut supposer $\mathfrak{X}$ et $\mathfrak{Y}$ affines : $\mathfrak{X} = \operatorname{Spf} A$, $\mathfrak{Y} = \operatorname{Spf} B$ où A et B sont des anneaux adiques noethériens. Alors $\mathcal{T} = \mathfrak{t}^{\Delta}$, $\mathcal{J} = \mathfrak{b}^{\Delta}$, où $\mathfrak{t}$ est le plus grand idéal de définition de A, et $\mathfrak{b}$ est un idéal de définition de B. Un morphisme $f : \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ provient d'un homomorphisme continu $\varphi : B \to A$. Les élément de $\mathfrak{b}$ sont topologiquement nilpotents, donc aussi ceux de $\varphi(\mathfrak{b})$, donc $\varphi(\mathfrak{b}) \subset \mathfrak{t}$. □

De même pour tout entier n : $f^*(\mathcal{J}^n) = (f^*(\mathcal{J}))^n \subset \mathcal{T}^n$, d'où, si l'on pose $X_n = (\mathfrak{X}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}/\mathcal{T}^{n+1})$ et $Y_n = (\mathfrak{Y}, \mathcal{O}_{\mathfrak{Y}}/\mathcal{J}^{n+1})$ un système inductif de morphisme de schémas

$$f_n : X_n \longrightarrow Y_n$$

On notera $\operatorname{Hom} ind(X_\bullet, Y_\bullet)$ l'ensemble des morphismes de systèmes inductifs de schémas de $X_\bullet = (X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ dans $Y_\bullet = (Y_n)_{n\in\mathbf{N}}$.

PROPOSITION 4.7 (EGA [11, 10.6.10]). *L'application* $\operatorname{Hom}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}) \to \operatorname{Hom} ind(X_\bullet, Y_\bullet)$ *définie par* $f \mapsto (f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *est une bijection.*

DÉMONSTRATION. C'est une conséquence immédiate, par définition des limites inductives, de $\mathfrak{X} = \varinjlim X_n$ et $\mathfrak{Y} = \varinjlim Y_n$ dans la catégorie des schémas formels. □

COROLLAIRE 4.8. *Cette application induit une bijection canonique*

$$\operatorname{Hom}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}) \longrightarrow \varprojlim_{n\in\mathbf{N}} \operatorname{Hom}(X_n, Y_n)$$

DÉMONSTRATION. En effet, la donnée d'un morphisme $f_n : X_n \to Y_n$ détermine pour $m \leq n$, un morphisme et un seul $f_m : X_m \to Y_m$ rendant commutatif le diagramme:

$$\begin{tikzcd} X_m \arrow[r, "f_m"] \arrow[d] & Y_m \arrow[d] \\ X_n \arrow[r, "f_n"] & Y_n \end{tikzcd}$$

comme on le vérifie en se ramenant au cas affine. On a ainsi défini une application

$$\varphi_{mn} : \operatorname{Hom}(X_n, Y_n) \longrightarrow \operatorname{Hom}(X_m, Y_m)$$

d'où un système projectif d'ensembles. On a ainsi :

$$\operatorname{Hom} ind(X_\bullet, Y_\bullet) \xrightarrow{\sim} \varprojlim_{n\in\mathbf{N}} \operatorname{Hom}(X_n, Y_n)$$

□

5. Complétion

5.1. Complété d'un schéma. Soient X un schéma *localement noethérien* et X' un fermé de l'espace topologique sous-jacent à X. Soit Φ l'ensemble des faisceaux cohérents d'Idéaux $\mathcal{J}$ de $\mathcal{O}_X$ tels que $\operatorname{supp}(\mathcal{O}_X/\mathcal{J}) = X'$. L'ensemble Φ est non vide et filtrant pour la relation $\supset$. On identifiera $\mathcal{O}_X/\mathcal{J}$ à sa restriction à X', les $\mathcal{O}_X/\mathcal{J}$ forment alors un système projectif de faisceaux d'anneaux dont la limite projective est un faisceau d'anneaux topologiques $(\mathcal{O}_X)_{/X'}$.

PROPOSITION 5.1. *L'espace topologiquement annelé $(X', (\mathcal{O}_X)_{/X'})$ est un schéma formel localement noethérien.*

DÉMONSTRATION. La question étant locale on peut supposer $X = \operatorname{Spec} A$, avec A noethérien et $\mathcal{I} = \widetilde{\mathfrak{a}}$ où $\mathfrak{a}$ est un idéal de A. Alors X' est l'ensemble des idéaux premiers de A qui contiennent $\mathfrak{a}$.

Soient $\widehat{A} = \varprojlim A/\mathfrak{a}^n$ le séparé complété de A pour la topologie $\mathfrak{a}$-adique et $\widehat{\mathfrak{a}} = \mathfrak{a}\widehat{A}$. On sait que $\widehat{A}$ est un anneau $\mathfrak{a}$-adique noethérien et que $\widehat{A}/\widehat{\mathfrak{a}}^n \simeq A/\mathfrak{a}^n$; donc les idéaux premier ouverts de $\widehat{A}$ sont des idéaux $\widehat{\mathfrak{p}}$, où $\mathfrak{p}$ est un idéal premier de A contenant $\mathfrak{a}$, d'où l'égalité d'espaces topologiques $X' = \operatorname{Spf} \widehat{A}$. Par ailleurs $\mathcal{O}_X/\mathcal{I}^n = \widetilde{A/\mathfrak{a}^n} = \widetilde{\widehat{A}/\widehat{\mathfrak{a}}^n}$, d'où l'égalité des espaces annelés $(X', (\mathcal{O}_X)_{/X'})$ et $\operatorname{Spf} \widetilde{A}$. □

On appelle ce schéma le *complété de X le long de X'* et on le note $X_{/X'}$ ou $\widehat{X}$.

Pour tout faisceau $\mathcal{I} \in \Phi$, la famille $(\mathcal{I}^n)_{n\in\mathbf{N}}$ est localement cofinale dans Φ. Pour tout $n \geq 0$, soit X'_n le schéma $(X', \mathcal{O}_X/\mathcal{I}^{n+1})$, on a alors :

$$\widehat{X} = \varinjlim X'_n$$

la limite inductive étant prise dans la catégorie des schémas formels.

Les homomorphismes canonique $\mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_X/\mathcal{I}$ définissent par passage à la limite projective un morphisme canonique $i : \widehat{X} \longrightarrow X$, qui induit l'inclusion sur les espaces topologiques sous-jacents.

5.2. Complété d'un faisceau cohérent. Soient comme précédemment X un schémas localement noethérien, X' un fermé de X et $\widehat{X}$ le complété de X le long de X'.

Soit $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$-Module *cohérent*, on appelle *complété de $\mathcal{F}$ le long de X'*, le $\mathcal{O}_{\widehat{X}}$-Module topologique $\widehat{\mathcal{F}}$ défini par

$$\widehat{\mathcal{F}} = \varprojlim_{\mathcal{I}\in\Phi} \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X/\mathcal{I}$$

De tout homomorphisme de $\mathcal{O}_X$-Modules cohérents $u : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$, on déduit un système projectif d'homomorphismes de $\mathcal{O}_X/\mathcal{I}$-Modules :

$$u_{\mathcal{I}} : \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X/\mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{G} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X/\mathcal{I}$$

d'où, en passant à la limite projective un homomorphisme continu de $\mathcal{O}_{\widehat{X}}$-Modules topologiques

$$\widehat{u} : \widehat{\mathcal{F}} \longrightarrow \widehat{\mathcal{G}}$$

On vérifie immédiatement que l'on a ainsi défini un *foncteur additif covariant* $\mathcal{F} \mapsto \widehat{\mathcal{F}}$ de la catégorie des $\mathcal{O}_X$-Modules cohérents dans celle des $\mathcal{O}_{\widehat{X}}$-Modules topologiques.

Etant donné un $\mathcal{O}_X$-Module cohérent $\mathcal{F}$, les homomorphismes canoniques $\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X/\mathcal{I}$ forment un système projectif pour $\mathcal{I} \in \Phi$. D'où en passant à la limite projective un homomorphisme canonique :

$$\mathcal{F} \longrightarrow i_*\widehat{\mathcal{F}}$$

dont on déduit par adjonction un homomorphisme canonique :

$$i^*\mathcal{F} \longrightarrow \widehat{\mathcal{F}}$$

THÉORÈME 5.2. *Avec les hypothèses et les notation précédentes :*

(1) Le foncteur $\mathcal{F} \mapsto \widehat{\mathcal{F}}$ est exact

(2) L'homomorphisme canonique $i^*\mathcal{F} \longrightarrow \widehat{\mathcal{F}}$ est un isomorphisme

Démonstration. L'assertion est locale et conséquence immédiate du lemme suivant, lui-même corollaire du théorème de Krull (ou du lemme d'Artin-Rees). □

Lemme 5.3 ([2, III, § 3 nº 4, Th. 3]). *Soient A un anneau noethérien et $\mathfrak{a}$ un idéal de A. Pour tout A-module M, soit $\widehat{M}$ le séparé complété de M pour la topologie $\mathfrak{a}$-préadique. Alors :*

(1) Le foncteur $M \mapsto \widehat{M}$ est exact dans la catégorie des A-modules de type fini

(2) L'application $\widehat{A}$-linéaire canonique $M \otimes_A \widehat{A} \longrightarrow \widehat{M}$ est un isomorphisme si M est un A-module de type fini

Corollaire 5.4. *Le morphisme d'espaces annelés $i : \widehat{X} \longrightarrow X$ est plat.*

Proposition 5.5 (EGA [11, 10.8.11]). *Pour tout $\mathcal{O}_X$-Module cohérent $\mathcal{F}$, le noyau de l'homomorphisme canonique : $\Gamma(X, \mathcal{F}) \longrightarrow \Gamma(X', \widehat{\mathcal{F}})$ déduit de $\mathcal{F} \longrightarrow i_*\widehat{\mathcal{F}}$ est formé des sections nulles dans un voisinage de X'.*

Démonstration. Par définition de $\widehat{\mathcal{F}}$ l'image d'une telle section est nulle.

Réciproquement, soit $s \in \Gamma(X, \mathcal{F})$ dont l'image dans $\Gamma(X', \widehat{\mathcal{F}})$ est nulle ; montrons que pour tout $x \in X'$, $s_x = 0$. La question étant locale, on peut supposer $X = \operatorname{Spec} A$, où A est un anneau noethérien et $X' = V(\mathfrak{a})$, où $\mathfrak{a}$ est un idéal de A. Alors $\mathcal{F}$ est de la forme $\widetilde{M}$, où M est un A-module de type fini. L'homomorphisme $\Gamma(X, \mathcal{F}) \to \Gamma(X', \widetilde{\mathcal{F}})$ est l'homomorphisme canonique $M \to \widehat{M}$, dont le noyau est l'ensemble des éléments de M annulés par un élément de $1 + \mathfrak{a}$. Il existe donc $f \in \mathfrak{a}$ tel que $(1_x + f_x)s_x = 0$. Mais $\mathfrak{a}_x \subset \mathfrak{r}_x$ (le radical de $\mathcal{O}_x$) ; donc $1_x + f_x$ est inversible dans $\mathcal{O}_x$ et $s_x = 0$. □

Corollaire 5.6. $\operatorname{supp} \widehat{\mathcal{F}} = \operatorname{supp} \mathcal{F} \cap X'$

5.3. Prolongement d'un morphisme aux complétés. Soient X et Y deux schémas localement noethérien et $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme de schémas. Soient X' un fermé de X et Y' un fermé de Y tel que $f(X') \subset Y'$. On peut toujours trouver un faisceau cohérent d'Idéaux $\mathcal{I}$ de $\mathcal{O}_X$ et un faisceau cohérent d'Idéaux $\mathcal{K}$ de $\mathcal{O}_Y$ tels que

$$\operatorname{supp}(\mathcal{O}_X/\mathcal{I}) = X' \qquad \operatorname{supp}(\mathcal{O}_Y/\mathcal{K}) = Y' \qquad \text{et } f^*(\mathcal{K}) \subset \mathcal{I}$$

On a alors pour tout n : $f^*(\mathcal{K}^n) \subset \mathcal{I}^n$.

Soient $X'_n = (X', \mathcal{O}_X/\mathcal{I}^{n+1})$ et $Y'_n = (Y', \mathcal{O}_Y/\mathcal{K}^{n+1})$, on déduit de f un morphisme de schémas $f'_n : X'_n \longrightarrow Y'_n$. Les morphismes $(f'_n)_{n\in\mathbf{N}}$ forment un système inductif, d'où à la limite un morphisme de schémas formels :

$$\widehat{f} = \varinjlim f'_n : \widehat{X} \longrightarrow \widehat{Y}$$

On vérifie que $\widehat{f}$ ne dépend pas du choix de $\mathcal{I}$ et $\mathcal{K}$ (il suffit de le constater dans le cas affine) et on dit que c'est le *prolongement de f aux complétés* de X et Y le long de X' et Y'. L'application continue sous-jacente à $\widehat{f}$ est la restriction de f à X'.

On a : $\widehat{g \circ f} = \widehat{g} \circ \widehat{f}$ et $\widehat{id_X} = id_{\widehat{X}}$. On a ainsi défini un foncteur covariant $X \mapsto \widehat{X}$ de la catégorie des schémas dans celle des schémas formels.

Proposition 5.7 (EGA [11, 10.9.4]). *Soient X et Y deux S-schémas localement noethérien avec Y de type fini sur S. Soient X' un fermé de X et Y' un fermé de Y, f et g deux S-morphismes de X dans Y tels que $f(X') \subset Y'$ et $g(X') \subset Y'$. Alors : $\widehat{f} = \widehat{g}$ si et seulement si f et g coïncident dans un voisinage de X'.*

Démonstration. Si f et g coïncident dans un voisinage de X', on a d'après les définitions $\widehat{f} = \widehat{g}$.

Réciproquement supposons $\widehat{f} = \widehat{g}$, et montrons que f et g coïncident dans un voisinage de X'. La question étant locale, on peut supposer X et Y affines noethériens $X = \operatorname{Spec} B$, $Y = \operatorname{Spec} C$ et $S = \operatorname{Spec} A$ affine, C étant une A-algèbre de type fini. Les morphismes f et g proviennent d'homomorphismes de A-algèbres $\rho, \sigma : C \to B$, qui ont même prolongement par continuité aux séparés complétés.

D'après prop. 5.5, pour tout $s \in C$ $\rho(s) = \sigma(s)$ dans un voisinage de X' (dépendant de s). Par hypothèse C est de type fini sur A, il existe donc un voisinage V de X' tel que $\rho(s)$ et $\sigma(s)$ coïncident dans V pour tout $s \in C$. Alors f et g coïncident dans tout ouvert affine inclus dans V, donc dans un voisinage de X'. $\square$

Chapitre 9

Théorème de comparaison

1. Le théorème de finitude

1.1. Rappels et résultats préliminiares. Nous utiliserons fréquemment le résultat suivant (EGA [12, III, 3.2.1])

THÉORÈME 1.1. *Soient Y un schéma localement noethérien, $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme propre. Pour tout $\mathcal{O}_X$-Module cohérent $\mathcal{F}$ les $\mathcal{O}_Y$-Modules $R^q f_*(\mathcal{F})$ sont cohérents pour tout $q \geq 0$.*

Rappelons que l'on démontre d'abord ce théorème pour un morphisme f projectif (EGA [12, III, 2.2.1] Théorème de SERRE), puis on démontre le cas général en se ramenant au cas projectif par récurrence noethérienne, dévissage, et en utilisant le lemme de CHOW. Rappelons d'autre part que si f est séparé quasi-compact, et si $\mathcal{F}$ est un $\mathcal{O}_X$-Module quasi-cohérent, alors pour tout ouvert affine U de Y on a :

$$\Gamma(U, R^q f_*(\mathcal{F})) = H^q(f^{-1}(U), \mathcal{F}) \qquad [12, \text{III}, 1.4.11]$$

On obtient donc dans le cas affine :

COROLLAIRE 1.2. *Soient A un anneau noethérien, X un A-schéma propre. Pour tout $\mathcal{O}_X$-Module cohérent $\mathcal{F}$ les A-modules $H^q(X, \mathcal{F}), (q \geq 0)$ sont de type fini.*

1.2. Généralisation.

THÉORÈME 1.3 (EGA [12, III, cor. 3.3.2]). *Soient A un anneau noethérien, $\mathcal{I}$ un idéal de A, X un A-schéma propre, $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$-Module cohérent. Alors pour tout $p \geq 0$ la somme directe*

$$N = \bigoplus_{k \geq 0} H^p(X, \mathcal{I}^k \mathcal{F})$$

est un module de type fini sur la A-algèbre graduée $S = \bigoplus_{k \geq 0} \mathcal{I}^k$.

DÉMONSTRATION. Soit $f : X \to \operatorname{Spec} A$ le morphisme structural, et posons

$$\mathcal{S} = \widetilde{S}, \mathcal{S}' = f^*(\widetilde{S}), \mathcal{M} = \bigoplus_{k \geq 0} \mathcal{I}^k \mathcal{F}$$

On a alors trivialement $R^p f_*(\mathcal{M}) = \widetilde{N}$, donc « N est un S-module de type fini » équivaut à « $R^p f_*(\mathcal{M})$ est un $\mathcal{S}$-module de type fini ».

Considérons le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd} X & X' \arrow[l, "g'"'] \arrow[d, "f'"] \arrow[dl, "h"'] \\ \operatorname{Spec} A \arrow[from=u, "f"'] & \operatorname{Spec} S \arrow[l, "g"] \end{tikzcd}$$

où X' est obtenu par changement de base (donc $X' = \mathrm{Spec}(\mathcal{S}')$).

On peut à l'aide de ce diagramme ramener le problème à un problème sur les $\mathcal{O}_{X'}$-Modules, où X' est un schéma, et non plus à un problème sur les $\mathcal{S}'$-Modules, de sorte qu'on pourra appliquer le théorème 1.1.

En effet, puisque g est affine, g' l'est aussi ; soit $\mathcal{M}'$ le $\mathcal{O}_{X'}$-Module associé au $\mathcal{S}'$-Module quasi-cohérent $\mathcal{M}$. On a par définition

$$\mathcal{M} = g'_*(\mathcal{M}')$$

De plus $\mathcal{F}$ étant cohérent, $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{S}'$-Module de type fini, donc $\mathcal{M}'$ est un $\mathcal{O}_{X'}$-Module de type fini ; or $h = g \circ f'$ est un morphisme de type fini et $\mathrm{Spec}\, A$ est noethérien, donc X' est noethérien. Il en résulte que $\mathcal{M}'$ est un $\mathcal{O}_{X'}$-Module cohérent. f' étant propre on déduit donc du théorème 1.1 que les $R^p f'_*(\mathcal{M}')$ sont des $\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}\, S}$-Modules cohérents.

Il reste à voir comment on peut exprimer $R^p f_*(\mathcal{M})$ à l'aide de $R^p f'_*(\mathcal{M}')$.

$R^p f_*(\mathcal{M}) = R^p f_*(g'_*(\mathcal{M}')) \xrightarrow{\sim} R^p h_*(\mathcal{M}')$, et il est facile de vérifier que c'est un homomorphisme de $\mathcal{S}$-Modules.

De plus puisque f' est séparé quasi-compact et g affine, l'homomorphisme de $\mathcal{S}$-Modules

$$R^p h_*(\mathcal{M}') = R^p (g \circ f')_*(\mathcal{M}') \longrightarrow g_*(R^p f'_*(\mathcal{M}'))$$

est bijectif.

Puisque les $R^p f'_*(\mathcal{M}')$ sont cohérents et que g est affine, il en résulte donc que les $R^p f_*(\mathcal{M})$ sont des $\mathcal{S}$-Modules de type fini pour tout $p \geq 0$, d'où le théorème. □

2. Commutation des limites projective aux H^q

Théorème 2.1 (EGA [12, 0_{III}, Prop. 13.3.1]). *Soient X un schéma, $(\mathcal{F}_k)_{k\in\mathbf{N}}$ un système projectif strict de $\mathcal{O}_X$-Modules quasi-cohérents, et posons :*

$$\mathcal{F} = \varprojlim_k \mathcal{F}_k$$

Alors pour tout $n \geq 0$ l'homorphisme canonique

$$h_n : H^n(X, \mathcal{F}) \longrightarrow \varprojlim_k H^n(X, \mathcal{F}_k)$$

est surjectif. Si de plus, pour une valeur de n, le système projectif des

$$(H^{n-1}(X, \mathcal{F}_k))_{k\in\mathbf{N}}$$

vérifie la condition (ML) de Mittag-Leffler *h_n est un isomorphisme.*

Rappelons qu'un système projectif $(A_\alpha)_\alpha$ est *strict*, si les morphismes de transition $u_{\alpha\beta} : A_\beta \to A_\alpha$ pour $\beta \geq \alpha$ sont *surjectifs*.

Le système projectif $(A_\alpha)_\alpha$ vérifie la condition (ML) de Mittag-Leffler, si pour tout α il existe $\beta \geq \alpha$ tel que pour tout $\gamma \geq \beta$:

$$u_{\alpha\beta}(A_\beta) = u_{\alpha\gamma}(A_\gamma)$$

Un système projectif strict vérifie évidemment (ML).

La cohomologie calculée dans la catégorie des faisceaux de $\mathcal{O}_X$-Modules ou des faisceaux en groupes abéliens étant la même, il suffit de montrer les propriétés des h_n en tant que morphismes de groupes abéliens, les $(\mathcal{F}_k)_k$ étant considérés comme des faisceaux en groupes abéliens. La démonstration du théorème 2.1 sera donné plus loin (page 102).

Notations. – $\mathcal{S}P_X$ (resp. $\mathcal{S}P$) catégorie abélienne des systèmes projectifs de faisceaux en groupes abéliens sur X (resp. de groupes abéliens).

$\mathcal{A}b_X$ (resp. $\mathcal{A}b$) catégorie abélienne des faisceaux en groupes abéliens sur X (resp. des groupes abéliens).

On a alors les foncteurs exacts à gauche:

$$\begin{aligned} \varprojlim : \mathcal{S}P_X &\longrightarrow \mathcal{A}b_X & \varprojlim : \mathcal{S}P &\longrightarrow \mathcal{A}b \\ (\mathcal{F}_k)_k &\longmapsto \varprojlim_k \mathcal{F}_k & (A_k)_k &\longmapsto \varprojlim_k A_k \\ \mathbf{\Gamma} : \mathcal{S}P_X &\longrightarrow \mathcal{S}P & \Gamma : \mathcal{A}b_X &\longrightarrow \mathcal{A}b \\ (\mathcal{F}_k)_k &\longmapsto (\Gamma(X,\mathcal{F}_k))_k & \mathcal{F} &\longmapsto \Gamma(X,\mathcal{F}) \end{aligned}$$

Comme on a $\Gamma(X, \varprojlim_k \mathcal{F}_k) = \varprojlim_k \Gamma(X,\mathcal{F}_k)$ pour tout $(\mathcal{F}_k)_k \in \mathcal{S}P_X$ la définition de $\varprojlim$ nous dit que

$$\Gamma \circ \varprojlim = \varprojlim \circ \mathbf{\Gamma} : \mathcal{S}P_X \longrightarrow \mathcal{A}b$$

Les quatre catégories abéliennes considérées ayant des générateurs et des limites inductives exactes ont assez d'injectifs. On peut donc parler des foncteurs dérivés des foncteurs précédents. En notant $\varprojlim^{(p)} = R^p \varprojlim$ (resp. $\varprojlim^{(p)} = R^p \varprojlim$) les foncteurs dérivés droit de $\varprojlim$ (resp. $\varprojlim$) on a alors la

PROPOSITION 2.2. *Il existe deux suites spectrales ayant même aboutissement et dont les termes initiales sont*

$$'E_2^{pq} = \varprojlim^{(p)} H^q(X,\mathcal{F}_k) \implies E^{p+q} \impliedby {''E_2^{pq}} = H^p(X, \varprojlim^{(q)}(\mathcal{F}_k))$$

DÉMONSTRATION. Cela résulte de la suite spectrale d'un foncteur composé, pourvu que les conditions du théorème 2.4.1 de Tôhoku [8] soient remplis, à savoir que le premier foncteur du foncteur composé envoie les objets injectif en objets acycliques pour le second foncteur. Etudions d'un peu plus près les injectifs de $\mathcal{S}P_X$.

LEMME 2.3. *Soit $\mathcal{I}_\bullet = (\mathcal{I}_k)_k$ un objet injectif de $\mathcal{S}P_X$. Alors:*

(1) Pour tout $k \in \mathbf{N}$, $\mathcal{I}_k$ est un objet injectif de $\mathcal{A}b_X$

(2) $\varprojlim \mathcal{I}_\bullet$ est un objet injectif de $\mathcal{A}b_X$

(3) $(\Gamma(X,\mathcal{I}_k))_k = \mathbf{\Gamma}(\mathcal{I}_\bullet)$ est un objet injectif de $\mathcal{S}P$

DÉMONSTRATION. Pour tout $k \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$ et tout $\mathcal{A} \in \mathcal{A}b_X$ soit $\mathcal{A}_\bullet^{(k)} = (\mathcal{A}_\ell^{(k)})_{\ell\in\mathbf{N}}$ le système projectif défini par:

$$\mathcal{A}_\ell^{(k)} = \begin{cases} \mathcal{A} & \text{pour } \ell \leq k \\ 0 & \text{pour } \ell > k \end{cases}$$

avec les homomorphismes de transition évidents. On vérifie facilement que

$$(*) \qquad \begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}b_X}(\mathcal{A},\mathcal{I}_k) &= \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}P_X}\left(\mathcal{A}_\bullet^{(k)},\mathcal{I}_\bullet\right) \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}b_X}\left(\mathcal{A},\varprojlim \mathcal{I}_\bullet\right) &= \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}P_X}\left(\mathcal{A}_\bullet^{(\infty)},\mathcal{I}_\bullet\right) \end{aligned}$$

Pour tout k les foncteurs $\mathcal{A} \mapsto \mathcal{A}_\bullet^{(k)}$ étant exact, ceci prouve que les foncteurs à gauche de $(*)$ sont exacts, d'où (1) et (2).

Soit $\mathcal{SPP}_X$ la catégorie abélienne des systèmes projectifs de préfaisceaux en groupes abéliens sur X.

Si A_X est le préfaisceau constant associé à $A \in \mathcal{A}b$, on a

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathcal{SP}}\left((A_k)_k, \mathbf{\Gamma}(\mathcal{I}_\bullet)\right) &= \mathrm{Hom}_{\mathcal{SPP}_X}\left((A_{kX})_k, \mathcal{I}_\bullet\right) = \\ &= \mathrm{Hom}_{\mathcal{SP}_X}\left((a(A_{kX}))_k, \mathcal{I}_\bullet\right)\end{aligned}$$

en notant a le foncteur *faisceau associé*. Les foncteurs a et $A \mapsto A_X$ étant exacts il en résulte que le membre de gauche est un foncteur exact dans $\mathcal{SP}$, d'où (3). □

Démonstration de la proposition 2.2

Le lemme 2.3, (2) et (3) montre qu'on a deux suites spectrales ayant comme aboutissement

$$E^n = R^n(\varprojlim \circ \mathbf{\Gamma})(\mathcal{F}_k) = R^n(\Gamma \circ \varprojlim)(\mathcal{F}_k)$$

et dont les termes E_2^{pq} sont donnés par :

$$'E_2^{pq} = \varprojlim_k{}^{(p)} R^q\mathbf{\Gamma}(\mathcal{F}_k) \qquad\qquad ''E_2^{pq} = H^p(X, \varprojlim_k{}^{(q)}(\mathcal{F}_k))$$

Les dérivés de $\mathbf{\Gamma}$ peuvent être calculé par « composants » et le lemme 2.3, (1) montre alors que

$$R^q\mathbf{\Gamma}(\mathcal{F}_k) = (H^q(X, \mathcal{F}_k))_k$$

d'où la proposition 2.2. □

Proposition 2.4. *Pour tout $p \geq 2$ les foncteurs*

$$\varprojlim{}^{(p)} : \mathcal{SP} \longrightarrow \mathcal{A}b$$

sont nuls.

Démontrons trois lemmes :

Lemme 2.5. *Soit $I_\bullet = (I_k)_k$ un objet injectif de $\mathcal{SP}$. Alors $(I_k)_k$ est un système projectif strict et a fortiori vérifie (ML).*

Démonstration. Avec les notations analogues à celles du lemme 2.3 on a pour $A \in \mathcal{A}b$

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{SP}}\left(A_\bullet^{(k)}, I_\bullet\right) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}b}(A, I_k)$$

et pour $A = \mathbf{Z}$ le morphisme $I_k \to I_h$ pour $k \geq h$ se déduit de l'injection canonique $A^{(h)} \to A^{(k)}$. Le foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathcal{SP}}(\bullet, I_\bullet)$ étant exact, $I_k \to I_h$ est surjectif. □

Lemme 2.6. *Soit $0 \to A_\bullet \xrightarrow{u_\bullet} B_\bullet \xrightarrow{v_\bullet} C_\bullet \to 0$ une suite exacte dans $\mathcal{SP}$. Si $A_\bullet$ vérifie la condition (ML), la suite*

$$0 \to \varprojlim_k A_k \xrightarrow{u} \varprojlim_k B_k \xrightarrow{v} \varprojlim_k C_k \to 0$$

est exacte.

Démonstration. voir EGA [12, 0_{III}, Prop. 13.2.2] □

Lemme 2.7. *Soit $A_\bullet = (A_k)_k \in \mathcal{SP}$ un système projectif vérifiant (ML). Alors $\varprojlim_k{}^{(p)} A_k = 0$ pour tout $p \geq 1$.*

DÉMONSTRATION. *du lemme 2.7 et de la proposition 2.4*

Raisonnons par récurrence sur p.

Pour $p = 1$ plongeons $A_\bullet$ dans un injectif $I_\bullet$ de $\mathcal{S}P$, de sorte qu'on a une suite exacte

$$0 \to A_\bullet \longrightarrow I_\bullet \longrightarrow Q_\bullet \to 0$$

d'où une suite exacte de cohomologie

$$0 \to \varprojlim_k A_k \longrightarrow \varprojlim_k I_k \longrightarrow \varprojlim_k Q_k \xrightarrow{\delta} \varprojlim_k{}^{(1)} A_k \to 0$$

Le morphisme $\delta = 0$ par le lemme 2.6, donc $\varprojlim_k^{(1)} A_k = 0$.

Pour $p \geq 2$ le lemme 2.7 est un cas particulier de la proposition 2.4. Supposons donc le lemme 2.7 et la proposition 2.4 valables jusqu'à $p-1$ (pour $p-1 = 1$ la proposition 2.4 est vide).

Soit $B_\bullet$ un objet quelconque de $\mathcal{S}P$, et plongeons le dans un injectif, d'où la suite exacte

$$0 \to B_\bullet \longrightarrow I_\bullet \longrightarrow Q_\bullet \to 0$$

La suite exacte de cohomologie fournit des isomorphismes

$$\varprojlim_k{}^{(p-1)} Q_k \xrightarrow{\sim} \varprojlim_k{}^{(p)} B_k$$

Or d'après le lemme 2.5 $I_\bullet$ vérifie (ML), donc aussi son quotient $Q_\bullet$, voir EGA [12, 0_{III}, Prop. 13.2.1]. L'hypothèse de récurrence montre que $\varprojlim_k^{(p-1)} Q_k = 0$, donc $\varprojlim_k^{(p)} B_k = 0$, d'où le lemme 2.7 et la proposition 2.4. $\square$

PROPOSITION 2.8. *(1) Pour tout système projectif $\mathcal{F}_\bullet$ de faisceaux quasi-cohérents sur X, considérés comme objets de $\mathcal{S}P_X$, on a*

$$\underleftarrow{\mathrm{Lim}}^{(p)}\, \mathcal{F}_\bullet = 0 \quad \text{pour } p \geq 2$$

(2) Si de plus pour tout ouvert affine U de X le système $\Gamma(U, \mathcal{F}_k)$ vérifie (ML) (ce qui sera en particulier le cas si $\mathcal{F}_\bullet$ est un système projectif strict de faisceaux quasi-cohérents), alors

$$\underleftarrow{\mathrm{Lim}}^{(p)}\, \mathcal{F}_\bullet = 0 \quad \text{pour } p \geq 1$$

DÉMONSTRATION. Soit $\mathcal{PA}b_X$ la catégorie abélienne des préfaisceaux en groupes abéliens sur X. Le foncteur $\underleftarrow{\mathrm{Lim}}$ peut être exprimé comme composé des foncteurs $i : \mathcal{S}P_X \to \mathcal{S}PP_X$, du foncteur $\underleftarrow{\mathrm{Lim}}$ sur les préfaisceaux $\underleftarrow{\mathrm{Lim}} : \mathcal{S}PP_X \to \mathcal{PA}b_X$ et du foncteur exact *faisceau associé* $a : \mathcal{PA}b_X \to \mathcal{A}b_X$.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{S}P_X \arrow[r, "\underleftarrow{\mathrm{Lim}}"] \arrow[d, "i"'] & \mathcal{A}b_X \\ \mathcal{S}PP_X \arrow[r, "\underleftarrow{\mathrm{Lim}}"] & \mathcal{PA}b_X \arrow[u, "a"'] \end{tikzcd}$$

On a donc une suite spectrale

$$E_2^{pq} = a\left(U \mapsto \varprojlim_k{}^{(p)} H^q(U, \mathcal{F}_k)\right) \implies E^n = \underleftarrow{\mathrm{Lim}}^{(n)}(\mathcal{F}_\bullet)$$

Les $\mathcal{F}_k$ étant quasi-cohérents $H^q(U, \mathcal{F}_k) = 0$ pour $q > 0$ pour tout ouvert affine, donc $E_2^{pq} = 0$ pour $q \neq 0$. La suite spectrale dégénère donc et on a: $E_2^{n,0} = E_\infty^{n,0} = E^n$.

Ceci signifie que $\varprojlim^{(n)}(\mathcal{F}_k) = a(U \mapsto \varprojlim^{(n)} \Gamma(U, \mathcal{F}_k))$, donc que $\varprojlim^{(n)}(\mathcal{F}_k)$ est le faisceau associé au préfaisceau

$$U \mapsto \varprojlim_k{}^{(n)} \Gamma(U, \mathcal{F}_k))$$

La proposition 2.8 résulte maintenant trivialement de la proposition 2.4 et du lemme 2.7. □

Démonstration. *du théorème 2.1*

Les proposition 2.2 et 2.4 montrent que la première suite spectrale vérifie $'E_2^{pq} = 0$ pour $p \neq 0, 1$. Les différentielles d_r^{pq} sont donc nulles pour $r \geq 2$, donc $'E_2^{pq} = {'E_\infty^{pq}}$ et appliquant Cartan-Eilenberg [3, XV, Prop. 5.5] on obtient la suite exacte

$$0 \to {'E_2^{1,n-1}} \longrightarrow E^n \longrightarrow {'E_2^{0,n}} \to 0$$

D'autre part la proposition 2.8 montre que la 2ème suite spectrale est dégénérée: $''E_2^{pq} = 0$ pour $q \neq 0$, donc $E^n = {''E_2^{n,0}}$, on obtient donc finalement la suite exacte

$$0 \to {'E_2^{1,n-1}} \longrightarrow {''E_2^{n,0}} \longrightarrow {'E_2^{0,n}} \to 0$$

et en remplaçant les termes de la proposition 2.2

$$0 \to \varprojlim_k{}^{(1)} H^{n-1}(X, \mathcal{F}_k) \longrightarrow H^n(X, \varprojlim_k \mathcal{F}_k) \longrightarrow \varprojlim_k H^n(X, \mathcal{F}_k) \to 0$$

Ce résultat est plus précis que l'énoncé du théorème 2.1, on conclut par 2.7. □

3. Le théorème de comparaison

3.1. Forme affine.

Théorème 3.1. *Soient $f : X \to Y = \operatorname{Spec} A$ un morphisme propre de schémas noethériens, $Y' = V(\mathfrak{a})$ un fermé de Y, $\mathcal{I} = \widetilde{\mathfrak{a}}$ l'Idéal cohérent de $\mathcal{O}_Y$, $X' = f^{-1}(Y')$.*

Soit $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$-Module cohérent, et posons

$$\mathcal{F}_k = \mathcal{F}/\mathfrak{a}^{k+1}\mathcal{F} = \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} f^*(\mathcal{O}_Y/\mathcal{I}^{k+1})$$

Alors :

1. *La filtration sur $H^n(X, \mathcal{F})$ définie par les noyaux des homomorphismes*
$$H^n(X, \mathcal{F}) \to H^n(X, \mathcal{F}_k)$$
est $\mathfrak{a}$-bonne, et l'homomorphisme canonique
$$\varphi_n : \widehat{H^n(X, \mathcal{F})} \to \varprojlim_k H^n(X, \mathcal{F}_k)$$
(où le 1er membre est le complété pour la topologie $\mathfrak{a}$-adique) est un isomorphisme topologique.
2. *Pour tout n le système projectif $(H^n(X, \mathcal{F}_k))_{k \geq 0}$ vérifie (ML) et l'homomorphisme canonique*
$$\psi_n : H^n(\widehat{X}, \widehat{\mathcal{F}}) \to \varprojlim_k H^n(X, \mathcal{F}_k)$$
est un isomorphisme.

Corollaire 3.2. *Sous les conditions du théorème 3.1 on a un isomorphisme canonique*

$$\rho_n : \widehat{H^n(X, \mathcal{F})} \xrightarrow{\sim} H^n(\widehat{X}, \widehat{\mathcal{F}})$$

L'existence des divers homomorphismes canoniques, ainsi que la formule $\varphi_n = \psi_n \circ \rho_n$, sont très faciles à prouver, et ce sera fait pour plus de clarté dans le cas global au § 3.2.

Démonstration. L'entier n étant fixé, posons

$$H = H^n(X, \mathcal{F}), \qquad H_k = H^n(X, \mathcal{F}_k)$$

On a un homomorphisme canonique $H \to H_k$ déduit de l'homomorphisme $\mathcal{F} \to \mathcal{F}_k$, et une suite exacte de cohomologie

$$H^n(X, \mathfrak{a}^{k+1}\mathcal{F}) \to H \to H_k \xrightarrow{\partial} H^{n+1}(X, \mathfrak{a}^{k+1}\mathcal{F}) \to H^{n+1}(X, \mathcal{F})$$

Nous poserons

$$\begin{aligned} R_k &= \operatorname{Ker}(H \to H_k) = \operatorname{Im}(H^n(X, \mathfrak{a}^{k+1}\mathcal{F}) \to H^n(X, \mathcal{F})) \\ Q_k &= \operatorname{Coker}(H \to H_k) = \operatorname{Ker}(H^{n+1}(X, \mathfrak{a}^{k+1}\mathcal{F}) \to H^{n+1}(X, \mathcal{F})) = \\ &\phantom{= \operatorname{Coker}(H \to H_k)} = \operatorname{Im}(H^n(X, \mathcal{F}_k) \xrightarrow{\partial} H^{n+1}(X, \mathfrak{a}^{k+1}\mathcal{F})) \end{aligned}$$

de sorte qu'on a la suite exacte

$$0 \to R_k \to H \to H_k \to Q_k \to 0$$

Posons $S = \oplus_{k \geq 0} \mathfrak{a}^k$, qui est une A-algèbre de type finie, donc noethérienne. Les modules $E = \oplus_{k \geq 0} H^n(X, \mathfrak{a}^k \mathcal{F})$, $M = \oplus_{k \geq 0} H^n(X, \mathfrak{a}^{k+1}\mathcal{F})$ et $R = \oplus_{k \geq 0} R_k$ sont munis canoniquement d'une structure de S-modules gradués à l'aide des homomorphismes:

$$\mu^k_{a,m} : H^n(X, \mathfrak{a}^k\mathcal{F}) \to H^n(X, \mathfrak{a}^{k+m}\mathcal{F}) \quad \text{pour } a \in \mathfrak{a}^m$$

En effet, c'est clair pour E et M, et d'autre part le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} H^n(X, \mathfrak{a}^{k+1}\mathcal{F}) \arrow[r, "\mu^{k+1}_{a,m}"] \arrow[d] & H^n(X, \mathfrak{a}^{k+m+1}\mathcal{F}) \arrow[d] \\ H^n(X, \mathcal{F}) \arrow[r, "\times a"] & H^n(X, \mathcal{F}) \end{tikzcd}$$

montre que pour $a \in \mathfrak{a}^m$

$$\begin{aligned} aR_k &= a \operatorname{Im}(H^n(X, \mathfrak{a}^{k+1}\mathcal{F}) \to H^n(X, \mathcal{F})) \\ &\subset \operatorname{Im}(H^n(X, \mathfrak{a}^{k+m+1}\mathcal{F}) \to H^n(X, \mathcal{F})) = R_{k+m} \end{aligned}$$

donc $\mathfrak{a}^m R_k \subset R_{k+m}$, d'où notre assertion. Ceci prouve aussi que R est quotient du sous S-module gradué M de E.

Or d'après le §1 théorème 1.3, E est un S-module gradué de type fini, donc, puisque S est noethérien, M et a fortiori R sont des S-modules de type finis. Il résulte donc de Bourbaki [2, III, §3, th. 1] que *la filtration R_k sur H est $\mathfrak{a}$-bonne*, donc définit sur H la topologie $\mathfrak{a}$-adique.

Passons à la démonstration du reste du théorème 3.1.

Soit $\gamma_m : H^{n+1}(X, \mathfrak{a}^{k+m+1}\mathcal{F}) \to H^{n+1}(X, \mathfrak{a}^{k+1}\mathcal{F})$ le morphisme déduit de l'injection canonique. Il est donc clair par définition de Q_k que $\gamma_m(Q_{k+m}) \subset Q_k$.

Supposons démontré le

Lemme 3.3. *Il existe $m > 0$ et k_0 tels que $\gamma_m(Q_{k+m}) = 0$ pour tout $k \geq k_0$.*

Démontrons alors le théorème 3.1.

De la fonctorialité de la suite exacte de cohomologie on déduit un diagramme commutatif de suites exactes :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & R_{k+m} \arrow[r] \arrow[d] & H \arrow[r] \arrow[d, equal] & H_{k+m} \arrow[r] \arrow[d] & Q_{k+m} \arrow[r] \arrow[d, "\gamma_m"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & R_k \arrow[r] & H \arrow[r] & H_k \arrow[r] & Q_k \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \tag{7}$$

Soit $k \geq k_0$. On a alors d'après le lemme 3.3

$$\mathrm{Im}(H_{k+m} \to H_k) \subset \mathrm{Ker}(H_k \to Q_k) = \mathrm{Im}(H \to H_k)$$

et d'autre part la commutativité de (7) montre que

$$\mathrm{Im}(H_{k+m} \to H_k) \supset \mathrm{Im}(H \to H_k)$$

On a donc pour $k \geq k_0$ $\mathrm{Im}(H_{k+m} \to H_k) = \mathrm{Im}(H \to H_k)$. Il en résulte donc que pour tout $\ell \geq k+m$

$$\mathrm{Im}(H_\ell \to H_k) = \mathrm{Im}(H \to H_k)$$

donc que le système projectif $(H_k)_{k\geq 0}$ vérifie (ML).

On en déduit donc du théorème de commutation (§2, théorème 2.1) que l'homomorphisme canonique

$$\psi_n : H^n(\widehat{X}, \widehat{\mathcal{F}}) \to \varprojlim_k H^n(X, \mathcal{F}_k)$$

est bijectif (puisque supp $\widehat{\mathcal{F}} \subset \widehat{X}$), d'où (2) du théorème 3.1.

D'autre part des suites exactes

$$0 \to R_k \to H \to H_k \to Q_k \to 0$$

on déduit les suites exactes

$$0 \to H/R_k \to H_k \to Q_k \to 0$$

qui forment évidemment un système projectif de suites exactes. Or le sytème projectif (H/R_k) est strict, R_k étant une filtration, donc a fortiori il vérifie (ML).

D'après le §2 lemme 2.6 on en déduit que la suite

$$0 \to \varprojlim_k (H/R_k) \to \varprojlim_k H_k \to \varprojlim_k Q_k \to 0$$

est exacte. Or d'après le lemme 3.3, $\varprojlim_k Q_k = 0$, donc on a un isomorphisme topologique

$$\varprojlim_k (H/R_k) \xrightarrow{\sim} \varprojlim_k H_k$$

Enfin (R_k) étant une filtration $\mathfrak{a}$-bonne de H définit sur H la topologie $\mathfrak{a}$-préadique, donc

$$\varprojlim_k (H/R_k) = \widehat{H}$$

d'où le (1) du théorème 3.1. □

Reste donc à démontrer le lemme 3.3.

Posons $N = \oplus_{k\geq 0} H^{n+1}(X, \mathfrak{a}^{k+1}\mathcal{F})$, $Q = \oplus_{k\geq 0} Q_k$.

(1) On montre facilement que Q est un sous S-module gradué de N, qui est de type fini d'après le §1 théorème 1.3. Q est donc aussi un S-module gradué de type fini, S étant noethérien. D'après le spropriétés générales des modules gradués de type fini, on voit donc qu'il existe k_0 et h tel que

$$Q_{k+h} = S_h Q_k \qquad \text{pour } k \geq k_0 \text{ (avec } S_h = \mathfrak{a}^h)$$

(2) Il existe $\nu > 0$ tel que $\alpha_\nu(S_\nu)Q = 0$ où $\alpha_m : \mathfrak{a}^m \to A$ est l'injection canonique. En effet, comme $\mathfrak{a}^{k+1}\mathcal{F}_k = 0$, $Q_k = \mathrm{Im}(H^n(X, \mathcal{F}_k) \to H^{n+1}(X, \mathfrak{a}^{k+1}\mathcal{F}))$ est annulé par $\mathfrak{a}^{k+1}$ en tant que A-module. Dans le S-module Q, cela signifie que

$$\alpha_{k+1}(S_{k+1})Q_k = 0$$

Il résulte donc de (1) qu'il existe $\nu > 0$ tel que

$$\alpha_\nu(S_\nu)Q = 0$$

Démonstration. *du lemme 3.3.*

Soit $a \in \mathfrak{a}^m$. On a la factorisation évidente :

$$\mu_{a,0}^{k+1} : H^{n+1}(X, \mathfrak{a}^{k+1}\mathcal{F}) \xrightarrow{\mu_{a,m}^{k+1}} H^{n+1}(X, \mathfrak{a}^{k+m+1}\mathcal{F}) \xrightarrow{\gamma_m} H^{n+1}(X, \mathfrak{a}^{k+1}\mathcal{F})$$

On en déduit, puisque $Q_k = \mathrm{Ker}(H^{n+1}(X, \mathfrak{a}^{k+1}\mathcal{F}) \to H^{n+1}(X, \mathcal{F}))$ est un sous A-module de $H^{n+1}(X, \mathfrak{a}^{k+1}\mathcal{F})$ que

$$\gamma_m(S_m Q_k) = \alpha_m(S_m)Q_k$$

dans le S-module N.

Soit donc m un multiple de h plus grand que ν. Comme par (1) pour $k \geq k_0$

$$Q_{k+m} = S_m Q_k$$

on a $\gamma_m(Q_{k+m}) = \gamma_m(S_m Q_k) = \alpha_m(S_m)Q_k \subset \alpha_\nu(S_\nu)Q_k = 0$ d'après le choix de ν, d'où le lemme 3.3. □

3.2. Forme globale.

Théorème 3.4. *Soient $f : X \to Y$ un morphisme propre de schémas noethériens, Y' un fermé de Y, $X' = f^{-1}(Y')$. Soi $\mathcal{I}$ un Idéal cohérent de définition de Y', et posons pour tout $k \geq 0$ et $\mathcal{O}_X$-Module $\mathcal{F}$:*

$$\mathcal{F}_k = \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} f^*(\mathcal{O}_Y/\mathcal{I}^{k+1})$$

Pour tout $\mathcal{O}_X$-Module cohérent $\mathcal{F}$ le $\mathcal{O}_{\widehat{X}}$-Module $R^n\widehat{f}^*(\widehat{\mathcal{F}})$ est cohérent, et on a un diagramme commutatif d'isomorphisme topologiques

(8)
$$\begin{tikzcd} \widehat{R^n f_*(\mathcal{F})} \arrow[rr, "\rho_n"] \arrow[dr, "\varphi_n"'] & & R^n\widehat{f}_*(\widehat{\mathcal{F}}) \arrow[dl, "\psi_n"] \\ & \varprojlim_k R^n f_*(\mathcal{F}_k) & \end{tikzcd}$$

Démonstration. Soit $\mathcal{I}$ un Idéal cohérent de définition de Y', et posons $\mathcal{K} = f^*(\mathcal{I})\mathcal{O}_X$. Alors $\mathcal{K}$ est un Idéal cohérent de définition de X'.

Construction de φ_n

$\mathcal{F}_k$ est un $\mathcal{O}_X/\mathcal{K}^{k+1}$-Module, donc $R^n f_*(\mathcal{F}_k)$ est un $\mathcal{O}_Y/\mathcal{I}^{k+1}$-Module. On déduit donc de l'homomorphisme canonique $R^n f_*(\mathcal{F}) \to R^n f_*(\mathcal{F}_k)$ un homomorphisme canonique

$$R^n f_*(\mathcal{F}) \otimes_{O_Y} \left(O_Y/\mathcal{J}^{k+1}\right) \to R^n f_*(\mathcal{F}_k)$$

d'où par passage à la limite projective un homomorphisme

$$\varphi_n : \widehat{R^n f_*(\mathcal{F})} \to \varprojlim_k R^n f_*(\mathcal{F}_k)$$

qui est un homomorphisme continu de $\mathcal{O}_{\widehat{Y}}$-Modules topologiques par construction.

Construction de ψ_n

Soit $X_k = (X', \mathcal{O}_X/\mathcal{K}^{k+1})$ et considérons le diagramme commutatif suivant, où les flèches sont des morphismes canoniques d'espaces annelés :

$$\begin{tikzcd} X_k \arrow[r, "h_k"] \arrow[dr, "i_k"'] & \widehat{X} \arrow[d, "i"] \\ & X \end{tikzcd}$$

$\mathcal{F}$ étant cohérent on a $\widehat{\mathcal{F}} = i^*(\mathcal{F})$. De plus puisque $\operatorname{supp} \mathcal{F}_k \subset |\widehat{X}|$ on a

$$\mathcal{F}_k = i_{k*} {i_k}^* \mathcal{F}_k$$

i_k étant une immersion fermée, on a donc

$$H^n(X_k, i_k^*(\mathcal{F}_k)) = H^n(X, \mathcal{F}_k)$$

d'où un homomorphisme canonique

$$\begin{aligned} H^n(\widehat{X}, \widehat{\mathcal{F}}) &\to H^n(X_k, h_k^*(\widehat{\mathcal{F}})) \\ &= H^n(X_k, h_k^* i^*(\mathcal{F})) \\ &= H^n(X_k, i_k^*(\mathcal{F})) \\ &= H^n(X, \mathcal{F}_k) \end{aligned}$$

d'où par passage à la limite un homomorphisme

$$\psi_{n,X} : H^n(\widehat{X}, \widehat{\mathcal{F}}) \to \varprojlim_k H^n(X, \mathcal{F}_k)$$

Soit V un ouvert affine de Y. Appliquant cette construction à $f^{-1}(V)$ on en déduit des homomorphiosmes commutant aux restrictions

$$\psi_{n,V} : H^n(\widehat{X} \cap f^{-1}(V), \widehat{\mathcal{F}}) \to \varprojlim_k \Gamma(V, R^n f_*(\mathcal{F}_k))$$

d'où un homomorphisme

$$\psi_n : R^n \widehat{f}_*(\widehat{\mathcal{F}}) \to \varprojlim_k R^n f_*(\mathcal{F}_k)$$

Construction de ρ_n

Soit $j : \widehat{Y} \to Y$ le morphisme canonique d'espaces annelés. D'après le théorème 1.1 $R^n f_*(\mathcal{F})$ est un $\mathcal{O}_Y$-Module cohérent, donc

$$j^*(R^n f_*(\mathcal{F})) = \widehat{R^n f_*(\mathcal{F})}$$

j étant plat, on en déduit un homomorphisme canonique

$$\rho_n : \widehat{R^n f_*(\mathcal{F})} = j^*(R^n f_*(\mathcal{F})) \to R^n \widehat{f}_*(i^*(\mathcal{F})) = R^n \widehat{f}_*(\widehat{\mathcal{F}})$$

La démonstration de la commutativité du diagramme (8) du théorème 3.4 est facile et laissée au lecteur.

Démonstration du théorème 3.4

Puisque $R^n f^*(\mathcal{F})$ est un $\mathcal{O}_Y$-Module cohérent la définition du complété d'un Module montre que si V est un ouvert affine de Y :

$$\Gamma(V, \widehat{R^n f_*(\mathcal{F})}) = \widehat{\Gamma}(V, R^n f_*(\mathcal{F}))$$

où le 2è membre est le séparé complété pour la topologie $\Gamma(V, \mathcal{I}|V)$-préadique.

D'autre part par définition

$$\Gamma(V, \varprojlim_k R^n f_*(\mathcal{F}_k)) = \varprojlim_k \Gamma(V, R^n f_*(\mathcal{F}_k))$$

Le théorème 3.1 montre donc que φ_n est un isomorphisme topologique, ainsi que les homomorphisme $\psi_{n,V}$, donc aussi l'homomorphisme ψ_n par définition de $R^n f_*(\mathcal{F})$, d'où le théorème 3.4. $\square$

Chapitre 10

Théorème d'existence

1. Introduction

Dans tout cet exposé, on considère un anneau noethérien A et un idéal de définition I de A ; on posera $S = \operatorname{Spec}(A)$, $S' = V(I)$. Pout tout schéma X propre sur S, on désingera par $\widehat{X}$ le complété formel de X le long de la partie fermée $X' = h^{-1}(S')$ (où h est le morphisme structural) ; en particulier, $\widehat{S} = \operatorname{Spf} A$. Pour tout $\mathcal{O}_X$-Module cohérent $\mathcal{F}$, on notera $\widehat{\mathcal{F}}$ le complété de $\mathcal{F}$ le long de X', qui est un $\mathcal{O}_{\widehat{X}}$-Module cohérent. Pour tout morphisme (nécessairement propre) $f : X \to Y$ de S-schémas propres, on désignéras par $\widehat{f}$ le prolongement de f aux complétés.

Proposition 1.1 (EGA [12, III, Prop. 5.1.2]). *Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux $\mathcal{O}_X$-Modules cohérents ; on a pour tout $n > 0$ des isomorphismes*

$$H^n(X, \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} H^n(\widehat{X}, \widehat{\mathcal{F}})$$
$$Ext^n_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} Ext^n_{\mathcal{O}_{\widehat{X}}}(\widehat{\mathcal{F}}, \widehat{\mathcal{G}})$$

Démonstration. La première partie de la proposition résulte du théorème de comparaison et du fait que les $H^i(X, \mathcal{F})$ sont des A-modules de type fini, donc complets pour la topologie I-adique. D'autre part, soit $i_X : \widehat{X} \to X$ le morphisme canonique ; on a un isomorphisme

$$\varphi_0 : i_X^* \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{\widehat{X}}}(i_X^* \mathcal{F}, i_X^* \mathcal{G})$$

(l'isomorphisme φ_0 est défini en effet pour un morphisme plat i_X quelconque d'espaces annelés). On en déduit par l'algèbre homologique des homomorphismes :

$$\varphi_n : i_X^* \mathcal{E}xt^n_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \longrightarrow \mathcal{E}xt^n_{\mathcal{O}_{\widehat{X}}}(i_X^* \mathcal{F}, i_X^* \mathcal{G})$$

Les φ_n sont en effet des isomorphismes ; on peut en effet, pour le vérifier, supposer X affine et choisir une résolution libre $\mathcal{L}_\bullet$ de $\mathcal{F}$; $i_X^*(\mathcal{L}_\bullet)$ est alors une résolution libre de $i_X^*(\mathcal{F})$, d'où le résultat.

Soit $E(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ (resp. $E(\widehat{\mathcal{F}}, \widehat{\mathcal{G}})$) la suite spectrale des $\mathcal{E}xt$ sur X (resp. $\widehat{X}$) associé à $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ (resp. $\widehat{\mathcal{F}}, \widehat{\mathcal{G}}$).

Le morphisme plat i_X définit un homomorphisme de suites spectrales :

$$\psi : E(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \longrightarrow E(\widehat{\mathcal{F}}, \widehat{\mathcal{G}})$$

qui se réduit en degré 2 et en degré ∞ à :

$$\psi_2^{pq} : H^p(X, \mathcal{E}xt^q_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})) \longrightarrow H^p(\widehat{X}, \mathcal{E}xt^q_{\mathcal{O}_{\widehat{X}}}(\widehat{\mathcal{F}}, \widehat{\mathcal{G}}))$$
$$\psi_\infty^n : Ext^n_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \longrightarrow Ext^n_{\mathcal{O}_{\widehat{X}}}(\widehat{\mathcal{F}}, \widehat{\mathcal{G}})$$

Les ψ_2^{pq} sont des isomorphismes d'après les remarques précédentes ; les ψ_∞^n sont donc eux-mêmes des isomorphismes, ce qui démontre la proposition. □

COROLLAIRE 1.2. *Le foncteur $\mathcal{F} \longmapsto \widehat{\mathcal{F}}$ de la catégorie des $\mathcal{O}_X$-Modules cohérents dans la catégorie des $\mathcal{O}_{\widehat{X}}$-Modules cohérents est pleinement fidèle.*

DÉMONSTRATION. C'est un cas particulier de la proposition 1.1 □

2. Le théorème d'existence

THÉORÈME 2.1 (EGA [12, III, cor. 5.1.6]). *Sous les hypothèses du §1, le foncteur $\mathcal{F} \longmapsto \widehat{\mathcal{F}}$ est une équivalence de la catégorie des $\mathcal{O}_X$-Modules cohérents avec la catégorie des $\mathcal{O}_{\widehat{X}}$-Modules cohérents.*

La démonstration procède par étapes : d'abord dans le *cas projectif* (proposition 2.2 et corollaire 2.4). Ensuite, on passe au cas général par récurrence noethérienne, en appliquant le lemme de CHOW ([12, II, 5.6.1]).

2.1. Démonstration dans le cas projectif. En gardant les notations du §1, on pose en outre $S_k = \mathrm{Spec}(A/I^{k+1})$; pour tout $\widehat{S}$-schéma formel propre $\mathfrak{X}$, et tout $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$-Module cohérent $\mathcal{F}$, on pose $X_k = \mathfrak{X} \times_{\widehat{S}} S_k$, $\mathcal{F}_k = \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \mathcal{O}_{X_k} = \mathcal{F}/I^{k+1}\mathcal{F}$

$$\begin{tikzcd}
X_0 \arrow[r] \arrow[d, "f_0"] & X_1 \arrow[r] \arrow[d, "f_1"] & \dots \arrow[r] & X_k \arrow[r] \arrow[d, "f_k"] & \dots \arrow[r] & \mathfrak{X} \arrow[d, "f"] \\
S_0 \arrow[r] & S_1 \arrow[r] & \dots \arrow[r] & S_k \arrow[r] & \dots \arrow[r] & \widehat{S}
\end{tikzcd}$$

PROPOSITION 2.2 (EGA [12, III, Prop. 5.2.3]). *Soit $f : \mathfrak{X} \to \widehat{S}$ un morphisme propre de schémas formels, $\mathcal{L}$ un $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$-Module inversible ; on suppose que $\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}/I\mathcal{L}$ est ample. Pour tout $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$-Module $\mathcal{F}$ et tout entier n, on pose $\mathcal{F}(n) = \mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{\otimes n}$. Alors, pour tout $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$-Module cohérent $\mathcal{F}$, il existe un entier n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$:*

(1) L'homomorphisme canonique $H^0(\mathfrak{X}, \mathcal{F}(n)) \to H^0(X_k, \mathcal{F}_k(n))$ est surjectif pour tout $k \geq 0$.

(2) On a $H^q(\mathfrak{X}, \mathcal{F}(n)) = 0$ pour tout $q > 0$.

(3) $\mathcal{F}(n)$ est engendré pas ses sections au-dessus de $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$.

DÉMONSTRATION. Posons $\mathcal{M}_k = I^k\mathcal{F}/I^{k+1}\mathcal{F}$, $\mathcal{M}_k(n) = I^k\mathcal{F}(n)/I^{k+1}\mathcal{F}(n) = \mathcal{M}_k \otimes_{\mathcal{O}_{X_0}} \mathcal{L}_0^{\otimes n}$; ces $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$-Modules, annulés par I, peuvent être considérés comme des $\mathcal{O}_{X_0}$-Modules cohérents. Comme f_0 est propre et que $\mathcal{L}_0$ est ample pour f_0, f_0 est projectif. Appliquons à la $\mathcal{O}_{X_0}$-algèbre graduée cohérente $\mathcal{S}_0 = \mathcal{O}_{X_0} \otimes_A (\oplus_{k \geq 0} I^k/I^{k+1})$ et au $\mathcal{S}_0$-Module gradué quasi-cohérent de type fini $\mathcal{M} = \oplus_{k \geq 0}\mathcal{M}_k$ la généralisation du théorème de SERRE déjà utilisée dans l'exposé précédent. On en déduit qu'il existe n_0 tel que pour $n \geq n_0$ et pour tout k, on ait:

$$H^q(X_0, \mathcal{M}_k(n)) = 0 \qquad \text{pour tout } q > 0$$

donc aussi $H^q(\mathfrak{X}, \mathcal{M}_k(n)) = 0$ pour $n \geq 0$ et $q > 0$. Appliquons la suite exacte de cohomologie à:

$$0 \to I^k\mathcal{F}(n)/I^{k+1}\mathcal{F}(n) \longrightarrow I^h\mathcal{F}(n)/I^{k+1}\mathcal{F}(n) \longrightarrow I^h\mathcal{F}(n)/I^k\mathcal{F}(n) \to 0$$

on trouve d'une part, pour $0 \leq h \leq k$, $n \geq n_0$, $q > 0$, par récurrence sur $k - h$:

$$H^q(\mathfrak{X}, I^h\mathcal{F}(n)/I^k\mathcal{F}(n)) = 0$$

et en particulier

$$H^q(\mathfrak{X}, \mathcal{F}(n)) = 0 \quad \text{pour } n \geq n_0, k \geq 0, q > 0$$

d'autre part, une autre partie de la suite exacte de cohomologie donne, pour $h = 0$ la suite exacte :

$$H^0(\mathfrak{X}, \mathcal{F}_k(n)) \longrightarrow H^0(\mathfrak{X}, \mathcal{F}_{k-1}(n)) \to 0$$

Il en résulte que, pour *tout* $q \geq 0$, le système projectif $(H^q(\mathfrak{X}, \mathcal{F}_k))_k$ vérifie la condition de MITTAG-LEFFLER , pour $n \geq n_0$.

Comme tout ouvert formel affine U de $\mathfrak{X}$ est un ouvert dans chacun des X_k, donc est tel que $H^q(U, \mathcal{F}_k(n)) = 0$ pour tout $q > 0$ et que $H^0(\mathfrak{X}, \mathcal{F}_k(n)) \to H^0(\mathfrak{X}, \mathcal{F}_h(n))$ est surjective pour $k \geq h$, on peut appliquer à $\mathfrak{X}$ et aux $\mathcal{F}_k(n)$ le théorème de commutation de la cohomologie aux limites projectives démontré dans l'exposé précédent ; autrement dit, pour $n \geq n_0$, l'homomorphisme $H^q(\mathfrak{X}, \mathcal{F}(n)) \to \varprojlim H^q(\mathfrak{X}, \mathcal{F}_k(n))$ est bijectif pour tout $q \geq 0$. On en conclut que $H^q(\mathfrak{X}, \mathcal{F}(n)) = 0$ pour $n \geq n_0$, $q \geq 1$ et que l'homomorphisme $H^0(\mathfrak{X}, \mathcal{F}(n)) \to H^0(\mathfrak{X}, \mathcal{F}_k(n))$ est surjectif pour tout k, c'est-à-dire (2) et (1). Par ailleurs, puisque $\mathcal{L}_0$ est ample, il existe n_1 tel que $\mathcal{F}_0(n)$ soit engendré par ses sections au-dessus de X_0 ; on peut supposer n_1 pris assez grand pour que l'homomorphisme $H^0(\mathfrak{X}, \mathcal{F}(n)) \to H^0(\mathfrak{X}, \mathcal{F}_0(n))$ soit surjectif pour n$\geq n_1$. Il existe donc un nombre fini de sections $s_i \in H^0(\mathfrak{X}, \mathcal{F}(n))$ dont les images dans $H^0(\mathfrak{X}, \mathcal{F}_0(n))$ engendrent $\mathcal{F}_0(n)$. Comme I est inclus dans l'idéal maximal de l'anneau local en tout point de $\mathfrak{X}$, il résulte de NAKAYAMA que les $(s_i)_i$ engendrent $\mathcal{F}(n)$. □

Nous dirons (EGA [12, III, 5.2.1]) qu'un $\mathcal{O}_{\widehat{X}}$-Module cohérent est *algébrisable* s'il est isomorphe au complété d'un $\mathcal{O}_X$-Module cohérent.

LEMME 2.3 (EGA [12, III, lemme 5.2.2]). *Soient $\mathcal{F}'$, $\mathcal{G}'$ deux $\mathcal{O}_{\widehat{X}}$-Modules algébrisables. Pour tout homomorphisme $u : \mathcal{F}' \to \mathcal{G}'$,* $\mathrm{Ker}(u)$, $\mathrm{Im}(u)$ *et* $\mathrm{Coker}(u)$ *sont algébrisables.*

DÉMONSTRATION. Si $\mathcal{F}' = \widehat{\mathcal{F}}$, $\mathcal{G}' = \widehat{\mathcal{G}}$, on sait que $u = \widehat{v}$, avec $v \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ (Corollaire 1.2). Le lemme des cinq montre alors que $\mathrm{Ker}(u)$, $\mathrm{Im}(u)$, $\mathrm{Coker}(u)$ sont isomorphes à $\widehat{\mathrm{Ker}(v)}$, $\widehat{\mathrm{Im}(v)}$ et $\widehat{\mathrm{Coker}(v)}$. □

COROLLAIRE 2.4. *Le théorème 2.1 est vrai pour un schéma projectif X sur S.*

DÉMONSTRATION. Soit $\mathcal{L}$ un $\mathcal{O}_X$-Module ample, $\widehat{\mathcal{L}}$ son complété ; $\widehat{\mathcal{L}}_0 = \mathcal{L}/I\mathcal{L}$ est un $\mathcal{O}_{X_0}$-Module ample, et on peut donc appliquer à tout $\mathcal{O}_{\widehat{X}}$-Module cohérent $\mathcal{F}$ la proposition 2.2, (3). On voit ainsi que $\mathcal{F}$ est quotient d'un $\mathcal{O}_{\widehat{X}}$-Module de la forme $(\widehat{\mathcal{L}}^{\otimes(-n)})^k$, puis, en réitérant l'opération, que $\mathcal{F}$ est conoyau d'un homomorphisme de deux tels $\mathcal{O}_{\widehat{X}}$-Modules ; comme $(\widehat{\mathcal{L}}^{\otimes(-n)})^k$ est le complété de $(\mathcal{L}^{\otimes(-n)})^k$, il résulte du lemme 2.3 ci-dessus que $\mathcal{F}$ est algébrisable. □

2.2. Passage au cas général.

LEMME 2.5 (EGA [12, III, lemme 5.3.1]). *Si $0 \to \mathcal{E}' \to \mathcal{F}' \to \mathcal{G}' \to 0$ est une suite exacte de $\mathcal{O}_{\widehat{X}}$-Modules cohérents, et si $\mathcal{E}'$ et $\mathcal{G}'$ sont algébrisables, $\mathcal{F}'$ est algébrisable.*

DÉMONSTRATION. On sait [12, 0_{III}, 12.3.2] que $\mathcal{F}'$ définit canoniquement un élément de $Ext^1_{\mathcal{O}_{\widehat{X}}}(\mathcal{G}', \mathcal{E}')$. Supposons que $\mathcal{G}' = \widehat{\mathcal{G}}$ et $\mathcal{E}' = \widehat{\mathcal{E}}$; le A-module $Ext^1_{\mathcal{O}_{\widehat{X}}}(\widehat{\mathcal{G}}, \widehat{\mathcal{E}})$ est isomorphe à $Ext^1_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{G}, \mathcal{E})$ (prop. 1.1) ; il existe donc une suite exacte $0 \to \mathcal{E} \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to 0$ telle que l'élément de $Ext^1_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{G}, \mathcal{E})$ correspondant à $\mathcal{F}$ ait pour image dans $Ext^1_{\mathcal{O}_{\widehat{X}}}(\widehat{\mathcal{G}}, \widehat{\mathcal{E}})$ l'élément correspondant à $\mathcal{F}'$; ceci entraîne que $\mathcal{F}'$ est isomorphe à $\widehat{\mathcal{F}}$. □

Lemme 2.6 (EGA [12, III, cor. 5.3.2]). *Soit* $u : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ *un homomorphisme de* $\mathcal{O}_{\widehat{X}}$*-Modules cohérents. Si* $\mathcal{G}$, $\mathrm{Ker}(u)$ *et* $\mathrm{Coker}(u)$ *sont algébrisables,* $\mathcal{F}$ *est algébrisable.*

Démonstration. En effet, ceci entraîne que $\mathrm{Im}(u)$ est algébrisable par le lemme 2.3, puis que $\mathcal{F}$ est algébrisable par le lemme 2.5. □

Lemme 2.7 (EGA [12, III, lemme 5.3.4]). *Soient* X *un schéma noethérien,* X' *un fermé de* X, $f : Z \to X$ *un morphisme propre,* $Z' = f^{-1}(X')$, $\widehat{X}$ *(resp.* $\widehat{Z}$*) le complété de* X *le long de* X' *(resp. de* Z *le long de* Z'*),* $\widehat{f} : \widehat{X} \to \widehat{Z}$ *le prolongement de* f *aux complétés. Soit* $\mathcal{M}$ *un Idéal cohérent de* $\mathcal{O}_X$ *tel que, si* $U = X - \mathrm{supp}\,(\mathcal{O}_X/\mathcal{M})$, *la restriction* $f^{-1}(U) \to U$ *soit un isomorphisme. Alors, pour tout* $\mathcal{O}_{\widehat{X}}$*-Module cohérent* $\mathcal{F}$, *il existe un entier* $n > 0$ *tel que le noyau et le conoyau de l'homomorphisme canonique* $\rho_{\mathcal{F}} : \mathcal{F} \longrightarrow \widehat{f}_*(\widehat{f}^*(\mathcal{F}))$ *soient annulés par* $\widehat{\mathcal{M}}^n$.

Démonstration. On peut se borner au cas où $X = \mathrm{Spec}(B)$ avec B noethérien ; alors $X' = V(K)$. On va montrer qu'on peut supposer B complet pour la topologie K-adique.

Soient en effet B_1 le séparé complété de B pour la topologie K-adique, $K_1 = K.B_1$, $X_1 = \mathrm{Spec}(B_1)$, $h : X_1 \to X$ le morphisme canonique ; on a $X'_1 = h^{-1}(X') = V(K_1)$. Posons $Z_1 = Z \times_X X_1$, $f_1 = f_{(X_1)} : Z_1 \to X_1$; soient $\widehat{X}_1$ (resp. $\widehat{Z}_1$) le complété de X_1 le long du fermé X'_1 (resp. $Z'_1 = f_1^{-1}(X'_1)$). Le prolongement $\widehat{h} : \widehat{X}_1 \to \widehat{X}$ de h aux complétés est un isomorphisme (correspondant à l'identité de B_1), ainsi donc que $\widehat{h}_{(\widehat{Z})} : \widehat{Z}_1 \to \widehat{Z}$; ces isomorphismes identifient $\widehat{f}$ et $\widehat{f}_1$. L'idéal cohérent $h^*(\mathcal{M})$ de $\mathcal{O}_{X_1}$ et l'ouvert $U_1 = h^{-1}(U)$ vérifient les mêmes hypothèses que $\mathcal{M}$ et U ; il suffit donc de démontrer le lemme quand B est un anneau adique noethérien et K un idéal de définition.

$$\begin{tikzcd}
& Z_1 \arrow[rr] \arrow[dd] & & Z \arrow[dd] \\
\widehat{Z}_1 \arrow[ur] \arrow[rr] \arrow[dd] & & \widehat{Z} \arrow[ur] \arrow[dd] & \\
& X_1 \arrow[rr] & & X \\
\widehat{X}_1 \arrow[ur] \arrow[rr] & & \widehat{X} \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Dans ce cas, on a $\widehat{X} = \mathrm{Spf}(B)$, et on sait que le faisceau cohérent $\mathcal{F}$ est le faisceau associé à un B-module de type fini N, c'est-à-dire que $\mathcal{F} = \widehat{\mathcal{G}}$, avec $\mathcal{G} = \widetilde{N}$. Par suite $\widehat{f}^*(\mathcal{F}) = \widehat{f^*(\mathcal{G})}$ (puisque $\widehat{\mathcal{G}} = i_X^*(\mathcal{G})$), doù $\widehat{f}_*(\widehat{f}^*(\mathcal{F}) = f_*\widehat{(f^*(\mathcal{G})})$ d'après le théorème de comparaison. En outre, l'homomorphisme

$$\rho_{\mathcal{F}} : \mathcal{F} \longrightarrow \widehat{f}_*(\widehat{f}^*(\mathcal{F}))$$

s'identifie canoniquement à l'homomorphisme complété :

$$\widehat{\rho_{\mathcal{G}}} : \widehat{\mathcal{G}} \longrightarrow (f_*\widehat{(f^*(\mathcal{G})})$$

Or le noyau et le conoyau de $\rho_{\mathcal{G}}$ sont des $\mathcal{O}_X$-Modules cohérents dont les restriction à U sont nulles ; ils sont donc annulés par une puissance de l'idéal $\mathcal{M}$, il en résulte que leurs complétés, qui s'identifient à $\mathcal{N}$ et $\mathcal{C}$, sont annulés par une puissance de $\widehat{\mathcal{M}}$, d'où le lemme. □

Démonstration. *du théorème d'existence 2.1 (cas général).*

On va utiliser le principe de récurrence noethérienne, en supposant donc le théorème 2.1 vrai pour tout sous-schéma fermé de X d'espace sous-jacent distinct de X. Appliquons le lemme de Chow ([12, II, 5.6.1]) au morphisme propre f :

$X \to \operatorname{Spec}(A)$; il existe un A-schéma projectif Z, un A-morphisme $g : Z \to X$ projectif et surjectif, et un ouvert U de X tel que la restriction $g^{-1}(U) \to U$ soit un isomorphisme.

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "g"] \arrow[dr] & X \arrow[d, "f"] \\ & \operatorname{Spec}(A) \end{tikzcd}$$

Soient $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_{\widehat{X}}$-Module cohérent, $\mathcal{N}$ (resp. $\mathcal{C}$) le noyau (resp. le conoyau) de l'homomorphisme canonique

$$\rho_{\mathcal{F}} : \mathcal{F} \longrightarrow \widehat{g}_*(\widehat{g}^*(\mathcal{F}))$$

$\widehat{g}^*(\mathcal{F})$ est algébrisable d'après le cas projectif, donc aussi $\widehat{g}_*(\widehat{g}^*(\mathcal{F}))$ par le théorème de comparaison. On va montrer qu'il existe un sous-schéma fermé T de X, ayant $X - U$ pour espace sous-jacent, tel que, si $j : T \to X$ est l'injection canonique, on ait $\mathcal{N} = \widehat{j}_*(\widehat{j}^*(\mathcal{N}))$ et $\mathcal{C} = \widehat{j}_*(\widehat{j}^*(\mathcal{C}))$. Comme $\widehat{j}^*(\mathcal{N})$ et $\widehat{j}^*(\mathcal{C})$ sont algébrisables par l'hypothèse de récurrence, il s'ensuit de là (via le théorème de comparaison) que $\mathcal{N}$ et $\mathcal{C}$ sont algébrisable, donc d'après le lemme 2.6 que $\mathcal{F}$ est algébrisable.

Soit $\mathcal{J} \subset \mathcal{O}_X$ un Idéal cohérent définissant un sous-schémas fermé d'espace sous-jacent $X - U$. D'après le lemme 2.7 une puissance $\widehat{\mathcal{J}}^n$ annule $\mathcal{N}$ et $\mathcal{C}$. Soit T le sous-schéma fermé de X défini par $\mathcal{J}^n$, ayant $X - U$ pour espace sous-jacent, $j : T \to X$ l'injection canonique, de sorte que le prolongement aux complété $\widehat{j} : \widehat{T} \to \widehat{X}$ est l'injection canonique.

Ceci achève la démonstration du théorème 2.1 $\square$

Remarque. On sait que la donnée d'un $\mathcal{O}_{\widehat{X}}$-Module cohérent équivaut, avec les notations de la proposition 2.2, à la donnée d'un système projectif de $\mathcal{O}_{X_k}$-Modules cohérents $\mathcal{F}_k$ tel que $\mathcal{F}_\ell = \mathcal{F}_k / I^\ell \mathcal{F}_k$ pour $\ell \leq k$. Lorsque A est un anneau local et I son idéal maximal, le théorème 2.1 (joint au théorème de comparaison de l'exposé précédent) permet de déduire des énoncés de géométrie algébrique sur A à partir d'énoncés analogues sur les anneaux locaux *artiniens* A/I^k.

Corollaire 2.8 (EGA [12, III, cor. 5.1.8]). *Sous les hypothèses du §1, l'application $Z \mapsto \widehat{Z}$ est une bijection de l'ensemble des sous-schémas fermés de X sur l'ensemble des sous-schémas formels fermés de $\widehat{X}$.*

Démonstration. En effet, l'équivalence de catégorie $\mathcal{F} \longmapsto \widehat{\mathcal{F}}$ établit une bijection entre sous-objets de $\mathcal{O}_X$ et sous-objets de $\mathcal{O}_{\widehat{X}}$, c'est-à-dire Idéaux cohérents de $\mathcal{O}_X$ et Idéaux cohérents de $\mathcal{O}_{\widehat{X}}$. Le corollaire résulte de la correspondance bijective entre sous-schémas fermés de X (resp. de $\widehat{X}$) et Idéaux cohérents de $\mathcal{O}_X$ (resp. $\mathcal{O}_{\widehat{X}}$). $\square$

3. Un théorème de comparaison des morphismes

Théorème 3.1 (EGA [12, III, Th. 5.4.1]). *Avec les notations de §1, soient X et Y deux A-schémas propres ; l'application*

$$\operatorname{Hom}_S(X, Y) \longrightarrow \operatorname{Hom}_{\widehat{S}}(\widehat{X}, \widehat{Y})$$
$$f \longmapsto \widehat{f}$$

est bijective.

On utilisera les lemmes suivants:

Lemme 3.2. *X est le seul voisinage de X' dans X.*

Démonstration. Soit U un voisinage ouvert de X' dans X ; comme h est propre, $h(X-U)$ est un fermé de S qui ne rencontre pas S' : ceci est impossible si $X-U$ n'est pas vide puisque, du fait que A est adique noethérien, S' contient tous les points fermés de S. □

Lemme 3.3. *Soient $f : X \to Y$ un morphisme propre de schémas localement noethériens, Y' un fermé de Y, $X' = f^{-1}(Y')$, $\widehat{Y}$ (resp. $\widehat{X}$) le complété le long de Y' (resp. X'), $\widehat{f} : \widehat{X} \to \widehat{Y}$ le prolongement de f aux complétés. Pour que $\widehat{f}$ soit un isomorphisme, il faut et il suffit qu'il existe un voisinage ouvert U de Y' tel que la restriction $f^{-1}(U) \to U$ soit un isomorphisme.*

Démonstration. La suffisance de la condition est immédiate ; pour montrer la nécessité, il suffit de prouver que pour tout $y \in Y'$, il existe un voisinage ouvert V_y de y tel que la restriction $f^{-1}(V_y) \to V_y$ soit un isomorphisme. Par hypothèse, la fibre $f^{-1}(y)$ est réduite à un point ; comme f est propre, le « Main Theorem » entraîne l'existence d'un voisinage ouvert U de y tel que la restriction $f^{-1}(U) \to U$ soit un morphisme fini. On est donc ramener à démontrer le lemme dans le cas où $Y = \operatorname{Spec} A, X = \operatorname{Spec} B$, le morphisme f correspondant à un homomorphisme d'anneaux $\varphi : A \to B$ faisant de B une A-algèbre finie. Si $Y' = V(I)$, on a alors $\widehat{Y} = \operatorname{Spf}(\widehat{A})$, $\widehat{X} = \operatorname{Spf}(\widehat{B})$, $\widehat{A}$ (resp. $\widehat{B}$) étant le séparé complété de A (resp. B) pour la topologie I-adique (resp. IB-adique) ; par hypothèse $\widehat{\varphi} : \widehat{A} \to \widehat{B}$ est un isomorphisme. Mais comme B est un A-module de type fini, $\widehat{B}$ est aussi le complété de B pour la topologie I-adique, et $\widehat{\varphi}$ est aussi le prolongement continu de φ considéré comme homomorphisme de A-modules ; on sait alors (d'après un exposé précédent) qu'il existe un voisinage ouvert V de Y' tel que la restriction à V de l'homomorphisme de $\mathcal{O}_Y$-Modules $\widetilde{\varphi} : \widetilde{A} \to \widetilde{B}$ soit un isomorphisme, ce qui achève la démonstration. □

Démonstration. *(du théorème 3.1).*

Montrons que l'application $f \mapsto \widehat{f}$ est injective : d'après un exposé précédent, deux morphisme f et g tel que $\widehat{f} = \widehat{g}$ coincident sur un voisinage ouvert de X', donc sur X d'après le lemme 3.2.

Montrons que $f \mapsto \widehat{f}$ est surjective : soit $h : \widehat{X} \to \widehat{Y}$ un $\widehat{S}$-morphisme. Posons $Z = X \times_S Y$, et soient $p : Z \to X$ et $q : Z \to Y$ les projections canoniques ; on sait que $\widehat{Z}$ s'identifie canoniquement à $\widehat{X} \times_{\widehat{S}} \widehat{Y}$, les projections canoniques s'identifiant

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{T} \arrow[r, hook, "j"] & \widehat{Z} \arrow[r, "\widehat{q}"] \arrow[d, "\widehat{p}"'] & \widehat{Y} \arrow[d] \\ & \widehat{X} \arrow[ul, "w"] \arrow[r] & \widehat{S} \end{tikzcd}$$

aux prolongements $\widehat{p}$ et $\widehat{q}$. Le graphe Γ de h est une immersion fermée de $\widehat{X}$ dans $\widehat{Z}$, donc le composé d'un isomorphisme w de $\widehat{X}$ sur un sous-schéma formel fermé $\mathfrak{T}$ et de l'injection j de $\mathfrak{T}$ dans $\widehat{Z}$.

Par le corollaire 2.8, il existe un sous-schéma fermé T de Z tel que $\widehat{T} = \mathfrak{T}$ et $\widehat{i} = j$, où $i : T \to Z$ est l'injection canonique. Le morphisme $p \circ i : T \to X$ a pour prolongement aux complétés $\widehat{p} \circ j$, qui est l'isomorphisme inverse de w ; on déduit des lemmes 3.2 et 3.3 que $p \circ i$ est lui-même un isomorphisme. Soit $g : X \to T$ l'isomorphisme réciproque, dont le prolongement $\widehat{g}$ est nécessairement égal à w ; posant $f = q \circ i \circ g$, on trouve $\widehat{f} = h$, ce qui achève la démonstration. □

Remarque. Le théorème 3.1 peut s'énoncer en disant que le foncteur $X \mapsto \widehat{X}$ est une équivalence de la catégorie des A-schémas propres avec la sous-catégories pleine de la catégorie des A-schémas formels propres formée des schémas formels algébrisables (c'est-à-dire isomorphes à un $\widehat{X}$). Il existe en général des A-schémas formels propres qui ne sont pas algébrisables.

REMARQUE. Les énoncés de cet exposé se transposent tels quels lorsque $A = \mathbf{C}$ et que l'on remplace la notion de complétion formelle d'un faisceau (ou d'un schéma) par la notion de faisceau analytique (ou d'espace analytique) associé. Les démonstrations sont d'ailleurs très analogues (cf. SERRE, GAGA [19, I, 32., p. 402]).

Bibliographie

[1] Michael Artin, *Grothendieck Topologies*, Harvard University, Department of Mathematics, 1962. Notes on a Seminar.

[2] Nicolas Bourbaki, *Algèbre commutative*, Springer, Berlin, 2006, 2007.

[3] Henri Cartan and Samuel Eilenberg, *Homological Algebra*, Princeton Mathematical Series, vol. 19, Princeton University Press, Princeton, 1956.

[4] Michel Demazure, Jean Giraud, Michel Raynaud, and Jean-Louis Verdier, *Séminaire de géométrie algébrique (1969-70)* (1970), available at http://www.math.u-psud.fr/~biblio/numerisation/docs/09_SEMINAIRE/pdf/09_SEMINAIRE.pdf.

[5] Jean Giraud, *Analysis Situs*, Sém. Bourbaki **256** (February 1963), 1–11.

[6] ———, *Cours de C3 : Surfaces de Riemann compactes (1969-1970)* (2005), available at http://sites.mathdoc.fr/PMO/PDF/J_GIRAUD_1969-70.pdf.

[7] Roger Godement, *Topologie algébrique et théorie des faisceaux*, Publications de l'Institut de Mathématique de l'Université de Strasbourg, vol. XIII, Hermann, Paris, 1958, 1998.

[8] Alexander Grothendieck, *Sur quelques points d'algèbre homologique*, Tôhoku Math. J. **IX** (1957), 119–221.

[9] ———, *Technique de descente et théorèmes d'existence en géométrie algébrique*, Sém. Bourbaki **190, 195, 212, 221, 232, 236** (1959/1962), 29, 22, 20, 28, 19, 23.

[10] ———, *Revêtements Étales et Groupe Fondamental (SGA 1)*, Documents Mathématiques, vol. 3, Société Mathématique de France, 2003.

[11] Alexander Grothendieck and Jean Dieudonné, *EGA I : Éléments de Géometrie Algébrique*, Grundlehren der math. Wiss., vol. 166, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1971.

[12] ———, *Éléments de Géometrie Algébrique*, Publ. Math. I.H.E.S. **4, 8, 11, 17, 20, 24, 28, 32** (1960/1967).

[13] Alexander Grothendieck and Michel Demazure, *SGA 3 : Schémas en Groupes I–III*, Lecture Notes in Math., vol. 151–153, Springer, 1970.

[14] Alexander Grothendieck, Michael Artin, and Jean-Louis Verdier, *SGA 4 : Théorie des Topos et Cohomologie Étales des Schémas, tome 1–3*, Lecture Notes in Math., vol. 269, 270, 305, Springer, 1972.

[15] David Mumford, *The Red Book of Varieties and Schemes*, 2nd ed., Lecture Notes in Math., vol. 1358, Springer, 1999.

[16] Michael Schlessinger, *Functors on Artin Rings*, Trans. Am. Math. Soc. **130** (1968), 208–222.

[17] Berndt E. Schwerdtfeger, *Topology, Sheaves and Flat Descent* (1999), available at http://berndt-schwerdtfeger.de/wp-content/uploads/pdf/flat.pdf.

[18] ———, *Guide sur la cohomologie des faisceaux* (2005), available at http://berndt-schwerdtfeger.de/wp-content/uploads/pdf/gcf.pdf.

[19] Jean-Pierre Serre, *Œuvres. Collected Papers*, Vol. I-IV, Springer, Berlin, Heidelberg, 1986, 2000.

Index