NEUE BEHANDLUNG DER KURVEN ZWEITER ORDNUNG DURCH INVARIANTEN

ERNST FREUDENTHAL UND WERNER HEINRICH

Vorwort

Dieser Lehrgang arbeitet ausschließlich mit den erstmalig[1] in der Ebene gedeuteten Bewegungsinvarianten der Kurven zweiter Ordnung (K_2) und zieht daher die Koordinatentranslations- und Koordinatendrehungsformeln nicht mehr heran. Er benutzt keine projektiven Koordinaten, keine Matrizen- und kaum die Vektorrechnung. Der Lehrgang ist mehrfach in der Sachsenwaldschule in Reinbek (Bezirk Hamburg) und der Johann Heinrich Voß-Schule in Eutin (Holstein) erprobt worden.

Bereits in der Einführung erweist sich die Herleitung solcher Gleichungen, die viele Kurven zweiter Ordnung gemeinsam beschreiben, als nützlich.

Bekannte Gleichungen, wie

$$y^2 = 2px \quad \text{und} \quad b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2,$$

kann man durch eine bewegungsinvariante Interpretation sofort für die Beschreibung dieser Kurven in beliebiger Lage benutzen; sie lauten dann

$$h^2 = 2pt \quad \text{und} \quad b^2n^2 + a^2h^2 = a^2b^2,$$

worin $h = 0, n = 0$ und $t = 0$ die Hesseformen der Gleichungen der Hauptachse, Nebenachse und Scheiteltangente sind.

Der Lehrgang bringt auch den Vollständigkeitsnachweis für die vorgestellten Kurventypen, der sehr gegenständlich durchgeführt ist. Auf natürliche Weise werden bei einer Umkehrbetrachtung die bekannten Kurven ergänzt (z.B. in § 2 Aufgabe 2.45).

Unter Benutzung der beiden Tabellen am Anfang des § 3 erhält dieser Paragraph einen weitgehend selbständigen Charakter. Dies wird noch durch zahlreiche, z.T. völlig neuartige Aufgaben betont, von denen manche auch ohne die genaue Kenntnis der ersten beiden Paragraphen zu lösen sind.

Es werden eine ganze Reihe neuer und nützlicher Formeln und Ausdrücke erarbeitet, wie z.B. der invariante Ausdruck für den Abstand eines Parallelenpaares, die Gleichungen der Achsen einer Mittelpunkts-K_2, Formeln für die Längen ihrer Halbachsen, die Gleichung der Leitgeraden der Parabel und Formeln für deren Brennpunkt und Scheitel.

Wir bemerken noch, daß jede Einzelfrage über eine bestimmte K_2 mit den in § 3 entwickelten Methoden für sich beantwortet werden kann.

Die Zeichnungen stammen von Karin Schmalfeld, Aumühle (Bezirk Hamburg).

Reinbek; Eutin, im Herbst 1962 E. Freudenthal; W. Heinrich

Key words and phrases. fokalerzeugte Kurven, Ellipse, Parabel, Hyperbel, nicht erzeugbare Kurven, Asymptoten, Klassifikation, Invarianten, Eigenwerte, Tangenten und Polaren.

[1] Verfasserbericht vor der Mathematischen Gesellschaft in Hamburg am 30.1.1962

Zur TEX Version. Der vorliegende Lehrgang erschien 1963 im Klett-Verlag [1] und ist nicht mehr erhältlich. Werner Heinrich hat mir am 24.5.1963 ein Exemplar im Auftrage beider Verfasser überreicht, mit etlichen handschriftlichen Korrekturen. Diese sind in die TEX Version eingearbeitet, die 21 Abbildungen wurden mit METAPOST erstellt. Der Lehrgang enthält 28 Beispiele mit ausführlicher Rechnung und 247 Aufgaben. Ein Index wurde hinzugefügt.

In dankbarer Erinnerung an meinen Lehrer 1960–1963 *Werner Heinrich*.

Berlin, 30. März 2010

Literatur

[1] Ernst Freudenthal and Werner Heinrich, *Neue Behandlung der Kurven zweiter Ordnung durch Invarianten*, Mathematische Arbeitshefte, vol. 18, Ernst Klett Verlag Stuttgart, 1963.

Inhaltsverzeichnis

1. Die fokalerzeugten Kurven zweiter Ordnung

1.1. **Kurven erster Ordnung (K_1).** Eine Gleichung von der Gestalt $g = ux + vy + w = 0$ mit den Variablen x und y und den reellen Koeffizienten u, v, w beschreibt im Falle $(u, v) \neq (0, 0)$ eine Kurve erster Ordnung. Kurven erster Ordnung sind Geraden, weshalb auch $K_1 = g = 0$ geschrieben wird. Wir setzen die analytische Geometrie der Geraden voraus, erinnern nur an den nützlichen Begriff des Geradenbüschels.

1.2. **Geradenbüschel.** Sind $g_1 = 0$ und $g_2 = 0$ die Gleichungen zweier verschiedener Geraden, so definiert

$$g = g_1 + \gamma g_2 = 0 \tag{1.1}$$

das *Geradenbüschel*. Die reelle Zahl γ heißt der *Büschelparameter*, die Geraden g_1 und g_2 werden die *Erzeugenden* des Büschels genannt. Schneiden sie sich in S, so geht jede Gerade g des Büschels durch S; denn die Koordinaten von S annullieren g_1 und g_2 in (1.1) und daher auch g. Der Punkt S heißt der *Grundpunkt* des Büschels. Bei der hier gewählten Definition ist g_2 die einzige den Punkt S enthaltende Gerade, die nicht durch (1.1) dargestellt wird; sie gilt trotzdem als Büschelgerade.

Beispiel 1.1. Sind $g_1 = 2x + 3y + 5 = 0$ und $g_2 = x + 2y - 3 = 0$ die Erzeugenden, so hat die zum Büschelparameter $\gamma = -6$ gehörende Gerade des Büschels die Gleichung $g = 2x + 3y + 5 - 6(x + 2y - 3) = 0$ oder $g = 4x + 9y - 23 = 0$.

Beispiel 1.2. Wie lautet die Gleichung der Geraden des obigen Büschels, die durch den Punkt $P(4|6)$ geht? Der Büschelbegriff erspart die Berechnung von S. Es ist $g(x|y) = 2x+3y+5+\gamma(x+2y-3) = 0$. P liefert die Gleichung $g(4|6) = 8+18+5+\gamma(4+12-3) = 0$, woraus $\gamma = -\frac{31}{13}$ folgt. Daher ergibt sich $g = 5x + 23y - 158 = 0$.

Aufgabe 1.1. Welche Gerade geht durch den Schnittpunkt der Geraden $2x+3y-4 = 0$ und $x - y + 5 = 0$ und enthält den Punkt $P(3|7)$?

Aufgabe 1.2. Für welchen Parameterwert ist die Gerade $g = 4x - 5y + 9 = 0$ im Büschel aus $g_1 = 2x + 3y - 1 = 0$ und $g_2 = x - 2y + 3 = 0$ enthalten? (Beachten Sie, dass g durch einen Faktor c gekürzt sein kann).

Aufgabe 1.3. *a*) Beweisen Sie: Sind die Erzeugenden g_1 und g_2 parallel, so besteht das ganze Büschel aus einer Parallelenschar.
b) Für welchen Parameter γ ist die mit $P(2|-1)$ inzidierende Gerade im Büschel mit den Erzeugenden $g_1 = 4x - 3y - 1 = 0$ und $g_2 = 4x - 3y - 5$ enthalten?
c) Was sagen Sie zur Aufgabe *b*), falls auf die Angabe des Parameters verzichtet wird?
d) Für welchen Wert von γ ergibt hier $g_1 + \gamma g_2 = 0$ keine Gerade?

Aufgabe 1.4. Deuten Sie die sogenannte *Punktrichtungsformel* $\frac{y-y_1}{x-x_1} = m$ als Büschelgleichung und geben Sie die Erzeugenden, den Parameter und seine geometrische Bedeutung an.

1.3. **Kurven zweiter Ordnung (K_2).** Die Gleichung einer algebraischen *Kurve zweiter Ordnung* enthält neben quadratischen Gliedern auch lineare und ein Absolutglied:

$$K_2 = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \tag{1.2}$$

Die Zweckmäßigkeit der Doppelindizes an den Koeffizienten a_{ik} – wieder reelle Zahlen – wird sich herausstellen; damit wirklich eine K_2 vorliegt, setzen wir $(a_{11}, a_{12}, a_{22}) \neq (0, 0, 0)$ voraus.

Wie das Beispiel $K_2 = x^2+1 = 0$ zeigt, kann, im Gegensatz zu einer K_1, die zu einer K_2 gehörende reelle Punktmenge leer sein. Man spricht dann von einer *nullteiligen* K_2.

1.4. **Fokalerzeugte Kurven zweiter Ordnung.** Wir stellen zunächst gewisse K_2 vor, die durch die folgende *Ortsaufgabe* erfaßt werden:

Gegeben eine Gerade ℓ (*Leitgerade* oder *-linie*), ein Punkt F (*Fokus* oder *Brennpunkt*) und eine positive Zahl ε (*numerische Exzentrizität*). Gesucht die Punktmenge P, für die der Quotient der Entfernungen von Fokus und Leitgerade gleich ε ist. Mit $\overline{PF} = r$ und $\overline{P\ell} = d$ fordert man $r = \varepsilon d$. Solche K_2 nennen wir *fokalerzeugbar*.

1.4.1. *Konstruktion der fokalerzeugbaren K_2.* Man zeichne die Parallelenschar zu ℓ, verschaffe sich (Strahlensatz) zusammengehörige Paare von r und d und erhält bei existierenden Schnittpunkten des jeweiligen Kreises um F mit r mit der zugehörigen Parallelen im Abstand d von ℓ Kurvenpunkte, siehe Abb. 1.

Je nach der Größe von ε und der Lage von F bezüglich ℓ ergeben sich die in Abb. 2 bis 7 gezeichneten sechs Fälle. Aus Abb. 7 ist ersichtlich, dass durch die Parallelverschiebung der Leitgeraden dieselbe Doppelgerade entsteht, die also lauter Brennpunkte enthält.

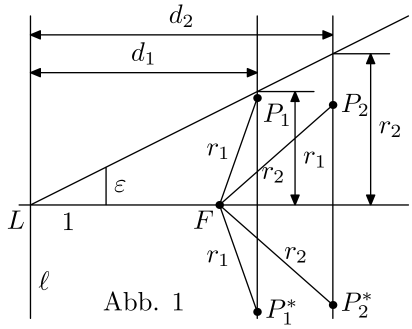


Abb. 1

1.4.2. *Gemeinsame Gleichung fokalerzeugbarer K_2 mit der Leitgeraden als y-Achse.* Damit wirklich die Gleichung einer K_2 entsteht, benutzen wir die Definitionsgleichung

$$r^2 = \varepsilon^2 d^2 \tag{1.3}$$

und erhalten ($\overline{LF} = f$, siehe Abb. 8)

$$(x-f)^2 + y^2 = \varepsilon^2 x^2 \quad \text{oder}$$

$$(1-\varepsilon^2)x^2 + y^2 - 2fx + f^2 = 0 \tag{1.4}$$

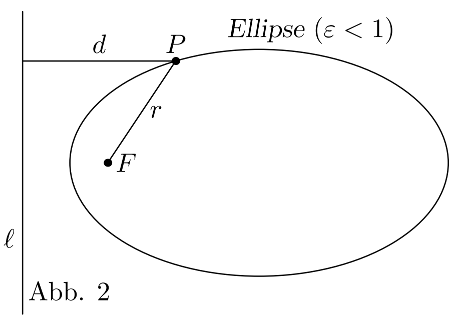


Abb. 2

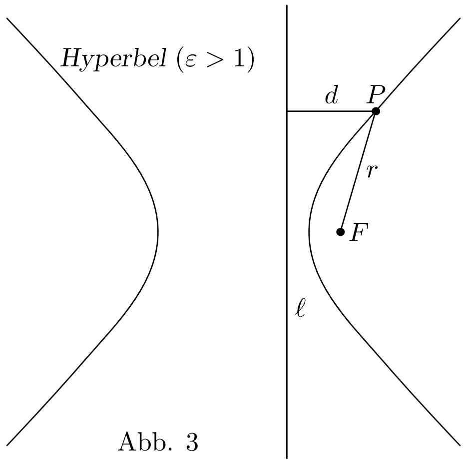


Abb. 3

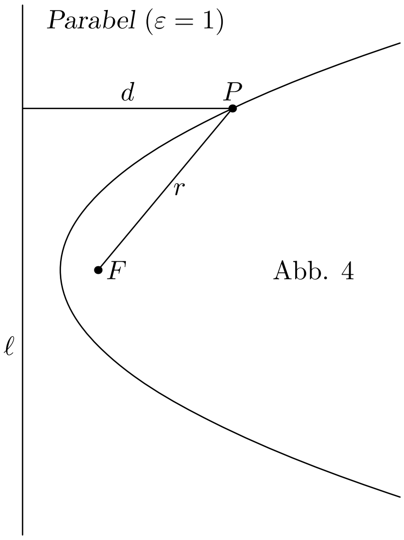


Abb. 4

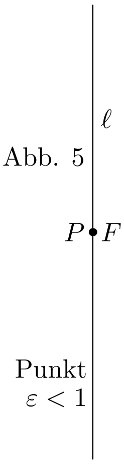


Abb. 5

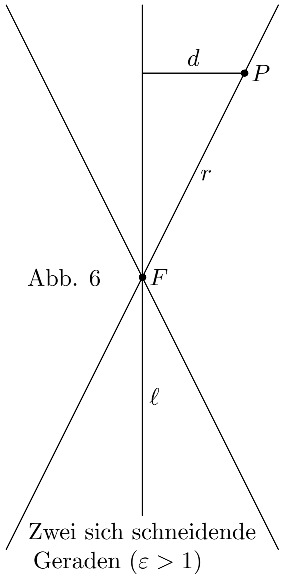


Abb. 6

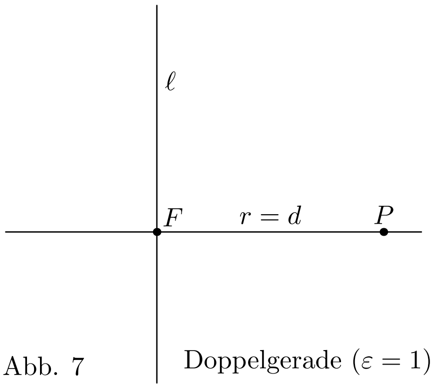


Abb. 7

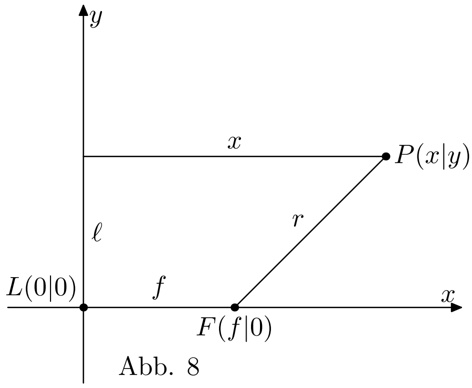


Abb. 8

1.4.3. *Singuläre oder zerfallende K_2 ($f = 0$).*

Wegen $y^2 - (\varepsilon^2 - 1)x^2 = (y + \sqrt{\varepsilon^2 - 1}x)(y - \sqrt{\varepsilon^2 - 1}x) = 0$ zerfällt die K_2 in ein Geradenpaar, das im Falle

- $\varepsilon < 1$ (elliptischer Typ) den Punkt $L(0|0) = F$ als einzigen reellen Punkt enthält,
- $\varepsilon = 1$ (parabolischer Typ) die Doppelgerade $y^2 = 0$ darstellt,
- $\varepsilon > 1$ (hyperbolischer Typ) aus zwei sich in $L(0|0) = F$ schneidenden Geraden besteht.

1.4.4. *Reguläre oder nicht zerfallende K_2 ($f > 0$).* In jedem der drei Fälle $\varepsilon \lesseqgtr 1$ existiert nach (1.4) eine *Symmetrieachse* durch F senkrecht zu ℓ, hier $y = 0$. Sie heißt die *Hauptachse* h (im Falle $\varepsilon = 1$ auch kurz *Achse*). Für $x = f$ liefert (1.4) $y = \pm\varepsilon f$. Wir setzen

(1.5) $$p = \varepsilon f \qquad \text{- auch bei } f = 0$$

und nennen p den *Parameter* der Kurve.

1.4.5. *Ellipse ($\varepsilon < 1$) und Hyperbel ($\varepsilon > 1$).* In den Fällen $\varepsilon \neq 1$ erhalten wir aus (1.4) für die Abszissen der beiden Schnittpunkte S_1 und S_2 der K_2 mit der Hauptachse $y = 0$: $x_{S_{1,2}} = \frac{f}{1 \pm \varepsilon}$. Die Punkte $S_{1,2} = (\frac{f}{1\pm\varepsilon}|0)$ heißen *Hauptscheitel* der K_2. Die Strecke $\overline{S_1S_2} = |x_{S_1} - x_{S_2}| = \frac{2p}{|1-\varepsilon^2|}$ wird die *große Achse* der K_2 genannt. Die Hauptachse ist also eine Gerade, die große Achse eine Strecke. Wir setzen die *große Halbachse*

$$a = \frac{p}{1-\varepsilon^2}, \tag{1.6}$$

bei der Hyperbel ist also $a < 0$. Die große Achse hat den *Mittelpunkt*

$$M\big(\frac{x_{S_1} + x_{S_2}}{2}|0\big) = M\big(\frac{f}{1-\varepsilon^2}|0\big) = M\big(\frac{a}{\varepsilon}|0\big) \tag{1.7}$$

Der *Mittelpunkt* hat daher bei der Ellipse den *Abstand* $+\frac{a}{\varepsilon}$ (bei der Hyperbel $-\frac{a}{\varepsilon}$) von der *Leitgeraden*. Durch die Translation $x = x' + \frac{f}{1-\varepsilon^2}, y = y'$ (die y'-Achse geht also durch M) erhält (1.4) die Gestalt

$$(1-\varepsilon^2)x'^2 + y'^2 = \frac{p^2}{1-\varepsilon^2}$$

oder

$$\frac{x'^2}{\big(\frac{p}{1-\varepsilon^2}\big)^2} + \frac{y'^2}{\big(\frac{p}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\big)^2} = 1 \tag{1.8}$$

Hieraus ist die Symmetrie der Kurve zu M und zur y'-Achse ersichtlich. Die letztere heißt die *Nebenachse* n ; ihre Schnittpunkte mit der K_2 werden die *Nebenscheitel* $N_{1,2}$ genannt. Ihre Ordinaten sind nach (1.8)

$$y_{N_{1,2}} = \pm\frac{p}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} = \pm b$$

Die Strecke $\overline{N_1N_2}$ heißt die *kleine Achse* der K_2 ; b ist bei der Hyperbel imaginär. Hier sind die Nebenscheitel komplex, wenn man die reelle Ebene durch Hinzunahme komplexer Punkte erweitert.

Im Koordinatensystem der beiden Achsen haben also die Ellipse und die Hyperbel nach (1.8) und (1.6) – unter Fortlassung des Strichs – die gemeinsame Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{1.9}$$

mit der *kleinen Halbachse*

$$b = \frac{p}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \tag{1.10}$$

ist.

(1.9) heißt *Achsengleichung* oder auch *Mittelpunktsgleichung*.

Nach (1.7) und Abb. 8 ist $\overline{FM} = |x_M - f| = \varepsilon|a|$. Man setzt

$$e = \varepsilon a \tag{1.11}$$

und nennt e die *lineare Exzentrizität* der K_2 ; auch sie ist bei der Hyperbel negativ.

Aufgabe 1.5. Beweisen Sie die Relationen

$$e^2 = a^2 - b^2 \tag{1.12}$$

und

$$b^2 = pa \tag{1.13}$$

Berechnen Sie a, b, e und p für $\varepsilon = 2$ und $f = 5$. Welchen Abstand hat der Mittelpunkt von der Leitgeraden?

Aus der Symmetrie zur Nebenachse folgt bei Ellipse und Hyperbel die Existenz einer zweiten *Leitgeraden* ℓ_2 und eines zweiten *Brennpunktes* F_2. Die bisherige Leitgerade werde mit $\ell = \ell_1$, der Brennpunkt mit $F = F_1$ bezeichnet.

Aufgabe 1.6. Ersinnen Sie eine Konstruktion der *Hauptscheitel* bei gegebenen $\ell_{1,2}$, $F_{1,2}$ und ε.

Aufgabe 1.7. Zeigen Sie, dass im Koordinatensystem der Abb. 8 ($L = L_1$) $F_2\big(\frac{1+\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2} f|0\big)$ und $L_2\big(\frac{2f}{1-\varepsilon^2}|0\big)$ gilt und leiten Sie mit den Daten dieser Erzeugenden die Gleichung (1.4) erneut her!

Aus der Achsengleichung (1.9) läßt sich dadurch eine neue, dem *Erlanger Programm* angepaßte Folgerung ziehen, dass man sie koordinatenfrei interpretiert: für den K_2-Punkt gilt

$$(1.14)\qquad \frac{(\text{Abstand von der Nebenachse})^2}{a^2} + \frac{(\text{Abstand von der Hauptachse})^2}{b^2} = 1$$

Sind also Haupt- und Nebenachse durch ihre Gleichungen $h = 0$ und $n = 0$ in *Hesseform* gegeben, so lautet die Kurvengleichung

$$(1.15)\qquad b^2n^2 + a^2h^2 - a^2b^2 = 0$$

Beispiel 1.3. Die Gleichung der Ellipse mit den Halbachsenlängen $a = \sqrt{17}$ und $b = \sqrt{13}$, der Hauptachsengleichung $h = x + 2y - 1 = 0$ und der Nebenachsengleichung $n = 2x - y + 2 = 0$ ist also $K_2 = \frac{13}{5}(2x - y + 2)^2 + \frac{17}{5}(x + 2y - 1)^2 - 221 = 0$ oder

$$K_2 = 69x^2 + 16xy + 81y^2 + 70x - 120y - 1036 = 0$$

Aufgabe 1.8. Eine K_2 besitzt die Hauptachse $h = x+y+1 = 0$ und die Nebenachse $n = x - y - 3 = 0$ und geht durch die Punkte $P_1(0|0)$ und $P_2(1|2)$. Bestimmen Sie die große und die kleine Halbachse. Handelt es sich um eine Ellipse oder um eine Hyperbel?

1.4.6. *Parabel ($\varepsilon = 1$).* Wegen $\varepsilon = 1$ besitzt nach (1.4) die Parabel nur eine *Symmetrieachse*, hier $y = 0$. Ihr *Scheitel* liegt wegen $p = f$ bei $S(\frac{p}{2}|0)$.

1.5. **Scheitelgleichung der regulären K_2.** Bei jeder *regulären* K_2 liegt zwischen L und F ein *Scheitel* S.

Aufgabe 1.9. Legen Sie S in den Ursprung, beweisen Sie, dass dann $F(\frac{p}{1+\varepsilon}|0)$ und $L(-\frac{p}{\varepsilon(1+\varepsilon)}|0)$ gilt und leiten Sie damit die sogenannte *Scheitelgleichung*

$$(1.16)\qquad y^2 = 2px - (1 - \varepsilon^2)x^2$$

der regulären K_2 her.

Aufgabe 1.10. Deuten Sie noch einmal die folgenden Größen:

$$\tfrac{p}{\varepsilon(1+\varepsilon)} \qquad \tfrac{p}{1+\varepsilon} \qquad \tfrac{p}{\varepsilon} \qquad \tfrac{a}{\varepsilon} \qquad \varepsilon a \qquad \sqrt{ap}$$

Merken Sie sich vor allem $\overline{MF} = a\varepsilon$ und $\overline{ML} = a/\varepsilon$. Welche Konstruktionen ergeben sich aus den beiden Größen durch Anwendung eines Satzes von *Euklid*?

Die *Scheitelgleichung* der Parabel ist nach (1.16)

$$(1.17)\qquad y^2 = 2px$$

Interpretiert man sie analog zu (1.14), so erkennt man, dass die Parabel bei *allgemeiner Lage* ihrer *Scheiteltangente* t_S und ihrer Achse h die Gleichung

$$(1.18)\qquad K_2 = h^2 - 2pt_S = 0$$

besitzt (*Hesseformen* für h und t_S!).

Beispiel 1.4. Sei $h = x - y + 5 = 0, t_S = x + y + 1 = 0$ und $p = 2$. Normiert man abweichend vom orthodoxen Gebrauch die *Hesseform* von t_S in (1.18) so, dass F stets auf der „positiven Seite" von t_S liegt, so erhält man die zu F gehörende Parabel. Da hier über die Brennpunktlage nichts vorgeschrieben ist, gibt es also zwei Parabeln und ihre Gleichungen lauten:

$$K_2 = \left(\frac{x-y+5}{\sqrt{2}}\right)^2 \pm 4\frac{x+y+1}{\sqrt{2}} = 0$$

oder in der Normalform

$$K_2 = x^2 - 2xy + y^2 + 2(5 \pm 2\sqrt{2})x - 2(5 \mp 2\sqrt{2})y + (25 \pm 4\sqrt{2}) = 0$$

Aufgabe 1.11. Geben Sie die Gleichung und den Parameter der durch den Ursprung gehenden Parabel an, wenn letztere $h = 2x + 3y - 1 = 0$ zur Achse und $t_S = 3x - 2y + 1 = 0$ zur Scheiteltangente besitzt (O muß auf der „positiven Seite" von t_S liegen).

Aufgabe 1.12. Interpretieren Sie in nun schon gewohnter Weise auch (1.16) koordinatenfrei und schreiben Sie die *allgemeine Scheitelgleichung* hin.

1.6. **Brennpunkteigenschaften der Ellipse und Hyperbel.** Bei der Ellipse ist der Abstand der beiden *Leitgeraden* voneinander $d_1 + d_2$ (Abb. 9) und nach (1.7) ist dieser Abstand $d_1 + d_2 = 2\frac{a}{\varepsilon}$, woraus $r_1 + r_2 = \varepsilon(d_1 + d_2) = 2a$ folgt. Diese Relation wird meist als *Definition der Ellipse* benutzt.

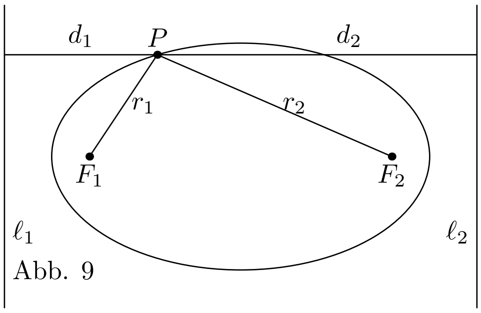


Abb. 9

Aufgabe 1.13. Beweisen Sie analog die *Brennpunkteigenschaften der Hyperbel* $r_1 - r_2 = \pm 2a$, wobei das obere Vorzeichen für den *rechten* Ast, das untere für den *linken* gilt.

1.7. **Polargleichungen der regulären K_2.** Wählt man in Abb. 10 $F_1(0|0)$, also $L_1(-f|0)$, so liefert (1.3) $r^2 - \varepsilon^2(x+f)^2 = \big(r - \varepsilon(x+f)\big)\big(r + \varepsilon(x+f)\big) = 0$. Aus dieser Zerlegung folgen wegen $x = r \cdot \cos\varphi$ die *Polargleichungen*:

$$r = \frac{p}{1 - \varepsilon\cos\varphi} \qquad\qquad r = \frac{-p}{1 + \varepsilon\cos\varphi} \tag{1.19}$$

Es ist zu bemerken, dass diese *Polargleichungen* keine K_2-Gleichungen sind, schon weil sie als Faktoren aus einer K_2-Gleichung gewonnen wurden. Daraus versteht sich die Tatsache, dass (1.19),*links* bei der Hyperbel nur für den rechten Ast und (1.19),*rechts* nur für den linken Ast gilt. Bei der Ellipse und der Parabel liefert nur die erste Formel in (1.19) Kurvenpunkte, da die zweite wegen $\varepsilon \leq 1$ und $p > 0$ stets $r < 0$ ergibt.

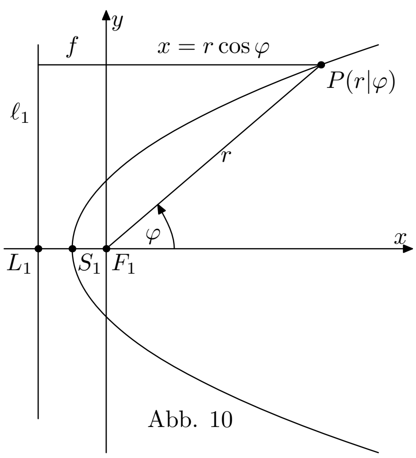


Abb. 10

Aufgabe 1.14. Aus (1.19) kann man durch geeignete Wahl von φ frühere Ergebnisse erneut gewinnen. Führen Sie das durch.

Aufgabe 1.15. Welche K_2 ergibt sich aus (1.19), wenn der Wert $\varepsilon = 0$ zugelassen wird?

Aufgabe 1.16. Beweisen Sie, dass für den Brennpunkt F_2 als Pol bei der Ellipse $r = \frac{p}{1+\varepsilon\cos\varphi}$ und bei der Hyperbel die beiden Formeln $r = \frac{-p}{1-\varepsilon\cos\varphi}$ und $r = \frac{p}{1+\varepsilon\cos\varphi}$ gelten.

1.8. **Asymptoten der Hyperbel.** Im Falle $\varepsilon > 1$ verschwinden in (1.19) die Nenner für $\cos\varphi_{1,2} = \pm\frac{1}{\varepsilon}$, d.h. für die Brennstrahlen mit den Steigungen

$$m_{1,2} = \tan\varphi_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{1-\cos^2\varphi_{1,2}}}{\cos\varphi_{1,2}} = \pm\sqrt{\varepsilon^2-1} \tag{1.20}$$

Für diese Argumente $\varphi_{1,2}$ zeigen die Brennstrahlen also asymptotisches Verhalten. Man nennt nun die Parallelen zu diesen Strahlen durch den Mittelpunkt die *Asymptoten* a_1 und a_2 der Hyperbel. Sie haben also im System der Achsen der Hyperbel die Gleichungen

$$a_{1,2} = y \mp \sqrt{\varepsilon^2-1}\,x = 0 \tag{1.21}$$

Die Steigungen der Asymptoten sind wegen (1.6) $\varepsilon^2 - 1 = -\frac{p}{a}$ auch $m_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{p}{a}}$. Für $p \gtreqless -a$ ist $m_1 \gtreqless 1$ und $\varepsilon^2 \gtreqless 2$, d.h. $2\varphi_1 \gtreqless \frac{\pi}{2}$; $2\varphi_1$ ist der die Hyperbel enthaltende Winkelraum, Mit $2\varphi_1$ heißt auch die Hyperbel *stumpf*, *rechtwinklig* (oder *gleichseitig*) und *spitz*. Diese Eigenschaften werden wir in Abschnitt 3.1 invariant beschreiben.

1.9. **Vektorgleichung der K_2.**

Aufgabe 1.17. Beweisen Sie: Die allgemeine Vektorgleichung der *fokalerzeugbaren* K_2 ist

$$(\mathfrak{r}-\mathfrak{r}_F)^2 - \varepsilon^2\big((\mathfrak{r}-\mathfrak{r}_F)\cdot\mathfrak{n} + f\big)^2 = 0$$

Dabei ist $\mathfrak{r}$ der *Ortsvektor* des Kurvenpunktes, $\mathfrak{r}_F$ der des *Brennpunktes* F und $\mathfrak{n}$ der *Normaleneinheitsvektor* der *Leitgeraden*, der nach F hinweist.

2. Fokalerzeugte Kurven zweiter Ordnung in allgemeiner Betrachtung und die nicht erzeugbaren K_2-Typen

In dreifacher Hinsicht läßt die in § 1 behandelte Fokalerzeugung Erweiterungen zu: in Bezug auf *allgemeine Lage*, *beliebige (reelle) Koeffizienten* und *komplexe Erzeugende*. Die *erste Verallgemeinerung*, der Verzicht auf die bisherigen speziellen Lagen der Leitlinie ℓ und des Brennpunktes F zum Koordinatensystem, wird in den Abschnitten 2.1 und 2.2 behandelt.

2.1. **Allgemeine normierte Gleichung der erzeugbaren K_2.** Statt des Wortes *fokalerzeugbar* sagen wir kürzer *erzeugbar*. In einer *Hesseform* hat die *Leitlinie* dann die Gleichung $\ell = ux + vy + w = 0$ mit $u^2 + v^2 = 1$. Die zweite Normierung – siehe das Beispiel 1.4 auf Seite 9 – wird so geregelt, dass $ux_F + vy_F + w = f \geq 0$. Gemäß (1.3) und Abb. 11 erhalten wir $(x-x_F)^2 + (y-y_F)^2 - \varepsilon^2(ux+vy+w)^2 = 0$ oder ausführlicher

$$\begin{aligned}
&(\varepsilon^2u^2-1)x^2 + 2\varepsilon^2uvxy + (\varepsilon^2v^2-1)y^2 +\\
&+ 2(\varepsilon^2uw + x_F)x + 2(\varepsilon^2vw + y_F)y + \varepsilon^2w^2 - x_F^2 - y_F^2 =\\
&= (\varepsilon^2u^2-1)x^2 + \varepsilon^2uvxy + (\varepsilon^2uw + x_F)x +\\
&+ \varepsilon^2uvxy + (\varepsilon^2v^2-1)y^2 + (\varepsilon^2vw + y_F)y +\\
&+ (\varepsilon^2uw + x_F)x + (\varepsilon^2vw + y_F)y + \varepsilon^2w^2 - x_F^2 - y_F^2 = 0
\end{aligned} \tag{2.1}$$

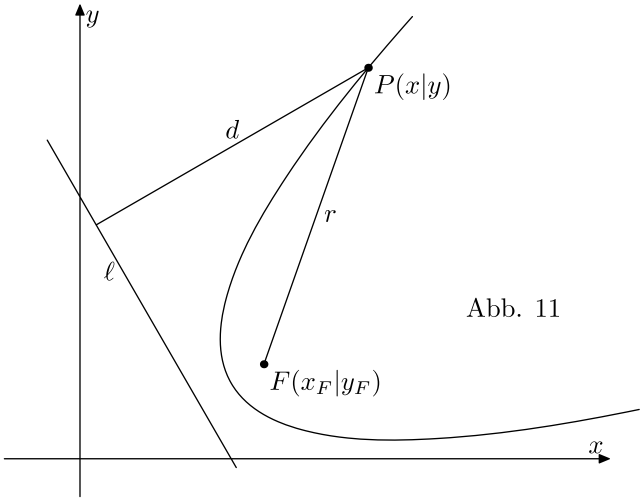


Abb. 11

Die Koeffizienten von (2.1) werden unter der ergänzenden Festsetzung $\bar{a}_{ik} = \bar{a}_{ki}$ (i =Zeilen-, k = Spaltenindex) als Elemente in ein *Matrix* genanntes quadratisches Schema gestellt.

$$\begin{pmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{12} & \bar{a}_{13} \\ \bar{a}_{12} & \bar{a}_{22} & \bar{a}_{23} \\ \bar{a}_{13} & \bar{a}_{23} & \bar{a}_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon^2 u^2 - 1 & \varepsilon^2 uv & \varepsilon^2 uw + x_F \\ \varepsilon^2 uv & \varepsilon^2 v^2 - 1 & \varepsilon^2 vw + y_F \\ \varepsilon^2 uw + x_F & \varepsilon^2 vw + y_F & \varepsilon^2 w^2 - x_F^2 - y_F^2 \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

Vorerst kann (2.2) statt *fokalnormierte* kürzer *normierte* Matrix genannt werden, später ist das letztere ein Oberbegriff. Hier ist die *Normierung* eine Folge der *Hessenormierung* der Leitgeraden: in (2.2) ist eben $u^2+v^2 = 1$ zu beachten (Querstrich $\bar{a}_{ik}$!).

Beispiel 2.1. Sei $\ell = 2x+y-1 = 0$, $F(-1|3)$ und $\varepsilon = \sqrt{5}$; man erhält die Gleichung $K_2 = 5\left(\frac{2x+y-1}{\sqrt{5}}\right)^2 - \left((x+1)^2+(y-3)^2\right) = 0$ oder $K_2 = 3x^2+4xy-6x+4y-9 = 0$. Da hier F mit ℓ inzidiert, muß die gefundene Gleichung zerfallen. Man erhält z.B. durch Auflösen nach x (Übung!) $K_2 = (x+1)(3x+4y-9) = 0$. Die Matrix ist:

$$(\bar{a}_{ik}) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 2 \\ -3 & 2 & -9 \end{pmatrix}$$

Bei den folgenden Aufgaben sind die normierten Matrizen, die K_2-Gleichungen und in den singulären Fällen ihre Faktorisierungen in zwei K_1-Formen anzugeben.

Aufgabe 2.1. $\ell = x - 3y + 1 = 0$, $F(5|2)$, $\varepsilon = 1$

Aufgabe 2.2. $\ell = 2x - 3y + 1 = 0$, $F(0|0)$, $\varepsilon = \frac{1}{2}$

Aufgabe 2.3. $\ell = x + y - 1 = 0$, $F(1|1)$, $\varepsilon = 3$

Aufgabe 2.4. *a)* $\ell_1 = x - y - 6 = 0$, $F_1(3|-5)$, $\varepsilon = 2$
b) $\ell_2 = 3x - 3y - 14 = 0$, $F_2(\frac{1}{3}|\frac{-7}{3})$, $\varepsilon = 2$

Jetzt berechnen wir aus der Matrix (2.2) Größen, die nicht mehr vom Koordinatensystem abhängen. Nach unseren bisherigen Kenntnissen werden die Gestalt der Kurve und ihre Eigenschaften ausschließlich durch die *Fundamentalinvarianten* ε und p geregelt (statt ε und f jetzt ε und $p = \varepsilon f$).

2.2. **Normierte Invarianten der Matrix** (2.2).

2.2.1. *Unterdeterminante $\bar{A}_{33}$ der K_2-Matrix.*

Aus (2.2) folgt $\bar{A}_{33} = \begin{vmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{12} \\ \bar{a}_{12} & \bar{a}_{22} \end{vmatrix} = \bar{a}_{11}\bar{a}_{22} - \bar{a}_{12}^2 = 1 - \varepsilon^2$

$$\bar{A}_{33} = 1 - \varepsilon^2 \tag{2.3}$$

$$\text{Für erzeugte } \begin{matrix} \text{elliptische} \\ \text{parabolische} \\ \text{hyperbolische} \end{matrix} \text{ Typen gilt also } \bar{A}_{33} \gtreqless 0 \tag{2.4}$$

2.2.2. *Spur $\bar{s}_{33}$ der zu $\bar{A}_{33}$ gehörenden Matrix.* Bei quadratischen Matrizen nennt man die Summe der Elemente in der Hauptdiagonalen die *Spur* der Matrix. Hier ist $\bar{s}_{33} = \bar{a}_{11} + \bar{a}_{22} = \varepsilon^2 - 2$ also die Spur der zu $\bar{A}_{33}$ gehörenden Matrix

$$\bar{s}_{33} = \varepsilon^2 - 2 \tag{2.5}$$

Für die gemäß (2.2) beschriebenen

$$\begin{matrix} \text{elliptischen} \\ \text{parabolischen} \\ \text{hyperbolischen} \end{matrix} \text{ Typen gilt } \begin{matrix} \bar{s}_{33} < 0 \\ \bar{s}_{33} < 0 \\ \bar{s}_{33} \gtreqless 0 \end{matrix} \tag{2.6}$$

2.2.3. *Determinante $\bar{A}$ der K_2-Matrix.* Zur Berechnung der Determinante $\bar{A}$ der Matrix (2.2) wenden wir Determinantensätze an.

Nach Multiplikation der ersten Zeile mit x_F, der zweiten Zeile mit y_F und Addition beider Zeilen zur dritten ergibt sich unter Beachtung der Relation $ux_F + vy_F + w = f$

$$\bar{A} = \begin{vmatrix} \varepsilon^2 u^2 - 1 & \varepsilon^2 uv & \varepsilon^2 uw + x_F \\ \varepsilon^2 uv & \varepsilon^2 v^2 - 1 & \varepsilon^2 vw + y_F \\ \varepsilon^2 uf & \varepsilon^2 vf & \varepsilon^2 wf \end{vmatrix} = \varepsilon^2 f \cdot \begin{vmatrix} \varepsilon^2 u^2 - 1 & \varepsilon^2 uv & \varepsilon^2 uw + x_F \\ \varepsilon^2 uv & \varepsilon^2 v^2 - 1 & \varepsilon^2 vw + y_F \\ u & v & w \end{vmatrix}$$

Die analoge Wiederholung dieser Operation an den Spalten ergibt:

$$\bar{A} = \varepsilon^2 f^2 \cdot \begin{vmatrix} \varepsilon^2 u^2 - 1 & \varepsilon^2 uv & \varepsilon^2 u \\ \varepsilon^2 uv & \varepsilon^2 v^2 - 1 & \varepsilon^2 v \\ u & v & 1 \end{vmatrix} = \varepsilon^2 f^2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 & \varepsilon^2 u \\ 0 & -1 & \varepsilon^2 v \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Der letzte Übergang vollzog sich durch Subtraktion des u-fachen bzw. v-fachen der dritten Spalte von der ersten bzw. zweiten. Es ist also nach (1.5):

$$\bar{A} = p^2 \tag{2.7}$$

Bemerkung. Die schnellste Berechnung von $\bar{A}$ ergibt sich aus der Zerlegung der Matrix in zwei Faktoren

$$\begin{pmatrix} \varepsilon^2 u^2 - 1 & \varepsilon^2 uv & \varepsilon^2 uw + x_F \\ \varepsilon^2 uv & \varepsilon^2 v^2 - 1 & \varepsilon^2 vw + y_F \\ \varepsilon^2 uw + x_F & \varepsilon^2 vw + y_F & \varepsilon^2 w^2 - x_F^2 - y_F^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon u & -1 & 0 \\ \varepsilon v & 0 & -1 \\ \varepsilon w & x_F & y_F \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon u & \varepsilon v & \varepsilon w \\ 1 & 0 & -x_F \\ 0 & 1 & -y_F \end{pmatrix}$$

Nunmehr soll die Normierung der Matrix (2.2) statt durch die Relation $u^2 + v^2 = 1$ durch die Größen $\bar{s}_{33}, \bar{A}_{33}$ und $\bar{A}$ beschrieben werden. Aus (2.3) und (2.5) folgt

$$\bar{A}_{33} + \bar{s}_{33} + 1 = 0 \tag{2.8}$$

(2.8) heißt die *Normierungsrelation* der Matrix (2.2).

Wird nun eine erzeugbare K_2 unter Mitführung ihres Brennpunktes und der erzeugenden Leitgeraden durch eine Bewegung in eine neue Lage überführt (oder wird in der Ebene bei festgelassener K_2 ein neues Koordinatensystem ausgezeichnet), so erhält die K_2 eine neue Gleichung mit den Koeffizienten a'_{ik}. Ihre Berechnung geschieht elementweise gemäß (2.2) aus der neuen Leitliniengleichung $\ell' = u'x + v'y + w' = 0$ und den neuen Koordinaten des Brennpunktes $F'(x'_F|y'_F)$ mit der gleichen Fundamentalinvarianten ε. Wegen (2.3), (2.5) und (2.7) gelten die bedeutenden Relationen:

$$\bar{s}'_{33} = \bar{s}_{33} \qquad \bar{A}'_{33} = \bar{A}_{33} \qquad \bar{A}' = \bar{A}$$

Sie folgen aus dem ausschließlichen Vorkommen von ε und p und gelten nur bei der normierten Matrix (vor und nach der Bewegung).

$\bar{s}_{33}, \bar{A}_{33}$ und $\bar{A}$ heißen die *normierten Invarianten* der K_2. Damit ergeben sich für unsere sechs erzeugbaren Fälle die folgenden Aussagen:

(2.9)

Typ	$\bar{s}_{33}$	$\bar{A}_{33}$	$\bar{A}$
Ellipse	< 0	> 0	> 0
Punkt	< 0	> 0	$= 0$
Parabel	< 0	$= 0$	> 0
Doppelgerade	< 0	$= 0$	$= 0$
Hyperbel	$\gtreqless 0$	< 0	> 0
Geradenpaar mit Schnittpunkt	$\gtreqless 0$	< 0	$= 0$

Wir wollen beachten, dass diese Aussagen bisher *nicht* kennzeichnend sind.

Aufgabe 2.5. Berechnen Sie die drei Invarianten der Aufgaben 2.1 bis 2.4.

Aufgabe 2.6. Berechnen Sie die beiden Fundamentalinvarianten der Aufgaben 2.1 bis 2.4.

Es ist an der Zeit, sich von der bisher geltenden durch (2.8) ausgedrückten Normierung zu lösen. Unsere *zweite Verallgemeinerung* befaßt sich mit allen aus (2.2) durch Multiplikation mit einem Faktor $q \neq 0$ hervorgehenden Matrizen mit den Elementen $a_{ik} = q\bar{a}_{ik}$.

2.3. **Quasiinvarianz und Invarianz.**

2.3.1. *Invariante.* Wir nennen die Größen $s_{33} = q\bar{s}_{33}, A_{33} = q^2\bar{A}_{33}$ und $A = q^3\bar{A}$ wegen ihrer Abhängigkeit vom willkürlichen Faktor q und ihrer Unabhängigkeit vom Koordinatensystem *Quasiinvarianten*. Aus diesen Quasiinvarianten werden wir alle Invarianten der erzeugbaren Typen berechnen; z.B. ist bei den *regulären* Fällen

$$\mathcal{J}_1 = \frac{s_{33}A_{33}}{A} = \frac{q\bar{s}_{33}q^2\bar{A}_{33}}{q^3\bar{A}} = \frac{\bar{s}_{33}\bar{A}_{33}}{\bar{A}} \tag{2.10}$$

eine solche Invariante.

Man hat sich eben von dem willkürlichen Faktor q zu befreien. Auf diese Weise erhält man die zweite Invariante

$$\mathcal{J}_2 = \frac{s_{33}^2}{A_{33}} = \frac{q^2\bar{s}_{33}^2}{q^2\bar{A}_{33}} = \frac{\bar{s}_{33}^2}{\bar{A}_{33}} \tag{2.11}$$

Mittels dieser beiden Invarianten:

$$\mathcal{J}_1 = \frac{(\varepsilon^2 - 2)\cdot(1-\varepsilon^2)}{p^2} \tag{2.12}$$

$$\mathcal{J}_2 = \frac{(\varepsilon^2 - 2)^2}{1-\varepsilon^2} \tag{2.13}$$

sind die Fundamentalinvarianten ε und p berechenbar. Wegen $q \neq 0$ bedingen sich zunächst $A_{33} = 0$ und $\bar{A}_{33} = 0$ sowie $A = 0$ und $\bar{A} = 0$. Im ersten Fall ist $\varepsilon = 1$, im zweiten Fall ist $p = 0$ also bereits bekannt. Allgemein erhält man aus (2.13) für ε^2 die quadratische Gleichung

$$A_{33}\varepsilon^4 + (s_{33}^2 - 4A_{33})\varepsilon^2 - (s_{33}^2 - 4A_{33}) = 0$$

mit der Diskriminante $D = (s_{33}^2 - 4A_{33})^2 + 4A_{33}(s_{33}^2 - 4A_{33}) = s_{33}^2(s_{33}^2 - 4A_{33}) = s_{33}^2\big((a_{11} + a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)\big) = s_{33}^2\big((a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2\big) \geq 0$, so dass ε^2 reell ist.

Hinsichtlich der aus (2.12) fliessenden Bestimmung von p, nämlich

$$p^2 = \frac{(\varepsilon^2 - 2)(1 - \varepsilon^2)}{\mathcal{J}_1} \tag{2.14}$$

sind die beiden Fälle $\varepsilon^2 - 2 = 0$ und $1 - \varepsilon^2 = 0$ anders zu behandeln, da hierfür (2.14) nicht aus (2.12) gebildet werden kann. Wieder ist es natürlich, dass man in diesen beiden Fällen $s_{33} = 0$ und $A_{33} = 0$ durch geeignete Kombinationen der Invarianten $\mathcal{J}_1$ und $\mathcal{J}_2$ die Größen s_{33} bzw. A_{33} eliminiert.

Aufgabe 2.7. *a*) Entwickeln Sie für den Fall $s_{33} = 0$ die Formel (vorher durch s_{33} kürzen)

$$p^4 = \frac{(1 - \varepsilon^2)^3 \cdot \mathcal{J}_2}{\mathcal{J}_1^2}$$

b) Entwickeln Sie für den Fall $A_{33} = 0$ die Formel (vorher durch A_{33} kürzen)

$$p^2 = \frac{(\varepsilon^2 - 2)^3}{\mathcal{J}_1 \cdot \mathcal{J}_2}$$

Bemerkung. Eine vorgreifende Bemerkung ist am Platze:

Die Größen s_{33}, A_{33} und A sind selbstverständlich auch im Falle einer beliebigen Kurve zweiter Ordnung berechenbar – wegen der Existenz der nullteiligen $K_2 = x^2 + 1 = 0$ ist die bisher behandelte Klasse der (fokal)erzeugbaren K_2 eine echte Teilmenge der Menge aller K_2 – jedoch kann im allgemeinen Fall gar keine Rede von deren Quasiinvarianz sein. Noch weniger kann *bisher* von deren Invarianten $\mathcal{J}_1$ und $\mathcal{J}_2$ gesprochen werden, wenngleich die Größen $\mathcal{J}_1$ und $\mathcal{J}_2$ auch im allgemeinen Fall existieren. Da man der Gleichung einer K_2 *bisher* nicht die Erzeugbarkeit der sie beschreibenden Kurve ansehen kann, werden die beiden nächsten Aufgaben wie folgt ausgesprochen:

Aufgabe 2.8. Multiplizieren Sie die K_2-Gleichungen der Aufgaben 2.1 und 2.2 mit einer selbstgewählten Zahl und gewinnen Sie erneut – aber nun aus den nicht normierten Gleichungen – die Fundamentalinvarianten.

Aufgabe 2.9. Welches ist der Grund dafür, dass Sie bei Aufgabe 2.8 für die numerische Berechnung von ε und p Gleichungen nehmen mussten, die Sie vorher selbst aus den Erzeugenden ℓ, F und ε gewonnen haben?

Aufgabe 2.10. Könnten Sie im Falle einer beliebigen (speziell bei einer nicht erzeugbaren K_2) Kurve zweiter Ordnung die Größen $\mathcal{J}_1$ und $\mathcal{J}_2$, ferner dann mittels der Formeln (2.10)–(2.14) auch die Daten ε und p formal erklären? Ja! Sind diese Daten dann normierungsinvariant? Geben Sie einige normierungsunabhängige Größen an, z.B. ist ja $\frac{a_{11}}{a_{23}}$ eine solche. Welche wichtige Eigenschaft ist für die formal definierten Daten $\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2, \varepsilon$ und p aber *bisher* nicht bewiesen?

Die vorgreifende Bemerkung ist beendet.

Eine weitere Invariante ist das Vorzeichen von A_{33}, weshalb der Typ bei erzeugbaren K_2 bereits der nicht normierten Matrix entnommen werden kann.

2.3.2. *Charakteristische Gleichung.* Aus den Elementen $a_{ik} = q\bar{a}_{ik}$ der allgemeinen Matrix einer erzeugbaren K_2 ergibt sich wegen (2.8)

$$\frac{A_{33}}{q^2} + \frac{s_{33}}{q} + 1 = 0 \tag{2.15}$$

Mit $q = -\lambda$ entsteht die sogenannte *charakteristische Gleichung*

$$\lambda^2 - s_{33}\lambda + A_{33} = 0 \tag{2.16}$$

deren Wurzeln λ_1 und λ_2 *Eigenwerte* heißen.

(2.15), im erzeugbaren Fall natürlich lösbar, verlangt im allgemeinen Fall den Lösbarkeitsnachweis: $(A_{33}, s_{33}) \neq (0,0)$. Wäre $s_{33} = 0$, d.h. $a_{11} = -a_{22}$ und $A_{33} = 0$, d.h. jetzt $-a_{11}^2 - a_{12}^2 = 0$, so wäre $a_{11} = a_{12} = a_{22} = 0$, entgegen der Annahme einer K_2-Gleichung. (2.16), über die Fokalerzeugung hinaus definiert, lautet wegen (2.3) und (2.5) im normierten erzeugbaren Fall

$$\bar{\lambda}^2 - (\varepsilon^2 - 2)\bar{\lambda} + (1 - \varepsilon^2) = 0$$

mit den Eigenwerten $\bar{\lambda}_1 = \varepsilon^2 - 1$ und $\bar{\lambda}_2 = -1$.

Also gilt

$$\frac{\bar{\lambda}_1}{\bar{\lambda}_2} = 1 - \varepsilon^2 \tag{2.17}$$

und

$$\bar{\lambda}_1 > \bar{\lambda}_2 \tag{2.18}$$

Im unnormierten erzeugbaren Fall ist die *charakteristische Gleichung*

$$\lambda^2 - s_{33}\lambda + A_{33} = 0$$

mit $\lambda_1 = q\bar{\lambda}_1$ und $\lambda_2 = q\bar{\lambda}_2$. Zwar gilt

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = 1 - \varepsilon^2 \tag{2.19}$$

jedoch setzt sich die Ordnungsrelation (2.18) wegen der Möglichkeit $q < 0$ nicht generell fort. ε^2 wird daher wegen der *Nichtunterscheidbarkeit* der Eigenwerte wie im Anschluß an (2.13) doppeldeutig. In den nicht parabolischen Fällen gibt es zwei Werte für ε^2: $1 - \varepsilon_1^2 = \frac{1}{1-\varepsilon_2^2}$ oder $\varepsilon_2^2 = \frac{\varepsilon_1^2}{\varepsilon_1^2 - 1}$, also im elliptischen Falle neben der reellen eine rein imaginäre numerische Exzentrizität, was jetzt nicht interessieren soll. Soweit möglich, wollen wir generell das reelle ε zurückgewinnen. Da nach (2.9) zu $\bar{A}_{33} \geq 0$ stets $\bar{s}_{33} < 0$ gehört, verfahren wir wegen $\operatorname{sig} A_{33} = \operatorname{sig} \bar{A}_{33}$ (sig $=$ signum $=$ Vorzeichen) im nicht normierten erzeugbaren Fall (eventuelle Vorzeichenänderung bei den a_{ik}) ebenfalls so:

V_1: Falls $A_{33} \geq 0$, ist in der *charakteristischen Gleichung* $s_{33} < 0$ zu nehmen.

Für $A_{33} < 0$ ist V_1 wegen der Möglichkeit $s_{33} \gtreqless 0$ *keine* zum eindeutigen ε^2 führende Vorschrift. Wieder in Anlehnung an (2.9) verfahren wir so:

V_2: Falls $A_{33} < 0$ und $A \neq 0$, ist in der *charakteristischen Gleichung* jenes s_{33} zu nehmen, das zu $A > 0$ gehört.

Im Falle $A_{33} < 0$ und $A = 0$ ist weder V_1 noch V_2 eine zum eindeutigen ε^2 führende Vorschrift. Daher erfolgt die

V_3: Falls $A_{33} < 0$ und $A = 0$, ist das Glied s_{33} der *charakteristischen Gleichung* den gegebenen Koeffizienten a_{ik} zu entnehmen. Es gibt damit bei der hyperbolisch zerfallenden K_2 *zwei* reelle Werte für ε.

Siehe Aufgabe 2.20 zu V_3.

Wir betonen nochmals, daß alle drei *Vorschriften* durch eine eventuelle Vorzeichenänderung der a_{ik} erfüllt werden können. Durch die drei Vorschriften ist die Fortsetzung der Anordnung (2.18) durch die Definition

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \tag{2.20}$$

auf alle nicht normierten Fälle ausgedehnt, und es gilt

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{-\lambda_2}} \tag{2.21}$$

Dabei ist

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}\left(s_{33} + \sqrt{s_{33}^2 - 4A_{33}}\right) \text{ und } \lambda_2 = \frac{1}{2}\left(s_{33} - \sqrt{s_{33}^2 - 4A_{33}}\right) \tag{2.22}$$

Wegen $s_{33}^2 - 4A_{33} = (a_{11} + a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22} - a_{12}^2) = (a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2 \geq 0$ sind die Eigenwerte *aller* K_2 reell. Für die erzeugbaren K_2 sind wegen (2.22) die Eigenwerte quasiinvariant. In allen Fällen ist der Gleichung der betreffenden K_2 ein von ihrer Normierung unabhängiges ε zugeordnet. Daher können wir für die gegebenen *Gleichungen* stets die Daten $\lambda_1, \lambda_2, \varepsilon$ und p bestimmen.

Beispiel 2.2. Wir berechnen $\lambda_1, \lambda_2, \varepsilon$ und p für die Gleichung $K_2 = 3x^2 - 4xy + 3y^2 - 8x + 2y + 2 = 0$. Es ist $A_{33} = 5 > 0, s_{33} = +6$. Gemäß V_1 ist Vorzeichenänderung der a_{ik} erforderlich $K_2 = -3x^2 + 4xy - 3y^2 + 8x - 2y - 2 = 0$. Es ist $A_{33} = 5 > 0, s_{33} = -6$. Charakteristische Gleichung: $\lambda^2 + 6\lambda + 5 = 0$; $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -5$ und $\varepsilon = \frac{2}{5}\sqrt{5}$; (2.8) besagt, dass eine normierte Gleichung vorliegt, was mit der Erzeugbarkeit nichts zu tun hat. Nach (2.14) ist $p = \frac{1}{5}\sqrt{5}$. $A = 25$ ist die Determinante der Matrix $\begin{pmatrix} -3 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & -1 \\ 4 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie wie im Beispiel die vier Daten in den Aufgaben

Aufgabe 2.11. $K_2 = 2x^2 + y^2 + 4 = 0$

Aufgabe 2.12. $K_2 = (2x - y + 5)^2 = 0$

Aufgabe 2.13. $K_2 = x^2 + 2xy + y^2 + 4x - 6y + 9 = 0$

Aufgabe 2.14. $K_2 = x^2 + 4xy + y^2 - 4x + 2y + 5 = 0$

Aufgabe 2.15. Beweisen Sie:

$$\lambda_1 + \lambda_2 = s_{33} \tag{2.23}$$

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = A_{33} \tag{2.24}$$

Aufgabe 2.16. Zeigen Sie, dass

$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0$ die *charakteristische Gleichung* ist.

Aufgabe 2.17. Beweisen Sie, dass

$$a_{11} - \lambda_1 \leq 0, \qquad a_{22} - \lambda_1 \leq 0 \tag{2.25}$$

$$a_{11} - \lambda_2 \geq 0, \qquad a_{22} - \lambda_2 \geq 0 \tag{2.26}$$

Aufgabe 2.18. Beweisen Sie: wenn eine Quasiinvariante Null ist, so ist sie eine Invariante. Was bedeutet z.B. $s_{33} = 0$?

Aufgabe 2.19. Bei (erzeugbaren) $\begin{matrix} \text{elliptischen} \\ \text{parabolischen} \\ \text{hyperbolischen} \end{matrix}$ Typen ist $\lambda_1 \lesseqqgtr 0, \lambda_2 < 0$.

Aufgabe 2.20. Beweisen Sie die Relation $(1-\varepsilon_1^2)(1-\varepsilon_2^2) = 1$ bei einer hyperbolisch zerfallenden K_2 elementargeometrisch, indem Sie in Abb. 6 auch die zweite Winkelhalbierende als Leitlinie ansehen.

Aufgabe 2.21. Geben Sie den Wert von λ_2 im parabolischen und im Fall $\varepsilon^2 = 2$ an.

2.4. **Vollständigkeitsnachweis für nicht erzeugbare K_2 und die reell erzeugbaren K_2.** Nachdem durch die Vorschriften V_1, V_2 und V_3 und (2.21) jeder K_2-Gleichung – für erzeugte K_2 sogar der Kurve – eine von der Normierung der Koeffizienten a_{ik} unabhängige, numerische Exzentrizität genannte Größe ε zugeordnet ist, sollen den Koeffizienten a_{ik} jetzt noch eine Gerade (*Leitgerade*) und ein Punkt (*Brennpunkt*) zugeordnet werden. Diese Zuordnung soll in dem Sinne umkehrbar sein, dass man aus den drei Größen (numerische Exzentrizität, Leitgerade und Brennpunkt) durch Anwendung von (1.3) die K_2-Gleichung zurückerhält (von einer multiplikativen Konstanten abgesehen). Diese Zuordnung wird (siehe Aufgabe 2.4) nicht eindeutig sein, und sie wird nicht grundsätzlich existieren (die nullteilige K_2 mit der Gleichung $x^2 + 1 = 0$ ist in den Abbildungen 2 bis 7 nicht enthalten). Die Zuordnung wird durch ein System $\mathcal{F}$ von *Umkehrformeln*, welches den Koeffizienten a_{ik} ein erzeugendes Tripel (ε, ℓ, F) zuordnet, zunächst aus der Matrix (2.2) entwickelt. Das System $\mathcal{F}$ fällt dann in systematischer Weise bei seiner Ausdehnung auf den Fall der beliebigen K_2 in genau zwei Klassen der *nicht erzeugbaren* Typen aus.

Die gleichzeitige Betrachtung der Matrix (2.2) und einer beliebigen symmetrischen Matrix zwecks Ausdehnung des zu entwickelnden Systems $\mathcal{F}$ verlangt den Nachweis der

Aussage 2.1. *Die Matrix der Gleichung jeder Kurve zweiter Ordnung ist normierbar.*

Beweis. Die reelle Lösbarkeit von (2.15) ist bereits nachgewiesen. Darüber hinaus zeigen wir, dass die Normierung der a_{ik} durch Division mit $-\lambda_2$ vorzunehmen ist: Bei der Wahl $\bar{a}_{ik} = \frac{a_{ik}}{-\lambda_1}$ wird nämlich $\varepsilon^2 = 1 - \bar{A}_{33} = 1 - \frac{A_{33}}{\lambda_1^2} = 1 - \frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1^2} = 1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ im Widerspruch zu (2.19). □

Aufgabe 2.22. Beweisen Sie, dass im Falle $\lambda_2 = -1$ eine normierte K_2-Matrix vorliegt. Beachten Sie das nächste Beispiel 2.3 hinsichtlich (2.27). Weshalb bevorzugen wir unsere ε-Bestimmung? Wieviele Erzeugungen gibt es wegen der biquadratischen Gleichung im Anschluß an (2.10)–(2.14)?

Nach der durchgeführten Normierung und der Berechnung von ε für *alle* Fälle gilt für die erzeugbaren Fälle wegen (2.2)

$$u = \pm\frac{1}{\varepsilon}\sqrt{1+\bar{a}_{11}}, v = \pm\frac{1}{\varepsilon}\sqrt{1+\bar{a}_{22}}, \text{ mit } \operatorname{sig} uv = \operatorname{sig} \bar{a}_{12} \text{ falls } \bar{a}_{12} \neq 0 \tag{2.27}$$

Falls $\bar{a}_{12} = 0$, ist wegen $u^2 + v^2 = 1$ entweder $u = \pm 1, v = 0$ oder $v = \pm 1, u = 0$ bei beliebiger Vorzeichenwahl.

2.4.1. *Erste Ausnahme.* Wir entnehmen (2.27), dass für $\varepsilon = 0$ keine Leitgeradenkoeffizienten u und v existieren. Also bilden die Kurven mit $\varepsilon = 0$ eine Klasse *nichterzeugbarer* Typen (Existenznachweis folgt).

Weiter entnehmen wir der Matrix (2.2)

$$x_F = \bar{a}_{13} - \varepsilon^2 uw \text{ und } y_F = \bar{a}_{23} - \varepsilon^2 vw \tag{2.28}$$

womit – der Fall $\varepsilon = 0$ ist bereits ausgeschlossen – die Existenz eines Brennpunktes auf die der Größe w zurückgespielt ist. Für die Größe w ergibt sich nun über $\bar{a}_{33}$ aus (2.2) die Gleichung

$$\varepsilon^2(1-\varepsilon^2)w^2 + 2\varepsilon^2(\bar{a}_{13}u + \bar{a}_{23}v)w - \bar{a}_{13}^2 - \bar{a}_{23}^2 - \bar{a}_{33} = 0 \tag{2.29}$$

2.4.2. *Zweite Ausnahme.* Wir entnehmen (2.29), dass für

$$(1-\varepsilon^2, \bar{a}_{13}u + \bar{a}_{23}v) = (0,0) \text{ und } \bar{a}_{13}^2 + \bar{a}_{23}^2 + \bar{a}_{33} \neq 0 \tag{2.30}$$

die quadratische Gleichung für w unlösbar ist. Also bilden die Kurven mit der Bedingung (2.30) die zweite Klasse der *nichterzeugbaren* Typen (Existenznachweis folgt).

In allen anderen Fällen liefern (2.27), (2.28), (2.29) (*Formelsystem* $\mathcal{F}$) zum gefundenen ε (mindestens) eine Leitgerade ℓ und einen Fokus F. Aus diesem Grunde, und um das Formelsystem $\mathcal{F}$ zunächst nicht auf Realitätsfragen untersuchen zu müssen, nehmen wir jetzt die *dritte Verallgemeinerung* vor, indem wir für die Daten u, v, w, x_F, y_F komplexe Zahlen und für ε den Wert Null zulassen. Natürlich unterliegt diese dritte Erweiterung starken, hier nicht näher interessierenden Einschränkungen, da die Koeffizienten a_{ik} der gemäß $r^2 - \varepsilon^2 d^2 = 0$ bestimmten K_2-Gleichung nach Definition stets reell sein müssen.

Unter vorläufigem Ausschluß der beiden nichterzeugbaren Klassen bringen wir ein Beispiel und Aufgaben zur Berechnung der erzeugenden Tripel (ε, ℓ, F), aus denen sich alle weiteren Daten der K_2 ergeben.

Beispiel 2.3. Die Gleichung $K_2 = 4x^2 - 20xy + 19y^2 + 58x - 110y + 154 = 0$ hat die Matrix

$$\begin{pmatrix} 4 & -10 & 29 \\ -10 & 19 & -55 \\ 29 & -55 & 154 \end{pmatrix}$$

Wegen $A_{33} = -24 < 0$ und $A = 29(550-551) + 55(-220+290) - 154(76-100) = 125 > 0$ handelt es sich um eine Hyperbel. Nach der V_2 ist $s_{33} = 23$. Die Eigenwerte sind $\lambda_1 = 24$ und $\lambda_2 = -1$; nach Aufgabe 2.22 ist die vorliegende Matrix also normiert. Aus (2.21) folgt $\varepsilon = 5$ und aus (2.7) wegen $\bar{A} = A$ $p = 5\sqrt{5}$. Wegen $\bar{a}_{12} = -10 < 0$ ergibt (2.27) $u = \mp\frac{1}{\sqrt{5}}, v = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}$. Wir wählen $u = -\frac{1}{\sqrt{5}}, v = \frac{2}{\sqrt{5}}$. (2.29) liefert die quadratische Gleichung $w^2 + 2\frac{139}{24\sqrt{5}}w + \frac{67}{10} = 0$, sodass $w_1 = \frac{-67}{12\sqrt{5}}$ und $w_2 = \frac{-6}{\sqrt{5}}$. Daher haben die Leitgeraden die Gleichungen $\ell_1 = 12x - 24y + 67 = 0$ und $\ell_2 = x - 2y + 6 = 0$. Aus (2.28) entnimmt man $F_1(\frac{13}{12}|\frac{5}{6})$ und $F_2(-1|5)$, woraus $M(\frac{1}{24}|\frac{35}{12})$ folgt. Somit könnte man ohne den vorausgesetzten Ausschluß nicht erzeugbarer Typen erst jetzt auf eine Hyperbel geschlossen werden; wir wissen ja, dass die Tabelle (2.9) bisher nur Schlüsse in einer Richtung erlaubt. Die Gleichung der Hauptachse: $h = 2x + y - 3 = 0$, die der Nebenachse $n = 24x - 48y + 139 = 0$. Weiter wird $a = \frac{p}{1-\varepsilon^2} = -\frac{5}{24}\sqrt{5}, b^2 = ap = -\frac{125}{24}$ und $e = \varepsilon a = -\frac{25}{24}\sqrt{5}$. Für die Ortsverktoren der Scheitel benutzen wir in leicht verständlicher Weise die Vektorgleichung $\mathfrak{r}_{S_{1,2}} = \mathfrak{r}_M \pm a\mathfrak{n}$, wo $\mathfrak{n} = u\mathfrak{i} + v\mathfrak{j}$ der *Normaleneinheitsvektor* der *Leitlinie* ist. Damit erhalten wir $S_1(\frac{1}{4}|\frac{5}{2})$ und $S_2(-\frac{1}{6}|\frac{10}{3})$.

Diskutieren Sie wie im Beispiel 2.3 die folgenden Aufgaben.

Aufgabe 2.23. $K_2 = 8x^2 - 24xy + 15y^2 + 34x - 42y + 20 = 0$

Aufgabe 2.24. $K_2 = 0.68x^2 - 0.48xy - 0.82y^2 - 3.2x - 2.6y + 1.75 = 0$

Aufgabe 2.25. $K_2 = 4x^2 - 20xy + 19y^2 + 38x - 72y + 63 = 0$

Aufgabe 2.26. $K_2 = 4x^2 - 20xy + 19y^2 - 118x + 238y + 718 = 0$

Bemerkung. In § 3 wird gezeigt, wie man die Diskussion einer K_2 ohne Normierung der a_{ik} durchführen und auch jede Einzelfrage für sich beantworten kann.

Wenn auch auf eine ausführliche Klärung der Realitätsverhältnisse bei mehreren erzeugenden Tripeln für eine bestimmte erzeugte K_2 verzichtet wird, so soll doch die eine stark interessierende Frage beantwortet werden.

Welche erzeugbaren K_2 besitzen grundsätzlich kein reelles *erzeugendes Tripel ε, ℓ, F?*

Wegen $\bar{a}_{ik} = \frac{a_{ik}}{-\lambda_2}$ wird aus (2.27) mit (2.21)

$$u = \pm\sqrt{\frac{a_{11} - \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}} \text{ und } v = \pm\sqrt{\frac{a_{22} - \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}} \text{ mit } \operatorname{sig} uv = \operatorname{sig} a_{12} \tag{2.31}$$

Nach Aufgabe 2.17 (2.25) und (2.20) sind die Richtungskoeffizienten u und v – es ist $\varepsilon \neq 0$ – der Leitgeraden also reell; genauer gesagt sind durch unsere Vorschriften V_1, V_2 und V_3 diese Daten stets reell auswählbar. Ferner sind nach (2.28) in diesem Sinne die Koordinaten von F stets reell, wenn w reell ist. Damit hängt die Antwort auf die Frage an dem Vorzeichen der Diskriminante der quadratischen Gleichung für w. Die Lösbarkeit der Gleichung für w – wir beschäftigen uns mit erzeugbaren K_2 – ist vorausgesetzt. Die parabolischen Fälle scheiden, da die Gleichung für w dann linear ist, also eine reelle Lösung besitzt, schon aus der Betrachtung aus.

Diskriminantenberechnung: (Querstriche sind fortgelassen)

$$\begin{aligned}
D &= 4\varepsilon^4(a_{13}^2u^2 + 2a_{13}a_{23}uv + a_{23}^2v^2) + (a_{33} + a_{13}^2 + a_{23}^2)4\varepsilon^2(1-\varepsilon^2) = \\
&= 4\varepsilon^2\big(a_{13}^2(\varepsilon^2u^2 + 1 - \varepsilon^2) + 2a_{12}a_{13}a_{23} + a_{23}^2(\varepsilon^2v^2 + 1 - \varepsilon^2) + a_{33}A_{33}\big) = \\
&= 4\varepsilon^2\big(\varepsilon^2a_{13}^2(u^2-1) + a_{13}^2 + 2a_{12}a_{13}a_{23} + \varepsilon^2a_{23}^2(v^2-1) + a_{23}^2 + a_{33}A_{33}\big) = \\
&= 4\varepsilon^2(-\varepsilon^2v^2a_{13}^2 + a_{13}^2 + 2a_{12}a_{13}a_{23} - \varepsilon^2u^2a_{23}^2 + a_{23}^2 + a_{33}A_{33}) = \\
&= 4\varepsilon^2\big(a_{13}^2(-a_{22} - 1 + 1) + 2a_{12}a_{13}a_{23} + a_{23}^2(-a_{11} - 1 + 1) + a_{33}A_{33}\big) = \\
&= 4\varepsilon^2\big(a_{13}(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}) + a_{23}(a_{13}a_{12} - a_{11}a_{23}) + a_{33}A_{33}\big)
\end{aligned}$$

also ist

$$D = 4\varepsilon^2(\bar{a}_{13}\bar{A}_{13} + \bar{a}_{23}\bar{A}_{23} + \bar{a}_{33}\bar{A}_{33}) = 4\varepsilon^2\bar{A}$$

Damit ist die Entscheidung über das Vorzeichen der Diskriminante gefällt: auch die hyperbolischen Fälle scheiden aus der Betrachtung aus, da unsere Vorschrift V_2 die Normierung $A \geq 0$ verlangt.

Lediglich im elliptischen Fall könnte die Vorschrift V_1, welche die Normierung $s_{33} < 0$ verlangt, ein negatives A nach sich ziehen, wo mit $s_{33} < 0, A_{33} > 0, A < 0$ eine erzeugbare K_2 mit grundsätzlich *nicht reell* wählbaren Erzeugenden ℓ und F ermöglicht wäre. Die $K_2 = 3x^2 + y^2 + 1 = 0$ hat zwar diese Eigenschaften, beweist aber deshalb noch nicht die Exsitenz eines solchen Typs, da wir der Gleichung einer K_2 immer noch nicht die Erzeugbarkeit der sie beschreibenden Kurve ansehen können; es sei denn, wir überzeugen uns durch Anwendung des Formelsystems $\mathcal{F}$ explizit davon, dass die beiden versagenden Fälle nicht vorliegen. Im nächsten Abschnitt wird auch diese letzte Frage geklärt werden.

Aufgabe 2.27. Zeigen Sie, dass die $K_2 = x^2 + xy + y^2 + x + 3y + 3 = 0$ eine solche nullteilige Ellipse sein könnte, indem Sie s_{33}, A_{33} und A bestimmen. Zeigen Sie dann, dass sie eine solche Kurve ist (Erzeugbarkeit!), indem Sie $\varepsilon, \ell_1, \ell_2, F_1$ und F_2 angeben.

2.5. **Nicht erzeugbare Kurven zweiter Ordnung.** Es gibt nach den Erkenntnissen von Abschnitt 2.4 genau zwei Klassen.

2.5.1. $\varepsilon = 0$.

Aus (2.19) $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = 1 - \varepsilon^2$ folgt $\lambda_1 = \lambda_2$. Die *charakteristische Gleichung* hat eine Doppelwurzel. Daher verschwindet ihre Diskriminante $s_{33}^2 - 4A_{33} = (a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2$, woraus $a_{11} = a_{22}, a_{12} = 0$ folgt. Es liegt also die $K_2 = a_{11}x^2 + a_{11}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$ vor. Wegen $a_{11} \neq 0$ ergibt dies die *Kreisgleichung*

$$\left(x + \frac{a_{13}}{a_{11}}\right)^2 + \left(y + \frac{a_{23}}{a_{11}}\right)^2 = \frac{a_{13}^2 + a_{23}^2 - a_{11}a_{33}}{a_{11}^2} \tag{2.32}$$

Andrerseits haben *Kreise* in der bekannten geometrischen Interpretation:

$$(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = R^2 \tag{2.33}$$

die Eigenschaften $a_{11} = a_{22}$ und $a_{12} = 0$, was $\varepsilon = 0$ bedeutet.

Die *Kreise* sind durch die äquivalenten Bedingungen

$$\varepsilon = 0 \text{ oder } a_{11} = a_{22} \text{ und } a_{12} = 0 \tag{2.34}$$

gekennzeichnet und bilden die eine *nicht erzeugbare* Klasse. Wegen $A_{33} > 0$ wird diese Klasse den elliptischen Typen eingegliedert.

Aufgabe 2.28. *a*) Weshalb muss die Quasiinvarianz von s_{33}, A_{33} und A bei Kreisen gesondert bewiesen werden?
b) Führen Sie den Nachweis durch. Bestimmen Sie die Daten s_{33}, A_{33} und A allgemein und dann speziell bei (2.33).

Aufgabe 2.29. (a_{ik}) sei eine Kreismatrix. Bestimmen Sie den Radius R durch eine aus den Quasiinvarianten zu bildende Invariante.

Aufgabe 2.30. Beweisen Sie: $M(\frac{A_{31}}{A_{33}} | \frac{A_{32}}{A_{33}})$

Aufgabe 2.31. Unter welchen Bedingungen ist ein Kreis reell, Nullkreis oder nullteilig?

Beispiel 2.4. Der Kreis $9x^2 + 9y^2 - 34x - 4y - 3 = 0$ hat $M(\frac{17}{9} | \frac{2}{9})$ und $R = \frac{8}{9}\sqrt{5}$.

2.5.2. *Unlösbarkeit von* (2.29). Der Unlösbarkeitsbedingung (2.30) in der Gestalt $\varepsilon = 1$, $\bar{a}_{13}u + \bar{a}_{23}v = 0$, $\bar{a}_{13}^2 + \bar{a}_{23}^2 + \bar{a}_{33} \neq 0$ stellen wir

$$\varepsilon = 1, \qquad \bar{a}_{13}u + \bar{a}_{23}v = 0, \qquad \bar{a}_{13}^2 + \bar{a}_{23}^2 + \bar{a}_{33} = 0 \tag{2.35}$$

an die Seite. Gilt (2.35), so wird (2.29) durch jede Zahl gelöst. Speziell wird (2.29) durch eine reelle Zahl gelöst, womit dieser Fall unter den Abbildungen 2 bis 7 enthalten sein muss. Wie aus der Bemerkung im Anschluß an Abbildung 7 hervorgeht, führt (2.35) auf den erzeugbaren Fall der reellen Doppelgeraden.

Aufgabe 2.32. Schreiben Sie die Matrix (2.2) für den Spezialfall einer Doppelgeraden hin. Führen Sie den Nachweis, dass (2.35) gilt, indem Sie $\varepsilon = 1$ und $u^2 + v^2 = 1$ beachten.

Aufgabe 2.33. Weisen Sie an der Matrix der Aufgabe 2.32 die Relation $S_{33} = A_{11} + A_{22} = 0$ nach.

Aussage 2.2. *Die Doppelgeraden sind durch die vier Relationen* $A_{31} = A_{32} = A_{33} = S_{33} = 0$ *gekennzeichnet.*

Beweis. Gemäß (2.9) haben die Doppelgeraden die Eigenschaft $A_{33} = A = 0$. Aus $A_{33} = 0$ folgt allgemein $A_{31}^2 = -a_{22}A$ und $A_{32}^2 = -a_{11}A$.

Aufgabe 2.34. Beweisen Sie das und klären Sie, ob die Symmetrie der Matrix beim Beweis benutzt werden muss.

Gilt außerdem $A = 0$, so ist $A_{32} = A_{31} = 0$ offensichtlich. Die Lösung der Aufgabe 2.33 besagt $S_{33} = 0$. Das ist die erste Hälfte des Beweises.

Aufgabe 2.35. Weisen Sie alle in der Aussage formulierten Eigenschaften direkt aus der Gleichung der allgemeinen Doppelgeraden: $K_2 = (ax + by + c)^2 = 0$ nach.

Seien jetzt umgekehrt bei einer Gleichung einer K_2 die Eigenschaften der Aussage erfüllt, so setzen wir (eventuelle Vorzeichenumkehr bei den a_{ik}!) $a^2 = a_{11}$ und definieren b und c vermöge $a_{12} = ab$ und $a_{13} = ac$, so folgt aus der Symmetrie der Matrix, aus $A_{33} = 0$ und dann aus $A_{13} = 0$, dass die Matrix der K_2 bereits notwendig die Gestalt

$$\begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & a_{33} \end{pmatrix}$$

hat.

Aufgabe 2.36. Weshalb versagt dieser Gedankengang, falls $a_{11} = 0$? Wodurch können Sie diesen Teil des Beweises retten? Kann gleichzeitig $a_{22} = 0$ sein?

Aufgabe 2.37. Vollenden Sie selber den Beweis. Welcher Teil der Aussage blieb noch ungenutzt?

□

Aus dem Vergleich der Bedingung (2.30) mit der Bedingung (2.35) geht nun hervor, dass die gesuchte zweite Klasse *nicht erzeugbarer* Kurven zweiter Ordnung aus der Menge der reellen Doppelgeraden durch Ersetzung der jeweils dort auftretenden Konstanten a_{33} durch die Konstanten $a_{33} + K$ mit $K \neq 0$ hervorgeht.

Aufgabe 2.38. Existiert für Sie damit diese zweite Klasse der nicht erzeugbaren K_2? Sicher kann man doch bei einer beliebigen Doppelgeradengleichung dem Koeffizienten $\bar{a}_{33}$ die Zahl 1 hinzufügen. Damit geht doch die dritte Bedingung von (2.35) in die dritte Bedingung von (2.30) über. Wieviele Bedingungen gehören zu (2.30) und (2.35)? Welcher Nachweis fehlt Ihnen also noch?

Aufgabe 2.39. Beweisen Sie in Analogie zur vorherigen Aufgabe, dass durch die Ersetzung von a_{33} durch $a_{33} + K$ bei der Matrix einer Doppelgeraden die bestehenden Relationen $A_{13} = A_{23} = A_{33} = 0$ nicht zerstört werden, wohl aber die eine Relation $S_{33} = 0$ zerstört wird.

Durch die Lösung der Aufgabe 2.38 gibt es also jetzt die zweite Klasse der *nicht erzeugbaren* Typen, und aus jedem Vertreter dieser Klasse ensteht durch Addition einer Konstanten C^2 zu a_{33}, mit der Bedingung des Verschwindens von S_{33} (Aufgabe 2.39) eine Doppelgerade. Also haben die Vertreter dieser zweiten Klasse die Gleichung

$$K_2 = (ax + by + c)^2 - C^2 = (ax + by + c + C)(ax + by + c - C) = 0 \tag{2.36}$$

Die zweite Klasse *nicht erzeugbarer* Kurven zweiter Ordnung besteht ausschließlich aus *Parallelpaaren*, die für $C^2 > 0$ reell und für $C^2 < 0$ nullteilig (komplex) sind. Diese zweite Klasse wird wegen $A_{33} = 0$ nunmehr den *parabolischen* Typen untergeordnet.

Aufgabe 2.40. Beweisen Sie, dass $C^2 = -\frac{S_{33}}{s_{33}}$ ist. Beachten Sie, dass $s_{33} = a^2 + b^2 > 0$ ist.

Zusammenfassung:

Die $\begin{matrix}\text{reellen}\\ \text{nullteiligen}\end{matrix}$ *Parallelenpaare* sind durch die Relationen

$$A_{33} = A = 0 \text{ mit } S_{33} \begin{matrix} < 0 \\ > 0 \end{matrix}$$

gekennzeichnet.

Aufgabe 2.41. *a*) Zeigen Sie, dass im Falle $S_{33} \leq 0, A = A_{33} = 0$, S_{33} eine neue Quasiinvariante ist und im Falle $S_{33} > 0$, sig S_{33} eine neue Invariante ist. Anleitung: Nehmen Sie $K_2 = (ax + by + c_1)(ax + by + c_2) = 0$ mit $a^2 + b^2 = 1$ und deuten Sie die geometrische Größe $(c_1 - c_2)^2$.
b) Beweisen Sie jetzt die *invariante Abstandsformel*

$$d = \frac{2}{s_{33}}\sqrt{-S_{33}} \tag{2.37}$$

für *Parallelenpaare*, wenn $s_{33} > 0$ gewählt wird.

Aufgabe 2.42. Gegeben die Doppelgerade $g^2 = 0$. Bestimmen Sie die k^2 so, dass die $K_2 = g^2 - k^2 = 0$ ein *Parallelenpaar* mit Abstand d darstellt.

Aufgabe 2.43. Weshalb brauchen Sie im Gegensatz zu den *Kreisen* den Nachweis der Quasiinvarianz für die Daten s_{33}, A_{33} und A nicht zu führen?

2.6. **Schlußbemerkung.** Bei dem Versuch, den Koeffizienten a_{ik} durch das Formelsystem $\mathcal{F}$ erzeugende Elemente ℓ, F und ε zuzuordnen, sind von uns die beiden Klassen der *Kreise* und *Parallelenpaare* in systematischer Weise als einzige nicht erzeugbare Kurven zweiter Ordnung erkannt worden. Diese Klassen sind nunmehr ebenfalls durch ihre Quasiinvarianten bestimmbar. Die im Abschnitt 2.4 am Schluß erwähnten elliptischen Typen mit der Eigenschaft $s_{33} < 0$, $A_{33} > 0$, $A < 0$ besitzen laut den dortigen Ausführungen *kein* reelles Erzeugendensystem. Damals mußte aber die Frage offen bleiben, ob diese Typen überhaupt ein Erzeugendensystem (wenn ja, dann komplex) besitzen. Im Einzelfall konnte diese Entscheidung wie in Aufgabe 2.27 durch eine numerische, das Formelsystem $\mathcal{F}$ benutzende, Rechnung herbeigeführt werden.

Aufgabe 2.44. Weshalb besitzen die Kurven *a*) $x^2+y^2+1 = 0$, *b*) $2x^2+3y^2+1 = 0$ beide *kein reelles* Erzeugendensystem? Weshalb besitzt die Kurve *a*) *überhaupt kein* Erzeugendensystem? Weshalb besitzt die Kurve *b*) *ein* Erzeugendensystem? Bitte *nicht* das Formelsystem $\mathcal{F}$ benutzen.

Nach Lösung der Aufgabe 2.44 haben wir unseren sechs Fällen der in Abb. 2 bis 7 dargestellten (reell) *fokalerzeugbaren* Kurven zweiter Ordnung wegen der eingeführten (*dritte Verallgemeinerung*) Ausdehnung der Erzeugenden auf komplexe Zahlen die nullteiligen Ellipsen hinzuzufügen, die nicht Kreise sind.

Wir haben also sieben Typen von *fokalerzeugbaren* Kurven zweiter Ordnung. Davon sind sechs Typen reell erzeugbar. Wir haben zwei Typen *nicht fokalerzeugbarer* Kurven zweiter Ordnung. Wir haben den Vollständigkeitsnachweis geführt. Wir haben alle Typen durch ihre Quasiinvarianten algebraisch gekennzeichnet.

Die Einteilung nach den Quasiinvarianten gestattet die Anfertigung einer übersichtlichen Klassifikationstabelle. Diese Klassifikationstabelle ermöglicht den schnellsten Ausbau und die Lösung aller weiteren Probleme der Theorie der Kurven zweiter Ordnung mit reellen Koeffizienten.

Aufgabe 2.45. Weshalb können Sie z.B. in der Differentialrechnung aus dem Verschwinden der ersten Ableitung einer Funktion nicht auf ein Extremum schließen?

Weshalb kennzeichnen die Eigenschaften der normierten Invarianten in der Tabelle (2.9) also erst jetzt die dort genannten K_2-Typen?

Beachten Sie, dass die Tabelle (2.9) um die nullteiligen Ellipsen, welche nicht auch Kreise sind, ergänzt ist.

Beachten Sie ferner, dass Sie zu den Eigenschaften über die normierten Invarianten in (2.9) noch die Erzeugbarkeit hinzuzufügen haben, um auf die angegebenen Typen schließen zu können. Vergleichen Sie nun die Tabelle (2.9) mit den beiden nächsten Tabellen 1 und 2, die an den Erzeugbarkeitsbegriff nicht mehr gebunden sind.

3. Klassifikation und nähere invariante Beschreibung der Kurven zweiter Ordnung

3.1. **Klassifikation.** Unterwirft man die Koeffizienten a_{ik} den Vorschriften V_1, V_2 und V_3 des § 2, so erhält man die nützliche Tabelle 1.

Die folgende Tabelle 2 ist ausschließlich für Klassifikationen gedacht und verzichtet auf jegliche Normierung. In ihr ist neben das bereits typisierende Vorzeichen von A_{33} das von $s_{33}A$ getreten. Beide Vorzeichen sind Normierungsinvariante. Beide Tabellen sind durch die in § 1.8 angekündigte nähere Kennzeichnung der Hyperbel vervollständigt. Ihre Quasiinvarianten dürfen wir aus der Achsen- oder Mittelpunktgleichung (1.9) entnehmen, mit $b^2 = ap < 0$! Nach Multiplikation mit a^2p entsteht die Gleichung $px^2 + ay^2 - a^2p = 0$, welche die Matrix $\begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & -a^2p \end{pmatrix}$ mit den Daten $A = (-a)^3p^2 > 0$, $A_{33} = ap < 0$ und $s_{33} = p + a$ besitzt. Es ist also: $p \gtreqless -a$ für $s_{33} \gtreqless 0$ und das heißt nach Abschnitt 1.8: eine Hyperbel ist $\begin{matrix}\text{stumpf}\\ \text{rechtwinklig}\\ \text{spitz}\end{matrix}$ für $s_{33} \gtreqless 0$.

Beispiel 3.1. $K_2 = 4x^2 - 16xy + 16y^2 - 328x + 56y + 1324 = 0$. Die Matrix $\begin{pmatrix} 4 & -8 & -164 \\ -8 & 16 & 28 \\ -164 & 28 & 1324 \end{pmatrix}$ liefert $s_{33} = 20$; $A_{33} = 0$ und $A = -164(-224 + 2624) - 28(112 - 1312) = -600^2$; $s_{33}A < 0$. Die K_2 ist eine Parabel.

Bei den folgenden K_2 soll der Typ festgestellt werden. Zerfällt die Kurve, so ist die Form in das Produkt zweier Formen zu zerlegen.

Aufgabe 3.1. $K_2 = 7x^2 - 12xy - 4y^2 - 120x + 80y + 500 = 0$

Aufgabe 3.2. $K_2 = x^2 + 4xy + 13y^2 - 10x - 44y + 50 = 0$

Aufgabe 3.3. $K_2 = x^2 + 2xy + y^2 + 4x + 4y + 8 = 0$

Aufgabe 3.4. $K_2 = 3x^2 - 2xy + 3y^2 - 4x + 2y - 5 = 0$

Aufgabe 3.5. $K_2 = 119x^2 + 216xy + 56y^2 - 686x - 402y - 4 = 0$

Aufgabe 3.6. $K_2 = 9x^2 - 14xy + 9y^2 - 8x - 8y + 16 = 0$

Aufgabe 3.7. $K_2 = 2x^2 + 5xy - 3y^2 + 3x + 9y - 16 = 0$

Aufgabe 3.8. $K_2 = 9x^2 + 24xy + 16y^2 - 12x - 16y + 4 = 0$

A_{33}	s_{33}	A	Typ
> 0	< 0	< 0	nullteilige Ellipse; nullteiliger Kreis, falls auch $a_{11} = a_{22}$ und $a_{12} = 0$
		$= 0$	Punkt; Nullkreis, falls auch $a_{11} = a_{22}$ und $a_{12} = 0$
		> 0	Ellipse; Kreis, falls auch $a_{11} = a_{22}$ und $a_{12} = 0$
$= 0$	< 0	> 0	Parabel
		$= 0$	$S_{33} < 0$ Parallelenpaar
			$S_{33} = 0$ Doppelgerade
			$S_{33} > 0$ nullteiliges Parallelenpaar
< 0	> 0	> 0	stumpfe Hyperbel
	$= 0$	> 0	rechtwinklige Hyperbel
	< 0	> 0	spitze Hyperbel
	beliebig	$= 0$	Geradenpaar mit Schnittpunkt

Tabelle 1. Klassifikation nach den Vorschriften V_1, V_2, V_3

Klasse	Kennzeichnung	Typ
elliptisch $A_{33} > 0$	$s_{33}A > 0$	nullteilige Ellipse; nullteiliger Kreis, falls $a_{11} = a_{22}$ und $a_{12} = 0$
	$A = 0$	Punkt; Nullkreis, falls $a_{11} = a_{22}$ und $a_{12} = 0$
	$s_{33}A < 0$	Ellipse; Kreis, falls $a_{11} = a_{22}$ und $a_{12} = 0$
parabolisch $A_{33} = 0$	$s_{33}A < 0$	Parabel
	$A = 0, S_{33} < 0$	Parallelenpaar
	$A = 0, S_{33} = 0$	Doppelgerade
	$A = 0, S_{33} > 0$	nullteiliges Parallelenpaar
hyperbolisch $A_{33} < 0$	$s_{33}A > 0$	stumpfe Hyperbel
	$A \neq 0, s_{33} = 0$	rechtwinklige Hyperbel
	$s_{33}A < 0$	spitze Hyperbel
	$A = 0$	Geradenpaar mit Schnittpunkt

Tabelle 2. Klassifikation ohne Normierung

Aufgabe 3.9. $K_2 = 3x^2 - 8xy - 3y^2 + 2x + 4y = 0$

Aufgabe 3.10. $K_2 = x^2 + 2xy + y^2 - 1 = 0$

Aufgabe 3.11. $K_2 = tx^2 + 2xy + ty^2 + 2tx + 2y + t = 0$

Welche Typen sind in dieser einparametrigen Schar sowie in den Scharen der folgenden Aufgaben enthalten?

Aufgabe 3.12. $K_2 = x^2 - xy + y^2 - 2ty + t^2 = 0$

Aufgabe 3.13. $K_2 = x^2 \cot\alpha + 2xy + y^2 \cot\alpha + \cot\alpha = 0$ mit $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

Aufgabe 3.14. $K_2 = x^2 \sin\alpha - 2xy + y^2 \sin\alpha - \cos\alpha = 0$ mit $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

Aufgabe 3.15. Gegeben $K_2 = tx^2 + 2xy + ty^2 + 2tx - 2ty + 1 = 0$
a) Wieviele zerfallende K_2 sind in dieser Schar enthalten und wie lauten deren Gleichungen?
b) Welches t liefert eine Parabel?
c) Bestimmen Sie die Intervalle der t-Werte, die Ellipsen und Hyperbeln liefern.

Aufgabe 3.16. Welche Typen sind in der zweiparametrigen Schar $K_2 = t^2x^2 + tsxy + s^2y^2 - t^2sx - ts^2y = 0$ enthalten?

3.2. **Bestimmung aller Invarianten aus den Quasiinvarianten.** Wir notieren noch einmal die *numerische Exzentrizität* (2.21)

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{-\lambda_2}} \tag{3.1}$$

Nach (2.7) ist $p = \sqrt{\bar{A}}$, und wegen $\bar{A} = \frac{A}{(-\lambda_2)^3}$ erhalten wir für den *Parameter*

$$p = \sqrt{\frac{A}{(-\lambda_2)^3}} \tag{3.2}$$

Da bei der Parabel nach § 2, Aufgabe 2.15 $\lambda_2 = s_{33}$ gilt, ist der *Parabelparameter*

$$p = \sqrt{\frac{A}{(-s_{33})^3}} \tag{3.3}$$

Für den *Abstand* f der *Leitgeraden* vom zugehörigen *Brennpunkt* galt $p = \varepsilon f$; mit (3.1) und (3.2) wird daher

$$f = -\frac{1}{\lambda_2}\sqrt{\frac{A}{\lambda_1 - \lambda_2}} \tag{3.4}$$

Im Falle $A_{33} \neq 0$ erhalten wir aus $a = \frac{p}{1-\varepsilon^2}$ und $b = \frac{p}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}$ nunmehr

$$a = -\frac{1}{\lambda_1}\sqrt{\frac{A}{-\lambda_2}} \tag{3.5}$$

$$b = -\frac{1}{\lambda_2}\sqrt{\frac{A}{-\lambda_1}} \tag{3.6}$$

Wegen $e = \varepsilon a$ und $\lambda_1\lambda_2 = A_{33}$ gilt

$$e = \frac{1}{A_{33}}\sqrt{(\lambda_1 - \lambda_2)A} \tag{3.7}$$

Für den Abstand der Leitgeraden von der Nebenachse erhalten wir bei der

$$\begin{matrix}\text{Ellipse}\\ \text{Hyperbel}\end{matrix} \quad \pm\frac{a}{\varepsilon} = \mp\frac{1}{\lambda_1}\sqrt{\frac{A}{\lambda_1 - \lambda_2}} \tag{3.8}$$

Der Integralrechnung entnehmen wir für die Ellipsenfläche $F = ab\pi$, sodass

$$F = \frac{A\pi}{A_{33}\sqrt{A_{33}}} \tag{3.9}$$

Die soeben zusammengestellten Invarianten sollen in den folgenden Aufgaben numerisch berechnet werden.

Aufgabe 3.17. $K_2 = 89x^2 - 6xy + 81y^2 + 436x + 228y + 516 = 0$

Aufgabe 3.18. $K_2 = 39x^2 - 6xy + 31y^2 - 158x - 234y + 519 = 0$

Aufgabe 3.19. $K_2 = 6x^2 - 13xy + 6y^2 + 19x - 6y - 32 = 0$

Aufgabe 3.20. Welche Fläche hat die Ellipse $K_2 = x^2 - 2xy + 2y^2 - 1 = 0$?

Aufgabe 3.21. Bestimmen Sie die Halbachsenlängen aller Ellipsen $K_2 = x^2 - 2txy + (1+t^2)y^2 - c^2 = 0$ mit $c > 0$.

Aufgabe 3.22. Wie groß ist a bei den Hyperbeln $K_2 = x^2 + 2\cot\alpha xy - y^2 - c^2 = 0$ mit $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ und $c > 0$?

3.3. **Achsengleichungen oder Hauptachsentransformationen.** Die Kurve zweiter Ordnung soll in ihrem Koordinatensystem so bewegt werden, dass ihre Gleichung nach der Bewegung eine möglichst einfache Gestalt erhält. Das soll jetzt genauer ausgeführt werden.

3.3.1. *Achsengleichung einer Mittelpunkts-K_2 ($A_{33} \neq 0$).* Wir bewegen die K_2 so, dass ihr *Mittelpunkt* in den *Ursprung* des Koordinatensystems fällt und eine ihrer Achsen mit der x-Achse inzidiert. Dann hat die Kurve gemäß (1.9) die neue Gleichung $a'_{11}x^2 + a'_{22}y^2 + a'_{33} = 0$. Aus der zugehörigen Matrix $\begin{pmatrix} a'_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a'_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a'_{33} \end{pmatrix}$ entnehmen wir $s'_{33} = a'_{11} + a'_{22} = s_{33} = a_{11} + a_{22}$, $A'_{33} = a'_{11}a'_{22} = A_{33} = \lambda_1\lambda_2$ und $A' = a'_{11}a'_{22}a'_{33} = A$, d.h. $A_{33}a'_{33} = A$, woraus $a'_{33} = \frac{A}{A_{33}}$ folgt. Identifizieren wir λ_1 mit a'_{11}, also λ_2 mit a'_{22}, so wird die transformierte Gleichung

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \frac{A}{A_{33}} = 0 \tag{3.10}$$

Aufgabe 3.23. Bestätigen Sie mittels (3.5) und (3.6), dass in (3.10) die x-Achse jetzt die Hauptachse ist.

Aufgabe 3.24. Was bedeutet die Wahl $\lambda_1 = a'_{22}$ und $\lambda_2 = a'_{11}$?

Aufgabe 3.25. Welche Achsengleichung hat die $K_2 = 2x^2 - 2xy + 2y^2 - 6y = 0$?

Aufgabe 3.26. Dieselbe Frage für die $K_2 = 17x^2 - 12xy + 33y^2 + 70x - 210y + 100 = 0$

Aufgabe 3.27. Welche Achsengleichungen haben die zerfallenden K_2?

Aufgabe 3.28. Welche Achsengleichung hat die Kurve mit der Gleichung $K_2 = 44x^2 - 4xy + 41y^2 - 80x - 160y + 200 = 0$?

Aufgabe 3.29. Dieselbe Frage für die gleichseitige Hyperbel aus $\ell = x - 7y + 10 = 0$ und $F(5|-5)$. Anleitung: Beweisen Sie zuerst $\varepsilon = \sqrt{2}$.

Aufgabe 3.30. Eine Mittelpunkts-K_2 wird so bewegt, dass ihre Hauptachse auf die Gerade $h = 0$ und ihre Nebenachse auf die dazu senkrechte Gerade $n = 0$ fällt. Wie lautet ihre Gleichung?

Aufgabe 3.31. Die Ellipse $K_2 = 5x^2 + 6xy + 5y^2 - 80x - 80y + 384 = 0$ wird so bewegt, dass ihr Mittelpunkt der Schnittpunkt der beiden Geraden $K_1 = x - 3y + 4 = 0$ und $K_1 = 3x + y + 1 = 0$ wird. Wie lautet ihre neue Gleichung, wenn die Hauptachse auf die erste resp. die zweite Gerade zu liegen kommt?

Aufgabe 3.32. Wie lautet die Gleichung einer Mittelpunkts-K_2 in dem neuen Koordinatensystem, dessen x'-Achse die Hauptachse und dessen y'-Achse die Nebenachse ist?

3.3.2. *Achsengleichung der Parabel ($A_{33} = 0$).* Die im vorigen Abschnitt entwickelten Gedanken sind uns nun schon so geläufig, dass wir mit Aufgaben fortfahren können.

Aufgabe 3.33. Beweisen Sie, dass der Ansatz $a'_{22}y^2 + 2a'_{13}x = 0$ (wie kommt man darauf?) die neue Gleichung

$$y^2 = \pm 2\sqrt{\frac{A}{(-s_{33})^3}}\,x \tag{3.11}$$

liefert und dass die Parabelachse die x-Achse ist.

Aufgabe 3.34. Welche Gleichung ergibt der Ansatz $a'_{11}x^2 + 2a'_{23}y = 0$?

Aufgabe 3.35. Welche vier Achsengleichungen hat die Parabel $K_2 = 16x^2 - 24xy + 9y^2 + 58x - 106y + 101 = 0$?

Aufgabe 3.36. Welche Achsengleichungen hat die Parabel mit $\ell = 2x - y + 2 = 0$ und $F(2|1)$?

Aufgabe 3.37. Achsengleichungen einer parabolisch zerfallenden K_2. Beweisen Sie durch den Ansatz (wie kommt man darauf?) $K_2 = a'_{22}y^2 + a'_{33} = 0$, dass die Kurvengleichung in die Gestalt

$$y = \pm\frac{1}{s_{33}}\sqrt{-S_{33}} \tag{3.12}$$

transformiert werden kann.

Aufgabe 3.38. Welche Achsengleichung hat die $K_2 = 9x^2 + 24xy + 16y^2 + 18x + 24y + 8 = 0$?

3.3.3. *Zusammenfassung.* Die Gleichung jeder Kurve zweiter Ordnung läßt sich auf genau eine der drei Formen

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \frac{A}{A_{33}} = 0 \qquad y^2 = 2\sqrt{\frac{A}{(-s_{33})^3}}x \qquad y = \pm\frac{1}{s_{33}}\sqrt{-S_{33}}$$

transformieren.

Diese Gleichungen bezeichnen wir endgültig als die *Achsengleichungen*.

3.4. **Bestimmung des Mittelpunktes einer Zentral-K_2 ($A_{33} \neq 0$).** Nach (2.29) gilt für das Absolutglied w der Leitgeraden die quadratische Gleichung

$$w^2 + 2\frac{\bar{a}_{13}u + \bar{a}_{23}v}{\bar{A}_{33}}w - \frac{\bar{a}_{13}^2 + \bar{a}_{23}^2 + \bar{a}_{33}}{\varepsilon^2\bar{A}_{33}} = 0$$

Nach *Vieta* ist also $w_1 + w_2 = -\frac{2}{\bar{A}_{33}}(\bar{a}_{13}u + \bar{a}_{23}v)$; (2.28) liefert $x_{F_1} + x_{F_2} = 2\bar{a}_{13} - \varepsilon^2 u(w_1 + w_2)$, sodass mit $\frac{x_{F_1}+x_{F_2}}{2} = x_M$ folgt $\bar{A}_{33}x_M = \bar{a}_{13}\bar{A}_{33} + \varepsilon^2 u(\bar{a}_{13}u + \bar{a}_{23}v) = \bar{a}_{13}\bar{A}_{33} + \bar{a}_{13}\varepsilon^2 u^2 + \bar{a}_{23}\varepsilon^2 uv = \bar{a}_{13}\bar{A}_{33} + \bar{a}_{31}(1 + \bar{a}_{11}) + \bar{a}_{23}\bar{a}_{12}$, letzteres nach(2.2). Somit ist $\bar{A}_{33}x_M = \bar{a}_{13}(\bar{A}_{33} + \bar{a}_{11} + 1) + \bar{a}_{23}\bar{a}_{12} = \bar{a}_{13}(-\bar{a}_{22}) + \bar{a}_{12}\bar{a}_{23}$, weil nach (2.8) $\bar{A}_{33} + \bar{a}_{11} + \bar{a}_{22} + 1 = 0$ ist. Damit erhalten wir $x_M = \frac{A_{13}}{A_{33}}$. Die analoge Rechnung über $\frac{y_{F_1}+y_{F_2}}{2} = y_M$ ergibt $y_M = \frac{A_{23}}{A_{33}}$. Diese Herleitung gilt, weil sie sich auf den Erzeugbarkeitsbegriff stützt, nicht für *Kreise*. Hierzu siehe Aufgabe § 2, 2.30. Zusammenfassend gilt also

$$M = M(\frac{A_{13}}{A_{33}}|\frac{A_{23}}{A_{33}}) \tag{3.13}$$

Bemerkung. Wie man leicht sieht, sind die Aussagen $M(0|0)$ und $a_{13} = a_{23} = 0$ identisch (bei $A \neq 0$).

Beispiel 3.2. Die $K_2 = -41x^2 - 34xy - 29y^2 + 232x + 184y - 56 = 0$ hat die Matrix $\begin{pmatrix} -41 & -17 & 116 \\ -17 & -29 & 92 \\ 116 & 92 & -56 \end{pmatrix}$. $A_{13} = 1564 + 4464 = 1800, A_{23} = -(-3772 + 1972) = 1800, A_{33} = 1189 - 289 = 900$. Also ist $M(2|2)$. Wegen $A = 1800 \cdot 180 > 0$ ist die Kurve eine Ellipse.

Aufgabe 3.39. Beweisen Sie aus (2.2), dass bei zerfallenden Zentral-K_2 F und M identisch sind und berechnen Sie den einzigen reellen Punkt der Kurven:
a) $K_2 = 31x^2 - 6xy + 39y^2 - 44x - 228y + 364 = 0$
b) $K_2 = 32x^2 + 16xy + 20y^2 - 40x + 8y + 17 = 0$
c) $K_2 = 8x^2 - 2xy + 32y^2 - 16x + 2y + 8 = 0$

3.5. **Bestimmung der Leitgeraden, des Brennpunktes und des Scheitels einer Parabel.** Wegen $\varepsilon = 1$ und $u^2 + v^2 = 1$ folgt aus (2.2) die Parabelmatrix $\begin{pmatrix} -v^2 & 2uv & uw + x_F \\ uv & -u^2 & vw + y_F \\ 2uw + x_F & vw + y_F & w^2 - x_F^2 - y_F^2 \end{pmatrix}$. Es ist $\bar{A}_{13} = uv^2w + uvy_F + u^3w + u^2x_F = u(ux_F + vy_F + w) = uf$. Analog folgt $\bar{A}_{23} = vf$ und $\bar{S}_{33} = -2wf$. Wegen $p = f = \sqrt{\bar{A}}$ gilt also

$$u = \frac{\bar{A}_{13}}{\sqrt{\bar{A}}}, \quad v = \frac{\bar{A}_{23}}{\sqrt{\bar{A}}}, \quad w = -\frac{\bar{S}_{33}}{2\sqrt{\bar{A}}} \tag{3.14}$$

Die Gleichung der Leitgeraden geht über in:

$$\ell = 2A_{13}x + 2A_{23}y - S_{33} = 0 \tag{3.15}$$

Wegen $x_F = \bar{a}_{13} - uw$ und $y_F = \bar{a}_{23} - vw$ folgt für den Fokus $F(\bar{a}_{13} + \frac{\bar{S}_{33}}{2\bar{A}}\bar{A}_{13}|\bar{a}_{23} + \frac{\bar{S}_{33}}{2\bar{A}}\bar{A}_{23})$, sodass sich aus $\bar{a}_{ik} = \frac{a_{ik}}{-s_{33}}$ ergibt

$$F = F\left(-\frac{1}{s_{33}}(a_{13} + \frac{S_{33}}{2A}A_{13})| -\frac{1}{s_{33}}(a_{23} + \frac{S_{33}}{2A}A_{23})\right) \tag{3.16}$$

Beispiel 3.3. Die Parabel $K_2 = x^2 + 2xy + y^2 - 10x - 6y + 15 = 0$ hat die Matrix $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 5 \\ -1 & -1 & 3 \\ 5 & 3 & -15 \end{pmatrix}$ mit $A_{13} = 2, A_{23} = -2$, also $A = 4, S_{33} = -4, s_{33} = -2$. Daher ist $\ell = 4x - 4y + 4 = 0$ oder $\ell = x - y + 1 = 0$. Für die Koordinaten des Brennpunktes errechnen wir $x_F = \frac{1}{2}(5 - \frac{4}{2\cdot 4}2) = 2$ und $y_F = 2$, sodass $F = F(2|2)$.

Aufgabe 3.40. Bestätigen Sie, dass die Koordinaten des Parabelfokus ebenfalls dem linearen System

$$\begin{aligned} A_{13}x_F - A_{23}y_F &= \frac{A_{11} - A_{22}}{2} \\ A_{23}x_F + A_{13}y_F &= A_{12} \end{aligned}$$

genügen, indem Sie die zu (2.2) gehörige Parabelmatrix – wie eben – heranziehen und ihr die $\bar{A}_{ik}$ entnehmen. Weshalb dürfen Sie das? (2.2) ist doch normiert.

(3.16) und Aufgabe 3.40 haben beide ihre Vorteile und Nachteile. Der erste Weg präsentiert die „fertige“ Formel und ist schwer merkbar. Beim zweiten Weg erhält man die Koordinaten erst aus der Lösung eines Gleichungssystems, welches einprägsamer ist. Da der zweite Weg die Berechnung von A nicht erfordert, bietet die Alternative „Lösbarkeit oder nicht“ noch Gesichtspunkte.

Aufgabe 3.41. *a*) Bestätigen Sie unter Beachtung von $A_{13}^2 + A_{23}^2 = -s_{33}A$ die Lösung

$$x_F = \frac{(A_{11} - A_{22})A_{13} + 2A_{12}A_{23}}{-2s_{33}A} \qquad y_F = \frac{2A_{12}A_{13} + (A_{22} - A_{11})A_{13}}{-2s_{33}A}$$

direkt.
b) Leiten Sie unter Beachtung von $A_{13}A_{23} = a_{12}A$ die symmetrische Formel:

$$F = F\Big(\frac{s_{33}A_{11} - A}{2s_{33}A_{13}}\Big|\frac{s_{33}A_{22} - A}{2s_{33}A_{23}}\Big) \qquad \text{her.} \tag{3.17}$$

Aufgabe 3.42. Geben Sie den Brennpunkt und die Leitgerade der Parabel $K_2 = x^2 + 4xy + 4y^2 - 28x - 6y + 21 = 0$ an und bestimmen Sie den Parameter.

Nach (3.14) ist der *Normaleneinheitsvektor*, der vom Scheitel S zu F hinweist, $\mathfrak{n} = u\mathfrak{i} + v\mathfrak{j} = \frac{\bar{A}_{13}\mathfrak{i}+\bar{A}_{23}\mathfrak{j}}{\sqrt{\bar{A}}}$, sodass für den Ortsvektor des Scheitels $\mathfrak{r}_S = \mathfrak{r}_F - \frac{p}{2}\mathfrak{n}$ gilt. Wegen der vielbenutzten Relationen $p = \sqrt{\frac{A}{(-s_{33})^3}}$ und $\bar{a}_{ik} = \frac{a_{ik}}{-s_{33}}$ ist

$$\mathfrak{r}_S = \mathfrak{r}_F - \frac{A_{13}\mathfrak{i} + A_{23}\mathfrak{j}}{2s_{33}^2} \tag{3.18}$$

Im obigen Beispiel ist also $\mathfrak{r}_S = 2\mathfrak{i} + 2\mathfrak{j} - \frac{2\mathfrak{i}-2\mathfrak{j}}{8} = \frac{7}{4}\mathfrak{i} + \frac{9}{4}\mathfrak{j}$, d.h. $S = S(\frac{7}{4}|\frac{9}{4})$.

Aufgabe 3.43. Berechnen Sie ℓ, F und S bei der Parabel
$K_2 = x^2 + 2xy + y^2 - 8x + 8y - 48 = 0$

Aufgabe 3.44. Dasselbe für $K_2 = 9x^2 - 24xy + 16y^2 - 146x - 222y + 1356 = 0$

Aufgabe 3.45. Dasselbe für $K_2 = 16x^2 + 24xy + 9y^2 + 11x + 2y + 8 = 0$

3.6. **Bestimmung der Leitgeraden einer regulären K_2 aus dem zugehörigen Brennpunkt.** Wir lesen die Elemente der Zeilen einer K_2-Matrix als Koeffizienten der drei Geraden

$$\begin{aligned} g_1 &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13} = 0 \\ g_2 &= a_{12}x + a_{22}y + a_{23} = 0 \\ g_3 &= a_{13}x + a_{23}y + a_{33} = 0 \end{aligned} \tag{3.19}$$

und behaupten

$$\ell = g_1 x_F + g_2 y_F + g_3 = 0 \tag{3.20}$$

Beweis. Es genügt offenbar, die Koeffizienten $\bar{a}_{ik}$ aus (2.2) zu nehmen. Wir erhalten $g_1 x_F + g_2 y_F + g_3 = \varepsilon^2(ux_F + vy_F + w)(ux + vy + w) = \varepsilon^2 f(ux + vy + w)$, woraus für $f \neq 0$ die Behauptung folgt. □

Wir bemerken ausdrücklich, dass bei zerfallenden K_2 (3.20) wegen $f = 0$ nicht gilt.

Beispiel 3.4. Die $K_2 = 4xy+3y^2-32x-16y+36 = 0$ hat die Brennpunkte $F_1(2|3)$ und $F_2(-18|13)$. Die Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -16 \\ 2 & 3 & -8 \\ -16 & -8 & 36 \end{pmatrix}$ liefert $g_1 = 2y-16, g_2 = 2x+3y-8$ und $g_3 = -16x - 8y + 36$. Daher gilt $\ell_1 = (2y - 16)2 + (2x + 3y - 8)3 + (-16x - 8y + 36) = 0$ oder $\ell_1 = 2x - y + 4 = 0$.

Aufgabe 3.46. Welche Gleichung hat die zu F_2 gehörige Leitlinie ℓ_2 im Beispiel?

Aufgabe 3.47. Beweisen Sie, dass auch

$$\ell = g_1(F)x + g_2(F)y + g_3(F) = 0 \tag{3.21}$$

gilt. Dabei soll z.B. $g_1(F) = a_{11}x_F + a_{12}y_F + a_{13}$ sein.

Aufgabe 3.48. Zeigen Sie, dass die K_2-Gleichung selbst in der Form

$$K_2 = g_1 x + g_2 y + g_3 = 0 \tag{3.22}$$

geschrieben werden kann.

3.7. **Bestimmung der Leitgeraden, Brennpunkte und Scheitel bei Ellipse und Hyperbel.** Nach (2.31) ist $\mathfrak{n} = u\mathfrak{i} + v\mathfrak{j}$, d.h.

$$\mathfrak{n} = \frac{\sqrt{a_{11} - \lambda_2}\mathfrak{i} + \sqrt{a_{22} - \lambda_2}\mathfrak{j}}{\sqrt{\lambda_1 - \lambda_2}} \tag{3.23}$$

ein *Normaleneinheitsvektor* der *Leitgeraden*, wobei die Vorzeichen der Wurzeln wegen (2.31) die Vorschrift

$$\operatorname{sig} \sqrt{a_{11} - \lambda_2} \cdot \operatorname{sig} \sqrt{a_{22} - \lambda_2} = \operatorname{sig} a_{12} \tag{3.24}$$

erfüllen müssen. Für die Ortsvektoren der Brennpunkte gilt daher

$$\mathfrak{r}_{F_{1,2}} = \mathfrak{r}_M \pm e\mathfrak{n} \tag{3.25}$$

und für die Scheitel

$$\mathfrak{r}_{S_{1,2}} = \mathfrak{r}_M \pm a\mathfrak{n} \tag{3.26}$$

Die Leitgeraden kann man nach (3.20) bestimmen. Hierzu die

Aufgabe 3.49. Berechnen Sie $F_{1,2}, S_{1,2}$ und $\ell_{1,2}$ für die $K_2 = 5x^2 - 4xy + 8y^2 - 2x - 28y - 7 = 0$

Aufgabe 3.50. Wie erhält man die Nebenscheitel der Ellipse? Wo liegen sie in Aufgabe 3.49?

Aufgabe 3.51. Beweisen Sie mit (3.7) und (3.13), dass

$$A_{33}\mathfrak{r}_{F_{1,2}} = \left(A_{13} \pm \sqrt{(a_{11} - \lambda_2)A}\right)\mathfrak{i} + \left(A_{23} \pm \sqrt{(a_{22} - \lambda_2)A}\right)\mathfrak{j}$$

wobei (3.24) zu beachten ist.

Aufgabe 3.52. Zeigen Sie, dass

$$\ell_{1,2} = \lambda_1\sqrt{a_{11} - \lambda_2}x + \lambda_1\sqrt{a_{22} - \lambda_2}y + a_{13}\sqrt{a_{11} - \lambda_2} + a_{23}\sqrt{a_{22} - \lambda_2} \pm \sqrt{A} = 0$$

wo wieder (3.24) zu beachten ist. (Anleitung: Berechnen Sie zunächst $w_{1,2}$ aus den $\bar{a}_{ik}$ und machen Sie dann diese Normierung wieder rückgängig.)

Aufgabe 3.53. Wie lauten die Leitgeradengleichungen aus Aufgabe 3.52 nach Multiplikation mit $\sqrt{a_{11} - \lambda_2}$ resp. $\sqrt{a_{22} - \lambda_2}$?

3.8. **Das Durchmesserbüschel und die Gleichungen der Achsen.** Nach den Entwicklungssätzen für Determinanten ist

$$a_{11}A_{13} + a_{12}A_{23} + a_{13}A_{33} = 0 = a_{12}A_{13} + a_{22}A_{23} + a_{23}A_{33}$$

Im Falle $A_{33} \neq 0$ folgt mit (3.13) und (3.19) nach Division mit A_{33}

$$g_1(M) = 0 = g_2(M)$$

Der *Mittelpunkt* liegt also auf der Geraden g_1 und auf der Geraden g_2, die damit *Durchmesser* sind und gemäß (1.1) das Durchmesserbüschel

$$d = g_1 + \delta g_2 = 0 \tag{3.27}$$

bilden, welches speziell die Hauptachse enthält. Um nicht die Eventualität $h = g_2$ auszuschließen (§ 1, Abschnitt 1.2), setzen wir die Gleichung der Hauptachse in die Gestalt: $h = \delta_1 g_1 + \delta_2 g_2 = 0$; die Bestimmung der Parameter erfolgt aus $h(F) = 0$ (§ 1, Beispiel 1.2).

Unter Benutzung der normierten Koeffizienten aus (2.2) ergibt sich

$$\delta_1\left((\varepsilon^2u^2 - 1)x_F + \varepsilon^2uvy_F + \varepsilon^2uw + x_F\right) +$$
$$+\delta_2\left(\varepsilon^2uvx_F + (\varepsilon^2v^2 - 1)y_F + \varepsilon^2vw + y_F\right) = 0$$

eine Gleichung, die ersichtlich durch $\delta_1 = -v$ und $\delta_2 = u$ befriedigt wird. Wesentlich günstiger ist die Wahl $\delta_1 = (a_{11} - \lambda_1)$ und $\delta_2 = a_{12}$ (welcher Faktor wurde aufgenommen?) die zur normierungsfreien Gleichung der Hauptachse

$$h = (a_{11} - \lambda_1)g_1 + a_{12}g_2 = 0 \tag{3.28}$$

führt. Für die Gleichung der Nebenachse behaupten wir

$$n = a_{12}g_1 + (a_{22} - \lambda_2)g_2 = 0 \tag{3.29}$$

Beweis. Man beachte § 2, Aufgabe 2.15! Weshalb braucht man nur die Orthogonalität zu zeigen? □

Aus der genauen Ausführung fließen auch die nützlichen Varianten

$$h = (a_{11} - \lambda_1)(x - x_M) + a_{12}(y - y_M) = 0 \tag{3.30}$$

$$n = a_{12}(x - x_M) + (a_{22} - \lambda_2)(y - y_M) = 0 \tag{3.31}$$

Beispiel 3.5. Der Mittelpunkt und die Gleichungen der Achsen bei der $K_2 = -82x^2 + 48xy - 68y^2 - 280x - 40y + 325 = 0$, Matrix $\begin{pmatrix} -82 & 24 & -140 \\ 24 & -68 & -20 \\ -140 & -20 & 325 \end{pmatrix}$ $A_{13} = -480 - 9520 = -10000; A_{23} = -(1640 + 3360) = -5000; A_{33} = 5576 - 576 = 5000; A = -140(-10000) - 20(-5000) + 325(5000) = 5000(280 + 20 + 325) = 5000 \cdot 625 > 0; A_{33} > 0$ Ellipse; $s_{33} = -150; \lambda^2 + 150\lambda + 5000 = 0$ liefert $\lambda_1 = -50, \lambda_2 = -100; a_{11} - \lambda_1 = -32, a_{22} - \lambda_2 = 32; g_1 = -82x + 24y - 140 = 0, g_2 = 24x - 68y - 20 = 0$. Daraus $h = -32(-82x + 24y - 140) + 24(24x - 68y - 20) = 0$ oder $h = 4x - 3y + 5 = 0, n = 24(-82x + 24y - 140) + 32(24x - 68y - 20) = 0$ oder $n = 3x + 4y + 10 = 0$. In diesem Falle kann man sich die Ermittlung von $M(-2|-1)$ aus den A_{13}, A_{23} und A_{33} gemäß (3.13) ersparen und M als Schnittpunkt der Achsen berechnen.

Aufgabe 3.54. Stellen Sie die Gleichungen der Achsen der Kurve $K_2 = 13x^2 - 10xy + 13y^2 - 12x - 84y - 12 = 0$ auf.

Aufgabe 3.55. Dasselbe für $K_2 = 4x^2 - 20xy - 11y^2 - 2x - 4y + 15 = 0$

Aufgabe 3.56. Gelten (3.28) und (3.29) auch für elliptisch und hyperbolisch zerfallende K_2?

Bei der Parabel ist $A_{33} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$, die Geraden g_1 und g_2 sind daher parallel. Ferner ist $\lambda_1 = 0$. Sehen wir die obige Herleitung für die Gleichung von h vom Ansatz an noch einmal unter den genannten, bei der Parabel geltenden Voraussetzungen durch, so sehen wir, dass sie auch für die Parabel gültig ist. Die Gleichung der Parabelachse ist also:

$$h = a_{11}g_1 + a_{12}g_2 = 0 \tag{3.32}$$

Aufgabe 3.57. Welche Gleichung hat die Achse der Parabel: $K_2 = 16x^2 - 24xy + 9y^2 + 58x - 106y + 101 = 0$?

Aufgabe 3.58. Zeigen Sie, dass bei der Parabel ebenfalls $h = a_{12}g_1 + a_{22}g_2 = 0$ die Gleichung der Achse ist. Mit (3.32) folgen auch

$$h = a_{11}x + a_{12}y + \frac{a_{11}a_{13} + a_{12}a_{23}}{s_{33}} = 0 \text{ und}$$

$$h = a_{12}x + a_{22}y + \frac{a_{12}a_{13} + a_{22}a_{23}}{s_{33}} = 0$$

Formeln, die als analoge Seitenstücke zu (3.32) anzusehen sind, wie die Formeln (3.30) zu (3.28). Z.B. ist (3.32) für $a_{11} = a_{12} = 0$ nicht benutzbar.

Aufgabe 3.59. Gilt (3.32) auch bei parabolisch zerfallenden K_2?

3.9. Die Ortskurve für die Mittelpunkte paralleler Sehnen einer K_2.

$P_1(x_1|y_1)$, $P_2(x_2|y_2)$ seien zwei Punkte einer K_2 (Abb. 12). Also gelten die Gleichungen

$$a_{11}x_i^2 + 2a_{12}x_iy_i + a_{22}y_i^2 + 2a_{13}x_i + 2a_{23}y_i + a_{33} = 0, \quad i = 1,2$$

Subtrahiert man beide Gleichungen unter Verwendung von $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ und beachtet man, dass die Sehne $\overline{P_1P_2}$ den Mittelpunkt $M_S(\frac{x_1+x_2}{2}|\frac{y_1+y_2}{2})$ und die Steigung $m_S = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ besitzt, so wird $a_{11}x_{M_S} + a_{12}\frac{x_1y_1-x_2y_2}{x_1-x_2} + a_{22}m_Sy_{M_S} + a_{13} + a_{23}m_S = 0$. Andererseits ist $\frac{x_1y_1-x_2y_2}{x_1-x_2} = y_{M_S} + m_Sx_{M_S}$. Verkoppeln wir die letzten beiden Gleichungen, so erhalten wir

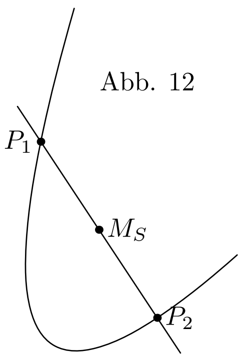


Abb. 12

$$g_1(M_S) + m_Sg_2(M_S) = 0$$

Halten wir m_S konstant, so haben wir den Satz:
Die Mitten paralleler Sehnen einer K_2 mit der Steigung m_S liegen auf der Geraden

$$d = g_1 + m_Sg_2 = 0 \tag{3.33}$$

die wir stets ($A_{33} = 0$ berücksichtigend) einen *Durchmesser* nennen.

Ergänzende Frage: Wie kann man am schnellsten einsehen, dass die Mitten der zur y-Achse parallelen Sehnen auf der Geraden $g_2 = 0$ liegen?

3.10. Konjugierte Richtungen.

Aus (3.27) erhält der Parameter δ des Durchmesserbüschels nunmehr die geometrische Deutung: $\delta = m_S$. (3.33) lautet ausführlich $(a_{11} + m_Sa_{12}x + (a_{12} + m_Sa_{22})y + a_{13} + m_Sa_{23} = 0$, sodass die Durchmesserrichtung

$$m_d = -\frac{a_{11} + a_{12}m_S}{a_{12} + a_{22}m_S} \tag{3.34}$$

ist. Hieraus folgt die Vertauschbarkeit von m_d und m_S:

$$m_S = -\frac{a_{11} + a_{12}m_d}{a_{12} + a_{22}m_d} \tag{3.35}$$

Aus jeder der beiden letzten Gleichungen folgt die Relation – wenn man $m_1 = m_d$ und $m_2 = m_S$ (oder umgekehrt) setzt –

$$a_{22}m_1m_2 + a_{12}(m_1 + m_2) + a_{11} = 0 \tag{3.36}$$

Wir nennen zwei Richtungen m_1 und m_2 *konjugiert*, wenn sie (3.36) erfüllen.

Beispiel 3.6. Bei der $K_2 = b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$ ist also $m_1m_2 = -\frac{b^2}{a^2}$.

3.11. Konjugierte Durchmesser einer Mittelpunkts-K_2.

Hier heißen auch zwei Durchmesser, deren Richtungen konjugiert sind, *konjugierte Durchmesser*. Konjugierte Durchmesser halbieren also gegenseitig die zu ihnen parallelen Sehnen und die *Tangenten* in den Endpunkten des einen Durchmessers sind zu dem konjugierten parallel (Abb. 13). Da eine Mittelpunkts-K_2 zu ihrer Haupt- und Nebenachse symmetrisch liegt, sind die Achsen konjugierte Durchmesser.

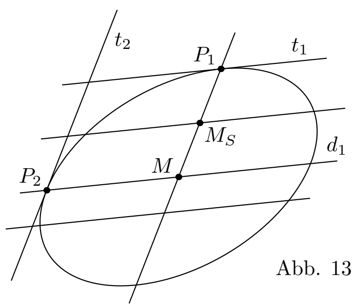


Abb. 13

Beispiel 3.7. Die Ellipse $K_2 = 41x^2 + 34xy + 29y^2 - 232x - 184y + 56 = 0$ hat den Mittelpunkt $M(2|2)$ (Aufgabe). Die Gerade $d_1 = 5x + y - 12 = 0$ ist also ein Durchmesser. Seine Steigung $m_1 = -5$ liefert aus (3.36) die konjugierte $m_2 = -\frac{11}{32}$. Daher hat der zu d_1 konjugierte Durchmesser die Gleichung:

$$\frac{y-2}{x-2} = -\frac{11}{32} \quad \text{oder } d_2 = 11x + 32y - 86 = 0$$

Aufgabe 3.60. *a*) Zeigen Sie, dass $d_1 = 3x + y - 8 = 0$ und $d_2 = x + 7y - 16 = 0$ zwei konjugierte Durchmesser des Beispiels sind.
b) Welcher Durchmesser halbiert die zur zweiten Winkelhalbierenden des Koordinatensystems parallelen Sehnen?
c) Welche Gleichungen haben die Tangenten in den Endpunkten dieses Durchmessers?

Aufgabe 3.61. *a*) Beweisen Sie, dass zu g_1 bzw. g_2 die Geraden $A_{33}y - A_{32} = 0$ bzw. $A_{33}x - A_{31} = 0$ konjugiert sind.
b) Beweisen Sie: $d_1 = \alpha g_1 + \beta g_2$ und $d_2 = \beta(x - x_M) - \alpha(y - y_M)$ sind konjugierte Durchmesser.

3.12. **Mittelpunkts-K_2 aus konjugierten Durchmessern.** Sind $d_1 = ax+by+c = 0$ und $d_2 = dx + ey + f = 0$ zwei nicht parallele Geraden, d.h. $ae - bd \neq 0$, so ist:

$$K_2 = d_1^2 + rd_2^2 + s = 0 \tag{3.37}$$

die Gleichung der zweiparametrigen Schar (Parameter r und s) von Kurven zweiter Ordnung, deren *Mittelpunkt* M jeweils mit dem Schnittpunkt von d_1 und d_2 zusammenfällt (d_1 und d_2 sind also Durchmesser); überdies sind d_1 und d_2 konjugierte Durchmesser.

$$\begin{pmatrix} a^2 + rd^2 & ab + rde & ac + rdf \\ ab + rde & b^2 + re^2 & bc + ref \\ ac + rdf & bc + ref & c^2 + rf^2 + s \end{pmatrix}$$

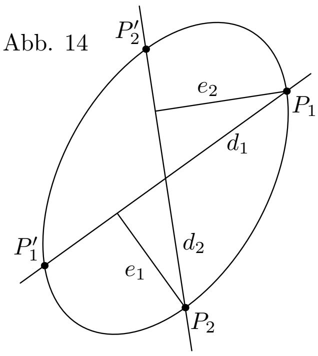
Aus der Matrix entnehmen wir: $A_{33} = r(ae - bd)^2$, $A_{31} = r(ae - bd)(bf - ec)$ und $A_{32} = r(ae-bd)(cd-af)$. Der Mittelpunkt liegt also bei $M(\frac{bf-ec}{ae-bd}|\frac{cd-af}{ae-bd})$ und das ist auch der Schnittpunkt der Geraden d_1 und d_2. Ebenfalls kann in einer kleinen Rechnung gezeigt werden, dass die Steigungen von d_1 und d_2 (3.36) erfüllen, die Durchmesser also konjugiert sind. Die K_2-Gleichung dieses Abschnitts läßt sich in die Gestalt

$$K_2 = \frac{d_1^2}{c_1} + \frac{d_2^2}{c_2} - 1 = 0 \tag{3.38}$$

setzen, wo aber jetzt d_1 und d_2 die *Hesseformen* bedeuten sollen.

Ist die K_2 eine Ellipse und sind P_i die mit d_i inzidierenden Kurvenpunkte, so ergibt sich wegen $K_2(P_i) = 0 = d_i(P_i)$, $c_i = e_i^2$, wo e_i der Abstand dieses Kurvenpunktes vom anderen Durchmesser ist. Diese interessante geometrische Deutung – (1.15) und (1.9) sind nunmehr als Spezialfälle aufzufassen –, die wir in Abb. 14 fixieren, soll in den folgenden Aufgaben ausgemünzt werden.

Abb. 14



Aufgabe 3.62. Welche Gleichung hat die Ellipse mit $d_1 = 3x - 4y - 1 = 0$, $d_2 = 3x + 4y - 17 = 0$ und $P_1(-1|-1)$ und $P_2(-1|5)$?

Aufgabe 3.63. Welche Gleichung hat die Ellipse mit $d_1 = x+y-4 = 0$ und $d_2 = 2x-y-2 = 0$, die durch die Schnittpunkte von d_1 mit der x-Achse und d_2 mit der y-Achse geht?

Aufgabe 3.64. Welche Gleichung hat die Ellipse mit $\varepsilon = \frac{1}{3}$ und den Leitgeraden $\ell_1 = x + 2y - 20 = 0$ und $\ell_2 = x + 2y + 10 = 0$, die durch *a*) den Ursprung geht, *b*) den Mittelpunkt $M(3|1)$ besitzt? (Anleitung: Die Nebenachse ist Mittelparallele der Leitgeraden.)

Aufgabe 3.65. Welche Gleichungen haben die Ellipsen durch $P(-8|-2)$ mit $\varepsilon = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, $\ell_1 = x - 2y + 28 = 0$ und $\ell_2 = x.2y - 20 = 0$?

Aufgabe 3.66. *a*) Welche Gleichung hat die Ellipse mit $a = 3\sqrt{2}, b = 2\sqrt{2}$, $n = 3x + y - 10 = 0$ und $h = x - 3y = 0$?
b) Wo liegen ihre Brennpunkte?
c) Welche Gleichungen haben ihre Leitgeraden?

Aufgabe 3.67. Welche Gleichungen haben die Ellipse mit $a = 3$, $b = 2$, $h = x + y + 1 = 0$, $n = x - y + 3 = 0$ und ihre Leitgeraden?

Aufgabe 3.68. *a*) Welche Gleichung hat die Ellipse mit $\varepsilon = \frac{1}{2}$, die die Leitgerade $\ell_1 = x+3y-13 = 0$ und die zugehörige Scheiteltangente $t_1 = x+3y-3 = 0$ besitzt und durch den Punkt $P(0|1)$ geht?
b) Wo liegen ihre Scheitel- und Brennpunkte? Wo liegt der Mittelpunkt?

Aufgabe 3.69. *a*) Welche Gleichungen haben die gleichseitigen Hyperbeln durch $P(6|6)$, die die Leitgeraden $\ell_{1,2} = x + y \pm 8 = 0$ besitzen?
b) Wo liegen ihre Mittelpunkte, Scheitel und Brennpunkte?

3.13. **Asymptoten der Hyperbel.**

3.13.1. *Steigungen und Gleichungen der Asymptoten.* Bei der Hyperbel nennen wir die Durchmesser, die zu sich selbst konjugiert sind, die *Asymptoten* der Hyperbel. Die Übereinstimmung mit der Definition in Abschnitt §1.8 wird in Aufgabe 3.70 gezeigt. Hat eine Asymptote die Steigung m_A, so soll also nach (3.36) wegen $m_1 = m_2 = m_A$

$$a_{22}m_A^2 + 2a_{12}m_A + a_{11} = 0 \tag{3.39}$$

sein. Im Falle $a_{22} \neq 0$ erhalten wir zwei solcher Richtungen:

$$m_{A_{1,2}} = \frac{1}{a_{22}}(-a_{12} \pm \sqrt{-A_{33}}) \tag{3.40}$$

Aufgabe 3.70. Zeigen Sie jetzt, dass (3.40) im Falle $a_{12} = 0$ in (1.20) übergeht.

Schreiben wir (3.39) in der Form $a_{11}\left(\frac{1}{m_A}\right)^2 + 2a_{12}\frac{1}{m_A} + a_{22} = 0$, so erhalten wir im Falle $a_{22} = 0$

$$\frac{1}{m_{A_1}} = 0 \text{ und } m_{A_2} = -\frac{a_{11}}{2a_{12}} \tag{3.41}$$

Die Asymptoten haben also im Falle $a_{22} \neq 0$ die Gleichungen

$$a_{1,2} = a_{22}g_1 + (-a_{12} \pm \sqrt{-A_{33}})g_2 = 0 \tag{3.42}$$

und im Falle $a_{22} = 0$

$$a_1 = g_2 = 0 \text{ und } a_2 = 2a_{12}g_1 - a_{11}g_2 = 0 \tag{3.43}$$

Natürlich kann man sie auch aus der Punktrichtungsformel bekommen, wenn der Mittelpunkt schon bekannt ist.

Beispiel 3.8. Die Hyperbel $K_2 = 3x^2+22xy+7y^2-56x-72y+8 = 0$ hat die Matrix $\begin{pmatrix} 3 & 11 & -28 \\ 11 & 7 & -36 \\ -28 & -36 & 8 \end{pmatrix}$ $A_{13} = -200, A_{23} = -200, A_{33} = -100, M(2|2), A = 12000.$
Nach (3.40) ist $m_{A_1} = -\frac{1}{7}$ und $m_{A_2} = -3$; d.h. $a_1 = x + 7y - 16 = 0$ und $a_2 = 3x + y - 8 = 0$.

Beispiel 3.9. $K_2 = 4x^2 + 6xy - 58x - 30y - 98 = 0$. Zu ihr gehört die Matrix $\begin{pmatrix} 4 & 3 & -29 \\ 3 & 0 & -15 \\ -29 & -15 & -98 \end{pmatrix}$ mit $A_{13} = -45, A_{23} = -27, A_{33} = -9, M(5|3), A = 2592.$
Nach (3.43) wird $a_1 = x - 5 = 0$ und $a_2 = 2x + 3y - 19 = 0$.

Aufgabe 3.71. *a*) Welche Gleichungen haben die Asymptoten der Hyperbel
$K_2 = 64x^2 - 320xy - 176y^2 - 32x - 64y - 15 = 0$?
b) Welche Gleichung hat die hyperbolisch zerfallende $K_2 = a_1a_2 = 0$?

3.13.2. *Die Asymptoten-K_2 einer Hyperbel.* Aus (3.42) und (3.43) entnehmen wir, angeregt durch die Lösung von Aufgabe 3.71 *b*), dass die Kontstante a_{33} der Hyperbelmatrix überhaupt nicht in die Asymptotengleichung eingeht. Die $K_2 = a_1a_2 = 0$ ist Asymptotenpaar aller Hyperbeln mit festen $a_{ik}, (i, k) \neq (3, 3)$ und variablem a_{33}; ferner stimmt sie deshalb mit der einen in dieser Schar enthaltenen zerfallenden K_2 überein, weil die Richtungen eines Geradenpaares ebenfalls der Relation (3.39) (Aufgabe) genügen und alle Mittelpunkte identisch sind.

Die Asymptoten-K_2 der Hyperbel geht durch Überlagerung einer Konstanten, welche $A = 0$ bedingt, aus der Hyperbelgleichung hervor. Die Lösung der Gleichung: $a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + zA_{33} = 0$, nämlich $z = a_{33} - \frac{A}{A_{33}}$ führt zur Zerlegung:

$$a_1a_2 = A_{33}K_2 - A = 0 \quad \text{oder} \quad a_1a_2 = K_2 - \frac{A}{A_{33}} = 0 \tag{3.44}$$

Untersuchung: Gilt (3.44) sogar als Identität?

Aufgabe 3.72. Bestätigen Sie, dass auch die in (3.43) für den Fall $a_{22} = 0$ angegebenen Asymptoten auf (3.44) führen.

Aufgabe 3.73. *a*) Welche Gleichung hat die durch $\ell_1 = x-4y+2 = 0$ und $F_1(3|1)$ bestimmte gleichseitige Hyperbel?
b) Welche Gleichungen haben ihre Achsen?
c) Berechnen Sie ℓ_2 und F_2.
d) Bestimmen Sie die Asymptoten-K_2 und daraus die Gleichungen der Asymptoten.

Aufgabe 3.74. Dasselbe für $\ell_1 = x - 7y + 10 = 0$ und $F_1(5| - 5)$.

Bemerkung. Dieselben Überlegungen, die zu (3.44) führen, ergeben bei der Ellipse die beiden imaginären Asymptoten, deren reeller Schnittpunkt der Mittelpunkt der Ellipse ist. Wir erkennen den Grund für das Versagen der Nachbildung im parabolischen Fall: hier bewirkt eine Konstantenaddition zu a_{33} keine Änderung der Determinante.

Aufgabe 3.75. Welche Gleichung hat die Asymptoten-K_2 der Ellipse
$K_2 = -9x^2 + 14xy - 9y^2 + 8x + 8y - 12 = 0$?
In welche imaginären Geraden zerfällt sie?

3.13.3. *Bestimmung einer Hyperbel aus ihren Asymptoten.*

$$K_2 = a_1a_2 + k = 0 \tag{3.45}$$

Aufgabe 3.76. Wie lautet die Gleichung der Hyperbel mit den Asymptoten
$a_1 = 2x - y + 7 = 0$ und $a_2 = x + 2y - 4 = 0$, die den Punkt $P(-3| - 4)$ enthält?

3.14. **Konjugierte Richtungen bei der Parabel.**

3.14.1. *Bestimmung der Tangente im Endpunkt eines Durchmessers.* Jeder Durchmesser d der Parabel kann nach Aufgabe 3.58 in der Form $d = a_{11}x + a_{12}y + c_1 = 0$ oder $d = a_{12}x + a_{22}y + c_2 = 0$ geschrieben werden. Ist $a_{11} \neq 0$ und wählen wir die erste Form, so wird wegen $a_{11}a_{22} = a_{12}^2$: $a_{11}K_2 - d^2 = 2a_{11}(a_{13} - c_1)x + 2(a_{11}a_{23} - a_{12}c_1)y + a_{11}a_{33} - c_1^2 = t = 0$, die Gleichung einer Geraden, welche nicht parallel zu $d = 0$ ist (Aufgabe). Für den Schnittpunkt B von d und t gilt wegen $d(B) = t(B) = 0$ auch $K_2(B) = 0$; der Schnittpunkt B inzidiert also mit der Parabel. B ist daher Endpunkt des Durchmessers und t ist deshalb *Tangente* in B, weil andernfalls aus der obigen Gleichung ein zweiter Schnittpunkt ablesbar wäre. Aus der Gleichung $a_{11}K_2 - d^2 = t = 0$ ist übrigens auch zu schließen, dass d die zu t parallelen Sehnen halbiert. Man normiere so, dass t die *Hesseform* erhält, setze die Schnittpunkte einer solchen Sehne ein und subtrahiere, wonach die Gleichheit der Abstände dieser Schnittpunkte von d sichtbar wird. Man nennt daher t die zu d *konjugierte Tangente* und d den zu t *konjugierten Durchmesser*. Im Falle $a_{11} = 0$ wählen wir die zweite Form und erhalten zusammen:

$$a_{11}K_2 - d^2 = t \qquad\qquad a_{22}K_2 - d^2 = t \tag{3.46}$$

Beispiel 3.10. Welche Gleichung hat die Tangente im Endpunkt des Durchmessers $d = x+2y-5 = 0$ der Parabel $K_2 = x^2+4xy+4y^2-37x-11y+34 = 0$? $t = K_2-d^2$ liefert die Tangentengleichung $t = 3x - y - 1 = 0$. $B(1|2)$ ist der Schnittpunkt von d und t.

Aufgabe 3.77. Der zu t konjugierte Durchmesser hat die Gleichung $d = g_1 + m_t g_2 = 0$. Wie lautet seine Gleichung speziell bei der Parabel $y^2 = 2px$?

3.14.2. *Bestimmung der Scheiteltangente und des Scheitels über die Parabelachse.* Ist $d = h$ die Parabelachse, so erhält man die Gleichung der Scheiteltangente t_S durch die Gleichung $t_S = rK_2 - h^2 = 0$. Die Konstante r ist leicht zu bestimmen, wie wir am folgenden Beispiel sehen.

Beispiel 3.11. Die Parabel $K_2 = x^2 + 4xy + 4y^2 - 37x + 11y + 34 = 0$ hat die Matrix $\begin{pmatrix} 2 & 4 & -37 \\ 4 & 8 & 11 \\ -37 & 11 & 68 \end{pmatrix}$. Also ist $h = 2(2x + 4y - 37) + 4(4x + 8y + 11)$ oder $h = 2x + 4y - 3 = 0$. $t_S = 4K_2 - h^2 = 0$ liefert $t_S = 8x - 4y - 7 = 0$. h und t_S schneiden sich in $S(1|\frac{1}{4})$.

Aufgabe 3.78. Welche Gleichung hat die Tangente im Punkt $B(3|4)$ des obigen Beispiels?

3.14.3. *Gleichung der Tangente der Parabel.* B sei ihr Berührpunkt, er liege auf dem Durchmesser $d = a_{11}x + a_{12}y + c_1 = 0$. Daher ist $c_1 = -a_{11}x_B - a_{12}y_B$. Aus (3.46) folgt $t = 2a_{11}^2x_Bx + 2a_{11}a_{22}y_By + 2a_{11}(a_{12}y_Bx + a_{12}y_B^2) + 2a_{11}a_{13}x + 2a_{11}a_{23}y + a_{11}a_{33} - a_{11}(a_{11}x_B^2 + 2a_{12}x_By_B + a_{22}y_B^2) = 0$. B ist Kurvenpunkt, weshalb der Inhalt der letzten Klammer gleich $-2a_{13}x_B - 2a_{23}y_B - a_{33}$ ist, womit man durch Division mit $2a_{11}$ die *Tangentengleichung* erhält:

$$t = a_{11}x_Bx + a_{12}(xy_B + yx_B) + a_{22}y_By + a_{13}(x + x_B) + a_{23}(y + y_B) + a_{33} = 0 \tag{3.47}$$

Wieder ist die Herleitung im Falle $a_{11} = 0$ durch die zweite Formel in (3.46) zu ersetzen.

Im Abschnitt 3.16 werden wir zeigen, dass (3.47) für alle K_2 Tangentengleichung ist.

Aufgabe 3.79. Beweisen Sie, dass

$$t = g_1(B)x + g_2(B)y + g_3(B) = 0$$
$$t = g_1 x_B + g_2 y_B + g_3 = 0 \tag{3.48}$$

andere Fassungen der Tangentengleichungen sind.

Bemerkung. Man sagt, dass (3.47) durch *Separation* aus der K_2-Gleichung hervorgeht.

Aufgabe 3.80. Stellen Sie die Gleichung der Tangente im Punkte $B(3|1)$ der Parabel $K_2 = 4x^2 - 12xy + 9y^2 - 10x + 17y + 4 = 0$ auf.

Aufgabe 3.81. Geben Sie die Tangentengleichungen für
a) $y^2 = 2px$ und *b*) $x^2 = 2py$ durch Separation an.

Aufgabe 3.82. Dasselbe für $(y - y_S)^2 = 2p(x - x_S)$ und $(x - x_S)^2 = 2p(y - y_S)$.

3.14.4. *Gleichung einer Parabel aus Durchmesser und konjugierter Tangente.* Aus den ersten Betrachtungen geht hervor, dass

$$K_2 = d^2 + qt = 0 \tag{3.49}$$

zur gewünschten Gleichung führt. Zur Festlegung der Konstanten q dient z.B. ein vorgegebener Punkt. Die Gleichung (1.18) $K_2 = h^2 - 2pt_S = 0$ ist ein Spezialfall von (3.49).

Beispiel 3.12. Welche Gleichung hat die Parabel mit dem Durchmesser $d = x + 2y - 10 = 0$ und der zu ihm konjugierten Tangente $t = x + 7y - 34 = 0$, die durch den Punkt $P(3|3)$ geht? (3.49) liefert $q = 10$ und $K_2 = x^2 + 4xy + 4y^2 - 28x - 6y + 21 = 0$.

Aufgabe 3.83. *a*) Dasselbe für $d = x + 2y - 9 = 0$, $t = x - 3y + 6 = 0$ und $P(13|3)$.
b) Welche Gleichung hat die Achse?
c) Wo liegt der Scheitel?

Aufgabe 3.84. Welche Gleichung hat die Parabel mit der Achse $h = 2x + y - 3 = 0$ und dem Parameter $p = 2\sqrt{5}$, die durch den Punkt a) $P(6|1)$, b) $P(13|-3)$ geht? Wo liegen Brennpunkt und Scheitel? Welche Gleichung hat die Leitgerade?

Aufgabe 3.85. *a*) Welche Parabel mit der Achse $h = 2x - y + 2 = 0$ geht durch die Punkte $P_1(-2|1)$ und $P_2(1|2)$?
b) Wo liegen Brennpunkt und Scheitel?
c) Welche Gleichung hat die Leitgerade?

Aufgabe 3.86. *a*) Welche Gleichung hat die Parabel mit $t = x - 4y + 8 = 0$ und $d = x + y - 7 = 0$, die durch den Ursprung geht?
b) Was ergibt sich durch Vertauschen von t und d?

Aufgabe 3.87. Welche Gleichung hat die Parabel mit $h = 2x - y + 3 = 0$, $S(1|5)$ und $p = \sqrt{5}$?

Aufgabe 3.88. Wo liegt der Scheitel der durch $h = 3x - 4y + 8 = 0$, $P_1(1|4)$ und $P_2(1|1)$ bestimmten Parabel?

3.15. Geometrische Bedeutung der Geraden g_1 und g_2.

3.15.1. *Ellipse und Hyperbel.* Der zur Richtung m konjugierte Durchmesser $d = g_1 + mg_2 = 0$ läßt sich bei $m \neq 0$ auch in der Form $d = \frac{1}{m}g_1 + g_2 = 0$ schreiben.

Ist $m = 0$, handelt es sich also um zur x-Achse parallele Sehnen, so ist $d = g_1 = 0$ der konjugierte Durchmesser, d.h. auf g_1 liegen (falls vorhanden) der *Hochpunkt* H und der *Tiefpunkt* T der K_2 (Abbildung 15).

Ist $\frac{1}{m} = 0$, so halbiert $d = g_2$ die zur y-Achse parallelen Sehnen, d.h. mit g_2 inzidieren (falls vorhanden) der am weitesten nach links bzw. rechts liegende *Linkspunkt* L und *Rechtspunkt* R der Kurve.

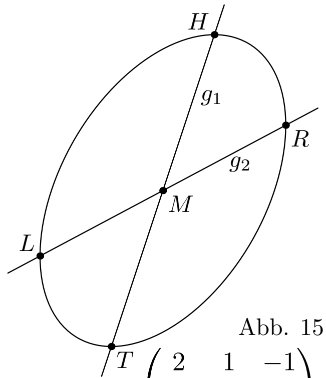


Abb. 15

Beispiel 3.13. Wir bestimmen die Punkte H, T, L und R bei der Ellipse $K_2 = 2x^2 + 2xy + 2y^2 - 2x + 8y + 8 = 0$. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \\ -1 & 4 & 8 \end{pmatrix}$, $g_1 = 2x + y - 1 = 0$, $g_2 = x + 2y + 4 = 0$. Die Berechnung der Schnittpunkte H und T von g_1 und K_2 wird deshalb einfach, weil die Gleichung $g_1^2 - a_{11}K_2 = 0$ keine Glieder mit x^2, xy und y^2 enthält. Wir bilden $g_1^2 - 2K_2 = 0$ und erhalten $y_{H,T}^2 + 6y_{H,T} + 5 = 0$, woraus $H(1|-1)$ und $T(3|-5)$ folgt. Entsprechend wird $R(4|-4)$ und $L(0|-2)$ über $g_2^2 - a_{22}K_2 = 0$ gefunden.

Aufgabe 3.89. Zeigen Sie: $a_{11}K_2 = g_1^2 + A_{33}y^2 - 2A_{23}y + A_{22}$ und $a_{22}K_2 = g_2^2 + A_{33}x^2 - 2A_{13}x + A_{11}$.

Aufgabe 3.90. Bestimmen Sie die genannten Punkte bei der $K_2 = x^2 - 2xy + 2y^2 - 1 = 0$

Aufgabe 3.91. Dasselbe für $K_2 = 3x^2 - 4xy + y^2 + 36x - 20y + 99 = 0$

Aufgabe 3.92. Dasselbe für $K_2 = 2x^2 - 2xy + y^2 + 6x - 4y - 3 = 0$

Aufgabe 3.93. Bei einer Ellipse ist $g_1 = 5x - 3y + 4 = 0$ und $g_2 = 3x - 5y + 12 = 0$; sie hat die Fläche $F = 12\pi$.
a) Wie lautet ihre Gleichung?
b) Wie lang sind die Halbachsen?
c) Wie groß sind ihre numerische und ihre lineare Exzentrizität?
d) Welche Gleichungen haben ihre Achsen?
e) Wo liegen die Punkte H, T, L und R?

Aufgabe 3.94. Die Gleichungen der Durchmesser, die die zu den Koordinatenachsen parallelen Sehnen einer K_2 halbieren, sind $g_1 = 3x - 4y + 8 = 0$ und $g_2 = 4x - 3y + 6 = 0$. Die große Halbachse der K_2 hat die Länge 4.
a) Wie lautet die K_2-Gleichung?
b) Wo liegen die Punkte H, T, L und R?

3.15.2. *Parabel.* Bei der Parabel sind g_1 und g_2 der Achse parallel. Auf g_1 liegt daher H oder T, auf g_2 liegt L oder R.

Aufgabe 3.95. Diskutieren Sie die Parabel $K_2 = x^2 + 2xy + y^2 + 2x - 2y + 1 = 0$ einschließlich H, T, L und R.

Aufgabe 3.96. Dasselbe für $K_2 = 4x^2 + 4xy + y^2 + 32x - 16y + 64 = 0$.

Aufgabe 3.97. Beweisen Sie: Bei der Parabel schneiden sich die Tangenten in den Endpunkten von g_1 und g_2 auf der Leitgeraden.

Aufgabe 3.98. Zeigen Sie: Bei der Parabel ist das Produkt der Abstände der Geraden g_1 und g_2 von der Achse gleich dem Quadrat des Parameters.

3.15.3. *Parabolisch zerfallende* K_2.

Aufgabe 3.99. Beweisen Sie: Beim Parallelenpaar $K_2 = (ax + by + c_1) \cdot (ax + by + c_2) = h_1 h_2 = 0$ ist h die Mittelparallele von h_1 und h_2, g_1 und g_2 fallen mit h zusammen; bei der Doppelgeraden fallen g_1, g_2, g_3 und h zusammen.

Aufgabe 3.100. Zeigen Sie: Wenn g_1 und g_2 zusammenfallen, ist $A = 0 = A_{33}$.

Aufgabe 3.101. Bestätigen Sie beim Parallelenpaar die Identitäten

$$a_{11}s_{33}K_2 = s_{33}g_1^2 + a_{11}S_{33}$$
$$a_{22}s_{33}K_2 = s_{33}g_2^2 + a_{22}S_{33}$$

3.16. **Tangenten und Polaren regulärer K_2.**

3.16.1. *Tangentengleichung für den Punkt B einer K_2.* Der Durchmesser d, der die zur Tangente t mit der Steigung m_t im Punkte B einer K_2 parallelen Sehnen halbiert, hat die Gleichung $d = g_1 + m_t g_2 = 0$. Da B mit ihm inzidiert, ist $g_1(B) + m_t g_2(B) = 0$, also

$$m_t = -\frac{g_1(B)}{g_2(B)} \tag{3.50}$$

falls $g_2(B) \neq 0$.

Die *Tangentengleichung* lautet daher $\frac{y-y_B}{x-x_B} = -\frac{g_1(B)}{g_2(B)}$ oder $t = g_1(B)x + g_2(B)y - g_1(B)x_B - g_2(B)y_B = 0$. Weil B auf der K_2 liegt, gilt die Koinzidenzbedingung (3.22)

$$g_1(B)x_B + g_2(B)y_B + g_3(B) = 0 \tag{3.51}$$

Daher kann die Tangentengleichung in der Form

$$t = g_1(B)x + g_2(B)y + g_3(B) = 0 \tag{3.52}$$

geschrieben werden, aus der wieder die Formen (3.47) und (3.48) folgen.

Aufgabe 3.102. Es ist der Fall $g_2(B) = 0$ nachzutragen und zu zeigen, dass er in (3.52) enthalten ist.

Aufgabe 3.103. Welche Gleichung hat die Tangente im Punkt $B(5|5)$ der $K_2 = 31x^2 + 34xy - 31y^2 - 680x - 10y + 2600 = 0$?

3.16.2. *Tangenten vorgeschriebener Richtung.* Ist m_t gegeben, so liefern (3.50) und (3.51) eine quadratische Gleichung für die eine Koordinate von B.

Beispiel 3.14. Welche Gleichungen haben die zur Geraden $g = x + 2y - 8 = 0$ parallelen Tangenten der $K_2 = x^2 + 8xy + 4y^2 - 20x - 24y + 32 = 0$? (3.50)liefert $x_B = 2y_B - 4$, was mit (3.51) $y_B^2 - \frac{14}{3}y_B + \frac{16}{3} = 0$ ergibt. Damit wird $B_1(\frac{4}{3}|\frac{8}{3})$ und $B_2(0|2)$, sodass $t_1 = 3x + 6y - 20 = 0$ und $t_2 = x + 2y - 4 = 0$.

Aufgabe 3.104. Welche Tangenten der K_2 des Beispiels sind senkrecht zur Geraden $2x - 3y + 10 = 0$?

3.16.3. *Tangenten von einem Punkt P_0 an eine K_2.* Es werden von einem Punkt $P_0 = P_0(x_0|y_0)$ die Tangenten t_1 und t_2 an die K_2 gezogen (Abb. 16). Sind B_1, B_2

die Berührpunkte, so liefert (3.52) die Tangenten, mit denen P_0 inzidiert, es gelten also die Gleichungen: $g_1(B_i)x_0 + g_2(B_i)y_0 + g_3(B_i) = 0$, $i = 1, 2$. Diese interpretieren wir nun so: die Berührpunkte B_1, B_2 liegen auf der Geraden

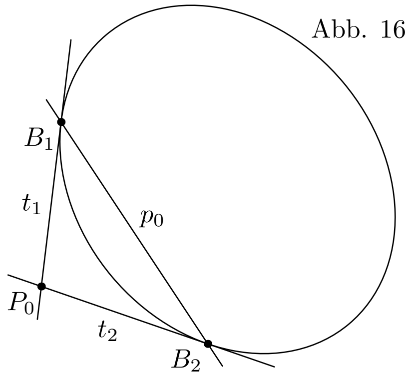


Abb. 16

(3.53) $$p_0 = g_1x_0 + g_2y_0 + g_3 = 0$$

die *Berührungssekante* ist und die *Polare* p_0 zum *Pol* P_0 heißt.

Wie die Tangentengleichung, läßt sich auch die Polarengleichung – erstere ist Spezialfall der letzteren – in die Gestalten:

(3.54) $$p_0 = g_1(P_0)x + g_2(P_0)y + g_3(P_0) = 0$$

und

(3.55) $$p_0 = a_{11}xx_0 + a_{12}(xy_0 + yx_0) + a_{22}yy_0 + a_{13}(x + x_0) + a_{23}(y + y_0) + a_{33} = 0$$

setzen.

Man erhält also die Tangenten von P_0 an die Kurve, indem man die K_2 mit p_0 schneidet und dann in den Schnittpunkten B_1 und B_2 die Tangentengleichungen aufstellt.

Beispiel 3.15. Die Polare zu $P_0(-2|0)$ bezüglich der $K_2 = x^2 - 6xy + 9y^2 - 44x + 4y - 28 = 0$ ist $p_0 = 3x - y - 2 = 0$. Ihre Schnittpunkte mit der K_2 sind $B_1(0|-2)$ und $B_2(2|4)$, die Tangenten in ihnen $t_1 = x + y + +2 = 0$ und $t_2 = x - y + 2 = 0$

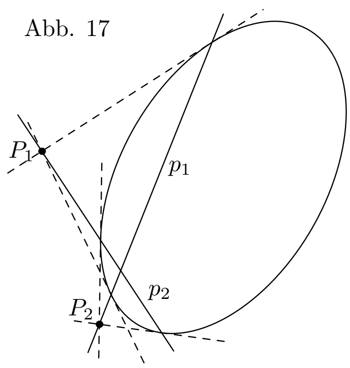
Aufgabe 3.105. Welche Gleichungen haben die Tangenten von $P_0(6|2)$ an die $K_2 = x^2 + 2xy + y^2 - 16x + 48 = 0$?

Bemerkung. Wir zeigen in § 4, 4.5, dass man die $K_2 = t_1t_2 = 0$ schneller erhält, also $t_1 = 0$ und $t_2 = 0$ ohne Berührpunktermittlung gewinnen kann.

3.16.4. *Polaren.* Seien $P_1(x_1|y_1)$ und p_1 sowie $P_2(x_2|y_2)$ und p_2 zwei Paare von Pol und Polare. Es gilt somit

$$p_1 = g_1x_1 + g_2y_1 + g_3 \qquad \text{nach (3.53)}$$
$$p_2 = g_1(P_2)x + g_2(P_2)y + g_3(P_2) \qquad \text{nach (3.54)}$$

Folglich ist $p_1(P_2) = g_1(P_2)x_1 + g_2(P_2)y_1 + g_3(P_2) = p_2(P_1)$. Insbesondere sind Inzidenz von P_1 mit p_2 und Inzidenz von P_2 mit p_1 gleichbedeutend (Abb. 17).

Abb. 17


Konstruktion der Polaren p_0 zum Pol P_0 innerhalb einer K_2: sind p_1 und p_2 beliebige als Polaren aufzufassende Sekanten durch P_0, so liefert eine Anwendung der Abb. 17 die Einsicht in die Richtigkeit der Konstruktion der Abbildung 18.

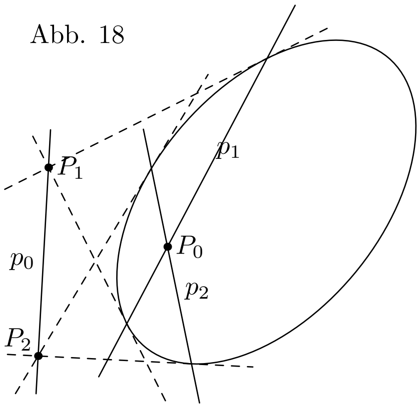
Dreht sich eine Gerade p um P_0, so wandert ihr Pol P auf der Geraden p_0.

Aufgabe 3.106. Die Leitgerade ℓ ist die *Polare* des zugehörigen *Brennpunktes* F.

Aufgabe 3.107. Die Gerade g_3 ist die Polare des Ursprungs.

Bemerkung zur Anwendung des *Separierens*: Ersetzt man in der K_2-Gleichung das

Abb. 18



Glied $a_{11}x^2 = a_{11}xx$ durch $a_{11}xx_0$, $2a_{13}x = a_{13}(x+x)$ durch $a_{13}(x+x_0)$ und verfährt mit den übrigen Gliedern entsprechend, so geht die K_2-Gleichung in die Polarengleichung (3.55) über. Diesen Vorgang haben wir schon bei (3.47) *Separation* genannt.

Man überzeugt sich leicht, dass aus der Kurvengleichung $K_2 = d_1^2 + rd_2^2 + s = 0$ des Abschnitts 3.12 analog die Polarengleichung $p_0 = d_1(P_0)d_1 + rd_2(P_0)d_2 + s = 0$ wird.

Liegt P_0 speziell auf dem Durchmesser d_1, gilt also $d_1(P_0) = 0$, so ergibt sich $p_0 = d_2 + c = 0$. Die Polare und der Durchmesser d_2 sind also parallel. Ist P_0 außerdem Kurvenpunkt, so besagt die Tangentengleichung $t_0 = d_2 + c = 0$ nun direkt das Konjugiertsein von d_1 und d_2.

3.17. **Beschreibung der Kurven zweiter Ordnung durch Linienkoordinaten.**

3.17.1. *Der Pol P_0 zur gegebenen Polaren p.* Wir stellen uns die Aufgabe, zur gegebenen Polaren $p = ux + vy + w = 0$ den Pol $P_0(x_0|y_0)$ hinsichtlich der K_2 mit der Matrix (a_{ik}) anzugeben. Dann unterscheiden sich also $g_i(P_0)$ $(i = 1,2,3)$ und u, v, w um einen gemeinsamen Faktor q, womit dann folgendes System zu lösen ist:

$$\begin{aligned} a_{11}qx_0 + a_{12}qy_0 + a_{13}q &= u \\ a_{12}qx_0 + a_{22}qy_0 + a_{23}q &= v \\ a_{13}qx_0 + a_{23}qy_0 + a_{33}q &= w \end{aligned} \tag{3.56}$$

Die *Cramer*sche Regel ergibt (Fall $A \neq 0$):

$$\begin{aligned} qx_0 &= \frac{\begin{vmatrix} u & a_{12} & a_{13} \\ v & a_{22} & a_{23} \\ w & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}} = \frac{A_{11}u + A_{12}v + A_{13}w}{A} \\ qy_0 &= \ldots \qquad\qquad = \frac{A_{12}u + A_{22}v + A_{23}w}{A} \\ q &= \ldots \qquad\qquad = \frac{A_{13}u + A_{23}v + A_{33}w}{A} \end{aligned}$$

oder auch

$$\begin{aligned} qAx_0 &= uA_{11} + vA_{12} + wA_{13} \\ qAy_0 &= uA_{12} + vA_{22} + wA_{23} \\ qA &= uA_{13} + vA_{23} + wA_{33} \end{aligned} \tag{3.57}$$

Der Pol ist also

$$P_0\left(\frac{A_{11}u + A_{12}v + A_{13}w}{A_{13}u + A_{23}v + A_{33}w} \,\Big|\, \frac{A_{12}u + A_{22}v + A_{23}w}{A_{13}u + A_{23}v + A_{33}w}\right) \tag{3.58}$$

Beispiel 3.16. Die Ellipse $K_2 = 5x^2 + 4xy + 8y^2 - 16x + 8y - 16 = 0$ hat die Leitgeraden $\ell_1 = 2x - y - 14 = 0$ und $\ell_2 = 2x - y + 4 = 0$. Wo liegen ihre Brennpunkte, also die *Pole der Leitgeraden* (siehe Aufgabe 3.106)? Es ist $(a_{ik}) =$

$\begin{pmatrix} 5 & 2 & -8 \\ 2 & 8 & 4 \\ -8 & 4 & -16 \end{pmatrix}$ und $(A_{ik}) = \begin{pmatrix} -144 & 0 & 72 \\ 0 & -144 & -36 \\ 72 & -36 & 36 \end{pmatrix}$; (3.56) liefert $F_1(4|-2)$ und $F_2(0|0)$.

Aufgabe 3.108. Fassen Sie alle Fälle zusammen, bei denen es zur gegebenen Polaren keinen Pol gibt. Damit haben Sie ein geometrisches Problem zur Diskussion eines linearen Gleichungssystems. Kann es vorkommen, dass auch im Falle $A = 0$ eine Lösung existiert? Kann es vorkommen, dass im Falle $A \neq 0$ kein Pol existiert?

Aufgabe 3.109. Wo liegt der Berührungspunkt der Tangente $t = Ax+By+C = 0$ bei der a) $K_2 = b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$ und b) $K_2 = y^2 - 2px = 0$?

Aufgabe 3.110. Führen Sie mittels (3.56) nach entsprechender Multiplikation der Zeilen mit passenden Daten und nachfolgender Addition den Nachweis, dass die Kurvenpunkte durch Inzidenz mit ihren Polaren gekennzeichnet sind.

3.17.2. *Von Staudtsche Definition der Kurven zweiter Ordnung. Christian von Staudt* (1798–1867) faßte – um hier kurz zu reden – (3.54) als Abbildung auf: durch die Matrix (a_{ik}) ordnete er jedem Punkt der Ebene mittels (3.54) eine Gerade zu. Dann gehört zu einer solchen Abbildung eine ausgezeichnete Punktmenge, nämlich die Menge aller Punkte, die mit ihren Bildgeraden inzidieren. Diese Punktmenge ist die K_2. Diese Definition sieht also die Abbildung als das Primäre an. Es gibt Abbildungen dieser Art ohne solche Inzidenzpunkte, die zugehörige zweitrangige *Inzidenzkurve* – Kurve zweiter Ordnung – heißt hier nullteilig, da sie keine reellen Punkte enthält.

3.17.3. *K_2-Gleichung in Linienkoordinaten.* Wir eröffnen mit der Frage, welche Geraden $t = ux + vy + w = 0$ Tangenten zur gegebenen K_2 mit der Matrix (a_{ik}) sind. Aus (3.57) erhalten wir nach Multiplikation dieser drei Gleichungen mit u, v, w und anschließender Addition auf der linken Seite Null; denn die Tangenten sind durch Inzidieren mit ihren Polen gekennzeichnet. Es verschwindet also die rechte Seite und wir sind schon am Ziel.

$$A_{11}u^2 + 2A_{12}uv + A_{22}v^2 + 2A_{13}uw + 2A_{23}vw + A_{33}w^2 = 0 \tag{3.59}$$

ist die Gleichung der K_2 in sogenannten *Linienkoordinaten* u, v, w. Diese Gleichung entsteht durch Austausch der Koeffizienten a_{ik} mit den algebraischen *Komplementen* A_{ik} an der Stelle a_{ik} bei der K_2-Matrix (a_{ik}). Tangenten sind solche Geraden $t = ux + vy + w = 0$, deren Koeffiziententripel (u, v, w) (3.59) befriedigt.

Von nun an steht die entsprechende (A_{ik})-Matrix der (a_{ik})-Matrix gleichberechtigt zur Seite.

Aufgabe 3.111. *a*) Welche Gleichung hat die Parabel $K_2 = 4x^2 - 12xy + 9y^2 - 10x + 17y + 4 = 0$ in Linienkoordinaten?
b) Ist die $K_1 = 2x - y - 5 = 0$ Tangente? Wo liegt der Pol der K_1?

Aufgabe 3.112. Unter welcher Bedingung ist die Gerade $t = Ax + By + C = 0$ Tangente von a) $K_2 = b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$ und b) $K_2 = y^2 - 2px = 0$?

Die Geraden und die Punkte sind gleichberechtigte Grundelemente beim Aufbau der absoluten Geometrie. Diese erwähnte Gleichberechtigung bedingt es, dass gewisse Sachverhalte bei den K_2 sich geeigneter durch die a_{ik}, andere dagegen durch die A_{ik}-Koeffizienten beschreiben lassen.

Aufgabe 3.113. Eine Menge von K_2 soll nach ihrem Inzidieren mit dem Ursprung durchmustert werden. In welchen Koordinaten wünschen Sie die Gleichungen beschrieben? Wie entscheiden Sie sich, wenn Sie die Teilmenge der parabolischen Typen angeben sollen?

Hinsichtlich unserer Fokalerzeugung ist es von Interesse, einer K_2-Gleichung anzusehen, ob eine Inzidenz der Leitlinie oder des Fokus mit dem Ursprung O vorliegt.

Aufgabe 3.114. Entnehmen Sie der Matrix (2.2) die für die Inzidenz von ℓ mit O notwendige Bedingung: $\bar{a}_{13}^2 + \bar{a}_{23}^2 + \bar{a}_{33} = 0$. Ist diese Bedingung hinreichend ? Welchen Nachteil hat sie? Ziehen Sie die $(\bar{A}_{ik})$-Matrix zu (2.2) heran und finden Sie eine normierungsfreie notwendige und hinreichende Bedingung für die Inzidenz von ℓ und O.

Aufgabe 3.115. Stellen Sie die zu $F(0|0)$ gehörige Matrix auf, bilden Sie die $(\bar{A}_{ik})$-Matrix und erkennen Sie deren „Kreisgestalt“: $\bar{A}_{11} = \bar{A}_{22}$ und $\bar{A}_{12} = 0$, woraus $A_{11} = A_{22}$ und $A_{12} = 0$ folgt.

Aufgabe 3.116. *a*) Ist die Bedingung: $A_{11} = A_{22}, A_{12} = 0$ auch hinreichend für das Zusammenfallen von Fokus und Ursprung?
b) Hat die $K_2 = 9x^2 - 6xy + 17y^2 - 48x - 16y - 64 = 0$ einen Brennpunkt im Ursprung?

4. Mannigfaltigkeiten von Kurven zweiter Ordnung

4.1. **Das K_2-Büschel.** Zwei *reguläre* Kurven zweiter Ordnung haben höchstens vier Schnittpunkte, da bei fünf gemeinsamen Punkten beide Kurven dieselben sind.

Aufgabe 4.1. Weshalb liegt die K_1 durch 2 und die K_2 durch 5 Punkte fest ?

Aufgabe 4.2. Schildern Sie auf Grund der Anschauung die Realitätsverhältnisse bei den vier Schnittpunkten zweier regulärer K_2.

Sind zwei K_2 gegeben: $K_2' = a_{11}'x^2 + \cdots + a_{33}' = 0$ und $K_2'' = a_{11}''x^2 + \cdots + a_{33}'' = 0$, so ist

$$K_2 = K_2' + \kappa K_2'' = 0 \tag{4.1}$$

für jedes κ – ein Fall ausgenommen – wieder eine K_2 mit

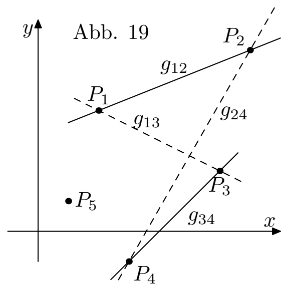
$$a_{ik} = a_{ik}' + \kappa a_{ik}'' \tag{4.2}$$

Aufgabe 4.3. Welches ist der analoge Fall zur Aufgabe 1.3 *d*) im § 1?

Sind $S_i (i = 1, 2, 3, 4)$ die vier – reellen oder komplexen – Schnittpunkte von K_2' und K_2'', so inzidieren diese Punkte mit K_2. Daher nennt man analog zu (1.1) jetzt (4.1) ein K_2-*Büschel*, κ den *Büschelparameter*, K_2' und K_2'' die *Erzeugenden* und die vier Punkte S_i die *Grundpunkte* des Büschels.

4.2. K_2 **durch fünf Punkte.** Nehmen wir vier der Punkte $P_i (i = 1, 2, 3, 4)$ in der Abbildung 19 als Grundpunkte für ein K_2B, so ist κ durch Einsetzen der Koordinaten des fünften Punktes in den wesentlichen Fällen bestimmbar.

Abb. 19



Aufgabe 4.4. In welchen Fällen erübrigt sich diese Bestimmung?

Als Erzeugende wählen wir laut Abbildung 19 die in Geraden zerfallenden $K_2' = g_{12}g_{34} = 0$ und $K_2'' = g_{13}g_{24} = 0$, dann ist nach (4.1)

$$K_2 = g_{12}g_{34} + \kappa g_{13}g_{24} = 0 \tag{4.3}$$

Beispiel 4.1. $P_1(-5|1), P_2(1|11), P_3(6|10), P_4(11|0)$ und $P_5(1|-5)$ seien gegeben. $g_{12} = \begin{vmatrix} -5 & 1 & 1 \\ 1 & 11 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0$ liefert $g_{12} = 5x-3y+28 = 0$; analog ist $g_{34} = 2x+y-22 = 0$ und $g_{13} = 9x - 11y + 56 = 0$, $g_{24} = 11x + 10y - 121 = 0$. (4.3) ergibt $K_2 = (5x-3y+28)(2x+y-22)+\kappa(9x-11y+56)(11x+10y-121) = 0$, woraus mit P_5 sich $\kappa = -\frac{1}{16}$ ergibt, also $K_2 = 61x^2 + 15xy + 62y^2 - 391x - 387y - 3080 = 0$ folgt.

Aufgabe 4.5. Welche Gleichung hat die K_2 durch die Punkte $P_1(0|1)$, $P_2(-2|3)$, $P_3(-3|3)$, $P_4(-4|-1)$ und $P_5(-2|-1)$?

Aufgabe 4.6. Dasselbe für $P_1(-2|0)$, $P_2(-4|2)$, $P_3(-5|2)$, $P_4(-5|2)$ und $P_5(7|0)$.

Aufgabe 4.7. Dasselbe für $P_1(-1|-3)$, $P_2(7|1)$, $P_3(3|3)$, $P_4(-5|-1)$ und $P_5(-4|-2)$. Wo liegt der Mittelpunkt?

Aufgabe 4.8. Dasselbe für $P_1(2|3)$, $P_2(-3|-1)$, $P_3(-1|-2)$, $P_4(4|2)$ und $P_5(2|-1)$. Bestimmen Sie den Typ und die Gleichungen der Achsen.

Aufgabe 4.9. Dasselbe für $P_1(3|0)$, $P_2(7|0)$, $P_3(0|7)$, $P_4(0|3)$ und $P_5(12|3)$. Wo liegen die Brennpunkte? Welche Gleichungen haben die Leitgeraden?

4.3. **K_2 durch vier Punkte und eine Zusatzbedingung.** Wir verweisen nur auf die Tabelle 1 und fahren mit Aufgaben fort.

Aufgabe 4.10. Welche Gleichung hat die gleichseitige Hyperbel durch $P_1(0|1)$, $P_2(-2|3)$, $P_3(-3|3)$ und $P_4(-4|-1)$?

Aufgabe 4.11. Dasselbe für $P_1(-2|0)$, $P_2(-4|2)$, $P_3(-5|2)$ und $P_4(7|0)$?

Aufgabe 4.12. Welche Gleichungen haben die beiden parabolischen Typen durch $P_1(-2|0)$, $P_2(-4|2)$, $P_3(-5|2)$ und $P_4(7|0)$? Sind es Parabeln?

Aufgabe 4.13. Diskutieren Sie die durch $P_1(6|0)$, $P_2(0|2)$, $P_3(-2|0)$ und $P_4(0|-6)$ bestimmten parabolischen Typen.

Beispiel 4.2. Von Bedeutung ist auch der Fall der Inzidenz aller vier Grundpunkte eines K_2-Büschels. Die Hyperbel $(y+8)^2 - 2x^2 - 32 = 0$ bildet mit ihrer „Doppeltangente“ im Punkt $P(4|0): \quad t^2 = (x-y-4)^2 = 0$ ein Erzeugendenpaar mit vier reellen zusammenfallenden Schnittpunkten. Die in diesem Büschel enthaltene Parabel heißt *Schmiegeparabel* der Hyperbel im Punkt $P(4|0)$. Zeigen Sie, dass ihre Gleichung $K_2 = 4x^2+y^2-4xy-16x = 0$ ist. Wie kommt man von dieser Schmiegeparabel zur Hyperbel zurück? Wodurch ist die Parallelität der Hauptachse zu einer Koordinatenachse algebraisch gekennzeichnet?

Aufgabe 4.14. Welche Gleichungen haben die Ellipsen mit $\varepsilon = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ durch $P_1(1|0)$, $P_2(\frac{7}{3}|0)$, $P_3(0|\frac{7}{3})$ und $P_4(0|1)$? Wo liegen ihre Mittelpunkte? Welche Gleichungen und Längen haben ihre Achsen?

Aufgabe 4.15. Welche Gleichungen haben *a*) die gleichseitige Hyperbel, *b*) die parabolischen Typen durch die Punkte der Aufgabe 4.14? *c*) Worin drückt sich die aus dem Elementarunterricht bekannte Tatsache, dass durch vier Punkte nur in Sonderfällen ein Kreis gelegt werden kann, jetzt aus? Weshalb geht durch die Grundpunkte der Aufgabe 4.14 ein Kreis? Geben Sie dessen Gleichung an.

4.4. K_2 **über Tangente mit Berührpunkt.** Fallen von den fünf Punkten zwei zusammen, z.B. $P_4 = P_5 = B$, so geht ihre Verbindungsgerade in die Tangente t über. Analog zu (4.3) wird

$$K_2 = g_{12}t + \kappa g_{B1}g_{B2} = 0 \tag{4.4}$$

Aufgabe 4.16. Weshalb muss in (4.4) P_3 zur κ-Bestimmung benutzt werden?

Aufgabe 4.17. Welche Gleichung hat die K_2 durch die Punkte $P_1(5|1)$, $P_2(3|-1)$ und $P_3(4|-2)$, die die Tangente $t = 2x - y - 1 = 0$ mit dem Berührpunkt $B(2|3)$ besitzt?

Aufgabe 4.18. Bestimmen Sie die Gleichung der parabolischen Typen, die die Gerade $t = 2x + y = 0$ im Ursprung berühren und durch die Punkte $P_1(2|0)$ und $P_2(3|3)$ gehen.

Aufgabe 4.19. Welche gleichseitige Hyperbel durch die Punkte $P_1(4|-3)$ und $P_2(2|5)$ berührt die Gerade $t = 2x + y + 4 = 0$ in $B(1|-6)$?

Aufgabe 4.20. Welche K_2 mit den Tangenten $t_1 = 2x-y+4 = 0$ und $t_2 = x-5 = 0$ und den Berührungspunkten $B_1(-1|2)$ und $B_2(5|4)$ geht durch den Punkt $P(1|2)$? Diskutieren Sie zuerst

$$K_2 = t_1t_2 + \kappa p_0^2 = 0 \tag{4.5}$$

wo $p_0 = g_{B_1B_2}$.

Aufgabe 4.21. *a*) Welche Gleichung hat die K_2 durch $P(\frac{3}{2}|\frac{1}{3})$, die die x-Achse bei $B_1(\frac{1}{2}|0$ und $B_2(3|0)$ mit den Steigungen $m_1 = \frac{10}{17}$ und $m_2 = -\frac{5}{11}$ durchsetzt?
b) Wo liegt ihr Mittelpunkt?
c) Welche Gleichungen haben die Asymptoten?

Aufgabe 4.22. *a*) Welche Parabel hat den Hochpunkt $H(0|4)$ und den am weitesten rechts gelegenen Punkt $R(6|0)$?
b) Wo liegt ihr Brennpunkt?
c) Welche Gleichung hat ihre Achse?

Aufgabe 4.23. *a*) Welche Gleichung hat die K_2 mit dem Mittelpunkt $M(3|3)$ und dem am weitesten links gelegenen Punkt $L(-6|0)$, die die x-Achse nochmals bei $B(10|0)$ mit der Steigung $m = \frac{3}{2}$ durchsetzt?
b) Wie lauten die Gleichungen der Achsen und wie lang sind die Halbachsen?

Aufgabe 4.24. *a*) Welche Gleichung hat die gleichseitige Hyperbel mit dem Hochpunkt $H(-1|8)$ und dem Tiefpunkt $T(3|4)$?
b) Welche Asymptoten hat sie?
c) Wie lauten die Gleichungen ihrer Achsen?

Aufgabe 4.25. *a*) Welche Gleichung hat die Ellipse mit der Fläche $F = \frac{32}{3}\pi\sqrt{3}$, dem Hochpunkt $H(\frac{8}{3}\sqrt{3}|8)$ und dem Tiefpunkt $T(0|0)$?
b) Welche Längen und Gleichungen haben ihrer Achsen?
c) Wie lauten die Gleichungen ihrer Leitgeraden?

Aufgabe 4.26. *a*) Welche Gleichung hat die Hyperbel mit $\varepsilon = \frac{1}{2}\sqrt{5}$ und dem Hochpunkt $H(-6|6)$, wenn der Urpsung ihr am weitesten rechts gelegener Punkt ist?
b) Wo liegt ihr Mittelpunkt?
c) Welche Gleichungen haben die Achsen?
d) Welche Asymptoten hat die Kurve?

4.5. **Die Tangenten-K_2 einer Kurve zweiter Ordnung.** Eine K_2 ist nach (4.5) im Büschel aus zwei ihrer Tangenten t_1 und t_2 und der Polaren p_0 des Tangentenschnittpunktes P_0 enthalten, woraus

$$t_1 t_2 = K_2 - \kappa p_0^2 = 0$$

folgt. Wegen $t_1(P_0) = t_2(P_0) = 0$ und $K_2(P_0) = p_0(P_0) \neq 0$ ist also $K_2(P_0) = \kappa p_0^2(P_0)$, sodass mit $\kappa = \frac{1}{K_2(P_0)}$ dann

$$t_1 t_2 = p_0^2 - K_2(P_0) K_2 = 0 \tag{4.6}$$

wird.

Die in die Tangenten t_1 und t_2 zerfallende $K_2 = t_1 t_2 = 0$ nennen wir *Tangenten-K_2* der gegebenen K_2 bezüglich des Punktes P_0.

Beispiel 4.3. Welche Gleichungen haben die Tangenten von $P_0(1|3)$ an die $K_2 = 4x^2 + 2xy + 2y^2 + 2x + 2y - 4 = 0$? Nach (3.53) ist $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$, $p_0 = (4x + 2y + 1) \cdot 1 + (2 + 2y + 1) \cdot 3 + (x + y - 4) = 8(x + y) = 0$ (<u>nicht</u> kürzen). Ferner ist $K_2(P_0) = K_2(1|3) = 32$. (4.6) liefert $t_1 t_2 = x^2 - xy + x - y - 2 = (x - y + 2)(x - 1) = 0$, also $t_1 = x - y + 2 = 0$ und $t_2 = x - 1 = 0$.

Aufgabe 4.27. Welche Gleichungen haben die Tangenten von a) $P_0(6|-1)$ und b) $P_0(5|-2)$ an die Parabel $K_2 = x^2 + 2xy + y^2 + 6x - 26y - 23 = 0$?

Aufgabe 4.28. Dasselbe für $P_0(-6|6)$ und $K_2 = x^2 + 2xy + y^2 - 4x + 4y - 12 = 0$. Wo liegen die Berührpunkte?

Aufgabe 4.29. *a*) Beweisen Sie: Die vom Ursprung an eine K_2 gelegten Tangenten sind $t_1 t_2 = g_3^2 - a_{33} K_2 = 0$
b) Was ergibt sich bei der $K_2 = x^2 + 2xy + y^2 + 6x - 10y + 41 = 0$?

Aufgabe 4.30. *a*) Welche Gleichung hat die Hyperbel, die die vom Ursprung aus an die Ellipse $5x^2 - 6xy - 8x - 8y + 12 = 0$ gelegten Tangenten zu Asymptoten hat und durch den Mittelpunkt geht?
b) Welche Gleichungen haben die Hyperbelachsen?
c) Wo liegen die Scheitel der Hyperbel?

Aufgabe 4.31. Wir wollen beachten, dass in diesem Abschnitt der Punkt (Pol) P_0 Gegenstand der Betrachtung ist, von dem das Weitere ausgeht. Anschließend kann man aber (4.6) auf parallele t_1 und t_2 „fortsetzen". P_0 existiert <u>nicht</u>. Weshalb <u>muss</u> aber „$K_2(P_0)$" existieren?

Wir gehen dem Spezialfall nach, welcher durch die Orthogonalität von t_1 und t_2 ausgezeichnet ist. Dann wandert der Pol P_0 auf einer Kurve, von der die gegebene K_2 ständig unter einem rechten Winkel gesehen wird. Diese Kurve nennen wir die *orthoptische Kurve* der K_2.

Beispiel 4.4. Für $b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$ ist $p_0 = b^2 x x_0 + a^2 y y_0 - a^2 b^2 = 0$. Aus (4.6) folgt daher $t_1 t_2 = a^2 b^2 \big((b^2 - y_0^2)x^2 + (a^2 - y_0^2)y^2\big) + \cdots = 0$, sodass $s_{33} = 0$ ergibt: $x_0^2 + y_0^2 = a^2 + b^2$. Die orthoptische Kurve der in Achsengleichung gegebenen Ellipse oder Hyperbel ist also der Kreis $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$.

Aufgabe 4.32. Beweisen Sie: Bei einer stumpfwinkligen Hyperbel ist der orthoptische Kreis nullteilig, bei einer gleichseitigen ein Nullkreis und bei einer spitzen Hyperbel reell.

Aufgabe 4.33. *a*) Zeigen Sie: Bei allgemeiner Lage der Ellipse und Hyperbel hat der orthoptische Kreis die Gleichung $(A_{33}x - A_{13})^2 + (A_{33}y - A_{23})^2 + s_{33}A = 0$
b) Welche Gleichung ergibt sich bei der Ellipse
$K_2 = 8x^2 + 4xy + 5y^2 - 10x + 2y - 3 = 0$?

Aufgabe 4.34. *a*) Welche Gleichung hat die Ellipse mit dem einen Scheitel $S_1(0|2)$ und der Fläche $F = 15\pi$, die von allen Punkten des Kreises $x^2+y^2-6x+4y-21 = 0$ unter einem rechten Winkel erscheint?
b) Wo liegt der zweite Scheitel?
c) Wo liegen die Brennpunkte?
d) Wie lauten die Gleichungen der Leitgeraden?

Aufgabe 4.35. Beweisen Sie: Die orthoptische Kurve einer Parabel ist ihre Leitgerade.

4.6. **K_2-Gleichung über eine bekannte Achsenrichtung.** Wir bringen drei Aufgaben.

Aufgabe 4.36. Beweisen Sie: Die Hauptachsenrichtung m_h genügt der Gleichung $a_{12}m_h^2 + (a_{11} - a_{22})m_h - a_{12} = 0$.

Aufgabe 4.37. Welche Gleichung hat die K_2 ,it der Hauptachsenrichtung $m_h = 2$, die durch die Punkte $P_1(1|-1)$, $P_2(2|0)$, $P_3(5|1)$ und $P_4(5|-3)$ geht?

Aufgabe 4.38. *a*) Welche K_2 mit der Hauptachse parallel zur ersten Winkelhalbierenden des Koordinatensystems hat den Hochpunkt $H(4|8)$ und den Tiefpunkt $T(-2|2)$?
b) Welche numerische und welche lineare Exzentrizität hat sie?
c) Wie lang sind die Halbachsen?
d) Wie lauten die Gleichungen der Achsen?

4.7. **Geometrisches Seitenstück.** Abseits von unseren algebraischen Ausführungen liegt die rein geometrische Lehre von den Kurven zweiter Ordnung, die diese als Schnitte von Kegeln und Ebenen verständlich macht. Deshalb heißen die K_2 auch *Kegelschnitte*. Zu erwähnen ist ferner die projektive und koordinatenfreie (nicht rechnende) Behandlung, die sich wesentlich mit geometrischen Konstruktionen aus Grundelementen befaßt. Diese Behandlung soll hier – sie gehört nicht zum Thema – nur deshalb anklingen, weil aus der algebraischen Büschelbehandlung ein allgemeiner Beweis des *Pascal*schen Satzes fließt, auf dem vornehmlich solche Betrachtungen fußen.

Aufgabe 4.39. Studieren Sie das in Abbildung 20 einer K_2 einbeschriebene Sechseck und formulieren Sie Ihre Erkenntnis. Sie ist der Inhalt des Satzes von Pascal[2]. Merken Sie sich das zyklische Vorgehen bei Auslassung des „mittleren Punktes“. Merken Sie sich die laufende Nummerierung der sechs Kurvenpunkte.

Beweis. des Satzes von Pascal: Gemäß (4.3) notieren wir die Gleichung

$$K_2 = g_{12}g_{56} + \kappa_3 g_{25}g_{16} = 0 \tag{4.7}$$

P_4 ist nicht im Spiel. Analog wählt man dann die Darstellung

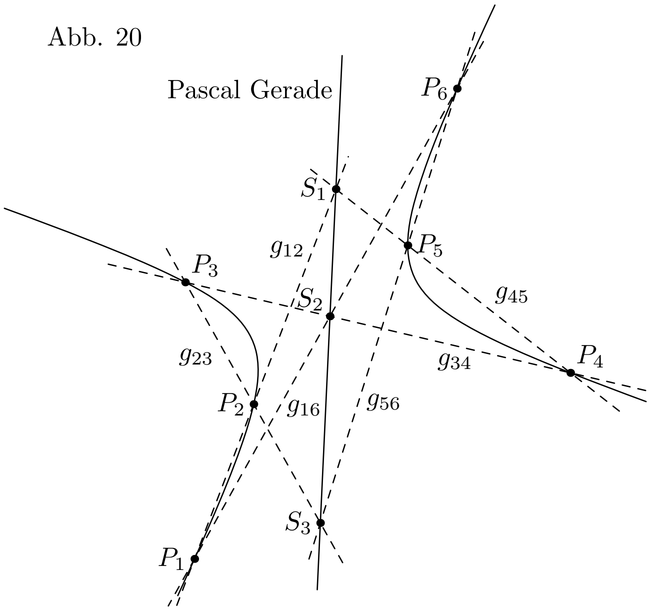
$$K_2 = g_{23}g_{45} + \kappa_1 g_{25}g_{34} = 0 \tag{4.8}$$

P_6 liegt von selbst auf der K_2. Normiert man so, dass (4.7) und (4.8) Identitäten darstellen, so erhält man nach Gleichsetzung für eine *neue* K_2' die Darstellungen:

$$K_2' = g_{12}g_{56} - g_{23}g_{45} = g_{25}(\kappa_1 g_{34} - \kappa_3 g_{16}) = 0$$

[2]Blaise Pascal entdeckte seinen berühmten Satz 1639 im Alter von 16 Jahren!

Abb. 20



Aufgabe 4.40. Zur Vollendung des Beweises: a) Woraus erschließen Sie den Zerfall der K_2'?
b) Weshalb inzidieren S_1 und S_2 mit der K_2'?
c) Woraus ersehen Sie im Gegensatz zu b) auch die Inzidenz von S_3 mit der K_2'?
d) Weshalb ist der Beweis noch nicht fertig?
e) Was folgt aus der möglichen Inzidenz von S_1 und S_2 mit g_{25}? Wieviele Schnittpunkte haben zwei verschiedene Geraden?

□

Der Beweis ist nicht nur beendet, wir haben sogar die Gleichung der *Pascal*schen Geraden gewonnen

$$g_{Pascal} = \kappa_1 g_{34} - \kappa_3 g_{16} = 0 \tag{4.9}$$

Aufgabe 4.41. Untersuchen Sie Herleitung und Gleichung der *Pascal*schen Geraden und schließen Sie algebraisch auf die Anzahl der *Pascal*schen Geraden bei gegebener K_2 mit <u>fest</u> gewählten Punkten $P_i (i = 1 \dots 6)$.

Konstruktionsaufgaben. In diesem Fall können wir nichts Besseres tun, als auf entsprechende ältere Bücher, auch ältere Schulbücher zu verweisen. Solche geometrischen Konstruktionen erfüllen heute nicht mehr den Ausbildungsauftrag der Mathematik.

Weil es jedoch von Bedeutung für die *Fokalerzeugung* ist, entnehmen wir eine Konstruktion aus Weber-Wellstein „Enzyklopädie der Elementarmathematik“ Band 2, 3. Auflage, Leipzig und Berlin 1915, Seite 483.
Gegeben: Leitlinie ℓ, Fokus F, Kurvenpunkt P_1 und Sekante s durch P_1.
Gesucht: Kurvenpunkt P_2 auf s (Abb. 21).

Studieren Sie die Abbildung und beweisen Sie, dass die gestrichelte Konstruktion zum zweiten Kurvenpunkt P_2 und die strichpunktierte zur Tangente t_1 führt. Welchen Wert hat $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$ für jede Tangente?

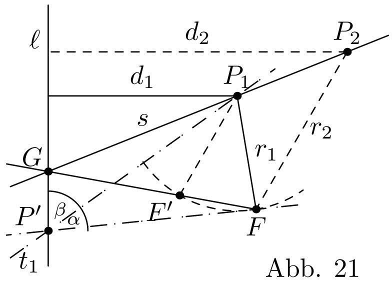


Abb. 21

4.8. **Krümmungskreis.**

4.8.1. *Scheitelkrümmungskreis.* Nach § 1, 1.5 haben die *regulären* K_2 die gemeinsame *Scheitelgleichung* (1.16) $(1-\varepsilon^2)x^2+y^2-2px=0$. In dem Büschel aus der K_2 und ihrer *Scheiteltangente* t_S (hier $x=0$) als Doppelgerade ist ein Kreis

$$K_S = K_2 + \kappa t_S^2 = 0$$

d.h. $K_S = (1+\kappa-\varepsilon^2)x^2+y^2-2px=0$ deshalb enthalten, weil die eine Kreisbedingung ($a_{12}=0$) bereits erfüllt ist und die andere ($a_{11}=a_{22}$) durch $\kappa=\varepsilon^2$ erfüllt werden kann:

$$K_S = K_2 + \varepsilon^2 t_S^2 = 0 \tag{4.10}$$

Dieser Kreis berührt die K_2 offenbar vierpunktig und heißt *Scheitelkrümmungskreis*; sein Radius nennen wir – Bezeichnung ρ_S – den *Scheitelkrümmungsradius* der K_2.

Aufgabe 4.42. Beweisen Sie, dass im oben gewählten Koordinatensystem $K_S = (x-p)^2+y^2-p^2=0$ gilt, also $\rho_S=p$ ist.

Aufgabe 4.43. Bei der Ellipse gibt es auch einen vierpunktig berührenden *Nebenscheitelkrümmungskreis* K_N. Zeigen Sie, dass

$$\rho_N = \frac{a^2}{b} = \sqrt{\frac{A}{(-\lambda_1)^3}}$$

gilt.

Aufgabe 4.44. Die Ellipse $K_2 = 5x^2-8xy+5y^2-2x-2y-70=0$ hat $S_1(-5|-5)$ und $N_1(-1|3)$ (Aufgabe). Wie lauten die Gleichungen der zugehörigen Krümmungskreise?

4.8.2. *Krümmungskreis eines beliebigen K_2-Punktes B.* Ist B kein Scheitel, so gibt es einen die K_2 in B dreipunktig berührenden Kreis, der nach Abschnitt 4.1 die K_2 in einem weiteren Punbkt P schneiden muss. (Übung betr. Realität von Wurzeln algebraischer Gleichungen).

Beweis. Nehmen wir den dreifachen Punkt B und P als Grundpunkte eines K_2B und wählen wir die Tangente t in B und die Sekante s durch P und B als zweite Erzeugende, so fragt sich, ob im Büschel

$$K = \kappa K_2 + ts = 0 \tag{4.11}$$

mit $s = y-y_B-m_s(x-x_B)$ ein Kreis vorhanden ist. Da über die Sekantenrichtung m_s noch nicht verfügt wurde (P ist noch unbekannt), sind der Parameter und die Sekantenrichtung m_s aus Kreisbedingungen bestimmbar. □

Aufgabe 4.45. *a*) Weshalb steht der Büschelparameter κ in (4.11) vor K_2?
b) Diskutieren Sie die Lösbarkeit des in Rede stehenden Systems.

Aufgabe 4.46. Welchen Krümmungskreis hat die $K_2 = 3x^2+2xy-y^2-2x+4y-9=0$ im Punkte $B(1|2)$?

Aufgabe 4.47. Dasselbe für die $K_2 = 31x^2-34xy-31y^2+10x+680y-2600=0$ und $B(5|5)$.

Aufgabe 4.48. Beweisen Sie: Man erhält die Sekante s, indem man t an der Parallelen durch B zur Hauptachse spiegelt. (Nehmen Sie in (4.11) die Scheitelgleichung der K_2 und setzen Sie $a_{12}=0$).

4.8.3. *K_2-Gleichung über den Krümmungskreis eines Punktes.*

Aufgabe 4.49. Welche Gleichung hat die K_2, die in $P_1(2|2)$ den Krümmungskreis $K = (x-2)^2 + (y-1)^2 - 9 = 0$ besitzt und durch $P_2(0|0)$ sowie durch $P_3(1|-1)$ geht?

Aufgabe 4.50. Welche Gleichung hat die K_2, die in $B_1(1|2)$ den Krümmungskreis $K = x^2 + y^2 - 5 = 0$ und in $B_2(-1|0)$ die Tangente $t_2 = x + y + 1 = 0$ besitzt?

Aufgabe 4.51. Diskutieren Sie a) die Parabel, b) die gleichseitige Hyperbel mit der Scheiteltangente $t_S = 2x - y + 8 = 0$ und dem zugehörigen Scheitelkrümmungskreis $K_S = x^2 + y^2 + 10x - 6y + 29 = 0$.

4.9. **Konfokale Kurven zweiter Ordnung.** Kurven mit festen Brennpunkten heißen *konfokale* K_2. Im Falle $A_{33} = 0$ fordern wir neben dem festen Fokus auch eine feste Achsenrichtung. Die Lösung der Aufgabe 3.115 besagt, dass die zu (2.2) gehörige $\bar{A}_{ik}$-Matrix im Spezialfall $F(0|0)$ die folgende Gestalt hat:
$\begin{pmatrix} -\varepsilon^2 w_L^2 & 0 & \varepsilon^2 u_L w_L \\ 0 & -\varepsilon^2 w_L^2 & \varepsilon^2 v_L w_L \\ \varepsilon^2 u_L w_L & \varepsilon^2 v_L w_L & 1-\varepsilon^2 \end{pmatrix}$. Um eine Verwechselung mit den jetzt verwendeten *Linienkoordinaten* zu vermeiden, haben wir die Koeffizienten der Leitgeraden mit L indiziert. Im Falle $A_{33} \neq 0$ ist diese Matrix proportional zu: $\begin{pmatrix} -b^2 & 0 & eu_L \\ 0 & -b^2 & ev_L \\ eu_L & ev_L & 1 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 4.52. Weisen Sie nach, dass im Falle $F(0|0)$ $w_L = f = \frac{p}{\varepsilon}$ ist und bestätigen Sie die Proportionalität der beiden Matrizen.

Aufgabe 4.53. Bestätigen Sie nach (3.13): $x_{F_2} = 2eu_L$ und $y_{F_2} = 2ev_L$.

Im Falle $A_{33} \neq 0$ lautet also bei $F_1(0|0)$ die K_2-Gleichung in *Linienkoordinaten* nach (3.59) $K_2 = -b^2(u^2+v^2) + w(x_{F_2}u + y_{F_2}v + w) = 0$. Setzt man sie in die Gestalt
$$b^2 = \frac{w}{\sqrt{u^2+v^2}} \cdot \frac{x_{F_2}u + y_{F_2}v + w}{\sqrt{u^2+v^2}}$$
so liest man bei bewegungsinvarianter Deutung für die Ellipse und die Hyperbel den Satz von der *Konstanz des Produktes der Abstände jeder Tangente von beiden Brennpunkten* ab.

Diese Deutung erlaubt es, analog wie bei (1.12) und (1.18), die K_2-Gleichung für beliebige Lage der Brennpunkte zum Koordinatensystem direkt hinzuschreiben:

Alle konfokalen Mittelpunkts-K_2 haben in *Linienkoordinaten* die gemeinsame Gleichung

$$K_2 = -b^2(u^2+v^2) + (x_{F_1}u + y_{F_1}v + w)(x_{F_2}u + y_{F_2}v + w) = 0 \tag{4.12}$$

In ihr ist b^2 als Parameter anzusehen.

Aufgabe 4.54. Wie lautet die Gleichung im Falle $F_1(\frac{11}{4}|\frac{11}{4})$, $F_2(\frac{7}{4}|\frac{13}{4})$ und $b^2 = \frac{15}{8}$?

Aufgabe 4.55. Welche Gleichung hat die K_2 mit $F_1(1|1)$, $F_2(7|9)$, $\varepsilon = 2$ und $p = 6$?

Aufgabe 4.56. Dasselbe für $F_1(2|3)$, $F_2(5|6)$ und die Tangente $t = 3x - 4y + 2 = 0$.

Von Interesse ist auch das Analogon zu (4.12) im parabolischen Fall. Zunächst stützen wir uns wieder auf den Fall $F(0|0)$, wo wegen $\varepsilon = 1$ und dann $w_L = p$ die nun doppelt spezialisierte Matrix die folgende Gestalt hat: $\begin{pmatrix} -p & 0 & u_L \\ 0 & -p & v_L \\ u_L & v_L & 0 \end{pmatrix}$ (Division der $\bar{A}_{ik}$ durch p). Die zugehörige K_2-Gleichung ist $-p(u^2+v^2)+2w(u_L u+v_L v)=0$. Wir setzen sie unter Einführung des ins Parabelinnere orientierten Achseneinheitsvektors $\mathfrak{a}^0 = u_L \mathfrak{i} + v_L \mathfrak{j}$ und des variablen, in das Parabelinnere orientierten *Normaleneinheitsvektors* $\mathfrak{n} = \frac{u\mathfrak{i}+v\mathfrak{j}}{\sqrt{u^2+v^2}}$ in die Gestalt

$$\frac{p}{2} = \frac{w}{\sqrt{u^2+v^2}} \mathfrak{a}^0 \cdot \mathfrak{n} \tag{4.13}$$

Multipliziert man also den Abstand jeder Tangente vom Parabelfokus mit dem Skalarprodukt aus dem zugehörigen Normalen- und dem konstanten Achseneinheitsvektors, so erhält man stets $\frac{p}{2}$.

Aufgabe 4.57. Klären Sie, weshalb die verallgemeinerte Gleichung (4.13)

$$-\frac{p}{2}(u^2+v^2) + (x_F u + y_F v + w)(u\cos\varphi + v\sin\varphi) = 0 \tag{4.14}$$

ist; φ ist der Winkel zwischen der positiven x-Achse und der orientierten Parabelachse.

Aufgabe 4.58. Geben Sie die Gleichungen der beiden Parabeln an, die zu $F(1|2)$ und $p = 4\sqrt{2}$ gehören, wenn ihre Achsen der zweiten Winkelhalbierenden des Koordinatensystems parallel sind.

4.10. **Das K_2-Netz.** Zweiparametrige Kurvenscharen nennt man *Kurvennetze*.

Aufgabe 4.59. Beweisen Sie, dass man durch den Ansatz $K = s_1 s_2 + \kappa_1 s_2 s_3 + \kappa_2 s_3 s_1 = 0$ den Umkreis des Dreiecks mit den Seitengleichungen $s_i = 0$ $(i = 1,2,3)$ erhalten kann. Sie haben damit die Eckenberechnung erspart.

Aufgabe 4.60. Wie lautet die Gleichung dess Umkreises K des Dreiecks mit den Seiten: $s_1 = x - 7y - 30 = 0$, $s_2 = x + 3y - 10 = 0$ und $s_3 = 2x + y - 15 = 0$?

Aufgabe 4.61. Können Sie in Aufgabe 4.59 für die $s_i s_j$ auch elliptisch zerfallende Geradenpaare verwenden?

Wir erwähnen noch das Netz

$$K_2 = s_1^2 + \kappa_1 s_2^2 + \kappa_2 s_3^2 = 0 \tag{4.15}$$

Aufgabe 4.62. Seien P_{ij} die Schnittpunkte der Geraden s_i und s_j. Beweisen Sie, dass diese drei Punkte ein festes *Polardreieck* des Netzes (4.15) bilden, d.h. jede seiner Ecken und ihre Gegenseite sind ein Paar von *Pol* und *Polare*.

Aufgabe 4.63. Die Kurve zweiter Ordnung, die das Dreieck $A(1|1)$, $B(-1|0)$ und $C(\frac{5}{4}|\frac{9}{2})$ als Polardreieck und im Kurvenpunkt $P(2|3)$ die Tangente mit der Steigung $m_P = \frac{1}{2}$ besitzt, hat die Gleichung: $K_2 = 8x^2 + 4xy + 5y^2 - 68x + 10y + 5 = 0$. Bestätigen Sie die Richtigkeit des mitgeteilten Ergebnisses aber erst nach seiner Ermittlung.

4.11. **Gleichungen vierten Grades.** Wir verweisen auf die Analytische Geometrie 2. Teil von *Sperner* und auf einen Verfasserbericht in der Zeitschrift „Praxis der Mathematik“ 3. Jahrgang (1961), Heft 6, Seite 148–151, weswegen wir uns mit einem Beispiel begnügen.

Die Gleichung vierten Grades $x^4 - 3x^3 - 15x^2 + 19x + 30 = 0$ ist mittels der Lehre von den K_2-Büscheln auf Wurzeln zu untersuchen. Durch die stets zu benutzende Substitution

$$y = x^2 \tag{4.16}$$

entsteht aus der vorliegenden Gleichung die einer Kurve zweiter Ordnung, nämlich

$$K_2'' = y^2 - 3xy - 15y + 19x + 30 = 0$$

Die Wurzeln der Gleichung 4. Grades sind dann identisch mit den Abszissen der Schnittpunkte von $K_2'' = 0$ und $K_2' = x^2 - y = 0$. Wie jede K_2 des Büschels mit den Erzeugenden K_2' und K_2'':

$$K_2 = K_2' + \kappa K_2'' = 0$$

gehen speziell die im Büschel vorhandenen zerfallenden K_2 durch diese Grundpunkte. Wir geben die Büschelmatrix unseres Beispieles an:

$$\begin{pmatrix} 2\kappa & -3 & 19 \\ -3 & 2 & -15-\kappa \\ 19 & -15-\kappa & 60 \end{pmatrix}$$

Die singulären K_2 des Büschels erhält man für die Werte von κ, die die Determinante der Matrix anullieren. Dadurch ist das Lösen einer Gleichung 4. Grades auf das einer kubischen Gleichung reduziert. In unserem Beispiel erhält man

$$\kappa^3 + 30\kappa^2 + 48\kappa - 224 = 0$$

Für das Lösen dieser sogenannten *kubischen Resolvente* sei nur erwähnt, dass zufolge des P.M.-Berichtes sich ebenfalls Ansätze aus der K_2B-Lehre verwerten lassen, abweichend von den *Cardano*-Formeln.

In unserem Beispiel erhalten wir die Wurzeln $\kappa_1 = 2, \kappa_2 = -28, \kappa_3 = -4$; zu bemerken ist die Tatsache, dass nur eine Wurzel benötigt wird. Wählen wir $\kappa_1 = 2$, so gibt dieser Parameter eine der drei im Büschel vorhandenen zerfallenden K_2 an. Ihre Gleichung ist also

$$K_2 = 2x^2 + y^2 + 30 - 3xy + 19x - 17y = 0 = (x - y + 2)(2x - y + 15)$$

Die Hauptbemerkung: Die Schnittpunktsberechnung der Parabel $K_2' = x^2 - y = 0$ mit Geraden, hier $x - y + 2 = 0$ und $2x - y + 15 = 0$, führt auf quadratische Gleichungen. Wir erhalten: $x_1 = -1, x_2 = 2, x_3 = -3, x_4 = 5$.

4.12. **Bemerkungen zum Dualitätsprinzip.** Eine feste K_2 sei gegeben. Ihre Gleichung lautet nach (1.2) in Punktkoordinaten

$$K_2 = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

und nach (3.59) in *Linienkoordinaten*

$$K_2 = A_{11}u^2 + 2A_{12}uv + A_{22}v^2 + 2A_{13}uw + 2A_{23}vw + A_{33}w^2 = 0$$

In welchem Zusammenhang steht die neue Kurve

$$K_2' = a_{11}u^2 + 2a_{12}uv + a_{22}v^2 + 2a_{13}uw + 2a_{23}vw + a_{33}w^2 = 0 \tag{4.17}$$

mit der ersten, die wir uns in Punktkoordinaten beschrieben denken?

Antwort: falls $P(x_P|y_P)$ ein Kurvenpunkt der K_2 ist, so ist die Gerade $t = x_Px + y_Py + 1 = 0$ eine Tangente der K_2' und umgekehrt. Durch diese Antwort, die leicht einzusehen ist, erhält eine nullteilige K_2, nämlich der nullteilige Einheitskreis

$$x^2 + y^2 + 1 = 0 \tag{4.18}$$

eine Bedeutung. Vermöge der Polarität (Abbildung)

$$P(x_P|y_P) \leftrightarrow t = x_Px + y_Py + 1 = 0 \tag{4.19}$$

am nullteiligen Einheitskreis ist die Abbildung $K_2 \mapsto K_2'$ geometrisch interpretierbar: Die Kurve K_2' wird von allen Polaren eingehüllt, deren Pole die Kurvenpunkte der K_2 sind. Wir sagen kurz: Die Auswechslung der Punkt- mit den *Linienkoordinaten* bedeutet bei Festlassen der Koeffizienten die Polarität am nullteiligen Einheitskreis.

Aufgabe 4.64. Beschreiben Sie nun in *Linienkoordinaten* die K_2 und bilden Sie diese K_2 auf die K_2'' mit der Gleichung

$$K_2'' = A_{11}x^2 + 2A_{12}xy + A_{22}y^2 + 2A_{13}x + 2A_{23}y + A_{33} = 0 \tag{4.20}$$

ab. Welche geometrische Interpretation finden Sie für den Übergang $K_2 \mapsto K_2''$?

Die Lösung sagt: Die Kurve mit der Gleichung $K_2'' = 0$ besteht aus allen Polen, deren Polaren Tangenten der K_2 sind, und diese Vermittlung geschieht durch den nullteiligen Einheitskreis.

Aufgabe 4.65. Beweisen Sie: $K_2' = K_2''$.

Aufgabe 4.66. Beweisen Sie: Die algebraischen *Komplemente* der A_{ik} in der Matrix (A_{ik}) sind (bis auf einen Proportionalitätsfaktor) die a_{ik}.

Aufgabe 4.67. Beweisen Sie: Tauscht man in der Gleichung einer K_2 die sechs Koeffizienten mit ihren algebraischen *Komplementen* unter Beibehaltung der Variablen aus, so entsteht die Gleichung der durch Polarität am nullteiligen Einheitskreis erzeugten neuen K_2.

Aufgabe 4.68. Dualitätsprinzip: Jede richtige Aussage über eine Inzidenzbeziehung zwischen Punkten und Geraden ist auch nach Vertauschung der Grundelemente eine richtieg Aussage.

Aufgabe 4.69. Vertauschen Sie die Grundelemente des *Pascal*schen Satzes und formulieren Sie das Ergebnis. Es ist der Satz von *Brianchon*.

Dieses Dualitätsprinzip bürgt dafür, dass jede Ortsaufgabe der analytischen Geometrie, die sich mit Kurven zweiter Ordnung beschäftigt, nur noch eine Kreisaufgabe ist. Wählen wir z.B. eine Aufgabe: „Auf einer Ellipse bewegt sich ein Punkt ......“ Gemäß den Ausführungen im Abschnitt 4.9 betrachten wir diese Ellipse mit $F(0|0)$ und führen die Polarität am nullteiligen Einheitskreis aus. Dann lautet die Aufgabe: „Auf einem Kreis bewegt sich eine Tangente ......“ Vielfach werden die Probleme auf diese Weise in ein elementargeometrisches Gewand gekleidet und ohne Rechnung lösbar. Ist das nicht der Fall, so kann man meist ganze Teile der Lösung rechnerisch überspringen. Am Schluß muß man die A_{ik} der Lösungskurve mit den a_{ik} vertauschen. Aus Platzmangel muß auf eine detaillierte Ausführung verzichtet werden.

Aufgabe 4.70. *a*) Zeigen Sie, dass die Polarität am nullteiligen Einheitskreis ersetzt werden kann durch die Polarität am reellen Einheitskreis mit anschließender, die Grundelemente erhaltender Spiegelung am Ursprung.
b) Ist das Produkt der letzten Abbildungen kommutativ?

Index

N

O

P

Q

R

S

T

U

V

Z