

GRUPE FONDAMENTAL ÉTALE ET TOPOLOGIQUE

JEAN-LOUIS VERDIER

RÉSUMÉ. Cours de 3^e cycle professé par *Jean-Louis VERDIER* en 1970 traitant des revêtements étales *topologiques, analytiques et algébriques*.

PRÉFACE

Jean-Louis VERDIER donnait ce cours de 3^e cycle à la faculté des sciences d'Orsay en 1970 (février – avril) dont les notes restait inédites. Des cours parallèles « Surfaces de RIEMANN compactes » [3] par *Jean GIRAUD*, « Anneaux locaux henséliens » [8] par *Michel RAYNAUD* et le « séminaire de géométrie algébrique d'Orsay » [2] par *Michel DEMAZURE*, *Jean GIRAUD*, *Michel RAYNAUD* et *Jean-Louis VERDIER* éclairaient des points de vue voisins et empruntaient des résultats les uns des autres.

Dans la présente retranscription en $\text{T}_\text{E}\text{X}$ j'ai remplacé ces références par des citations précises aux travaux publiés et accessibles. Dans la section 4 sur les revêtements des courbes algébriques je ne suppose pas le corps de base algébriquement clos, comme *VERDIER* le faisait au cours. A part ces modifications mon texte suit les notes du cours. En version 1.2, j'ai mis à jour la bibliographie.

Berlin, 20 février 2012

Berndt E. Schwerdtfeger

1. REVÊTEMENTS ÉTALES. DÉFINITIONS

1.1. Morphismes affines, morphismes finis. Soit X un schéma. On rappelle qu'un faisceau de modules \mathcal{M} est dit *quasi-cohérent* s'il existe un recouvrement de X par des ouverts affines $U_i = \text{Spec } R_i$ tel qu'au-dessus de chaque U_i , \mathcal{M} soit de la forme \widetilde{M}_i où M_i est un R_i -module. Il est équivalent d'exiger cette propriété au-dessus de tout ouvert affine U de X .

Soit maintenant \mathcal{A} une \mathcal{O}_X -algèbre quasi-cohérente. Si U est un ouvert affine de X , $\Gamma(U, \mathcal{A})$ est une algèbre sur $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$, d'où une flèche

$$\text{Spec } \Gamma(U, \mathcal{A}) \longrightarrow \text{Spec } \Gamma(U, \mathcal{O}_X) = U.$$

Si U et V sont deux ouverts affines de X , leur intersection est recouverte par des ouverts affines W_i , le diagramme suivant est commutatif, et chacun des carrés y est cartésien, car \mathcal{A} est quasi-cohérent.

$$\begin{array}{ccccc} \text{Spec } \Gamma(U, \mathcal{A}) & \longleftarrow & \text{Spec } \Gamma(W_i, \mathcal{A}) & \longrightarrow & \text{Spec } \Gamma(V, \mathcal{A}) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ U & \longleftarrow & W_i & \longrightarrow & V \end{array}$$

2010 *Mathematics Subject Classification*. Primary 14H30.

Key words and phrases. groupe fondamental, revêtements étales topologiques, analytiques et algébriques, revêtements ramifiés.

© 2007–2015 Berndt E. Schwerdtfeger

version 1.2, rev. 502, 4 mars 2015.

Il est facile de vérifier que les $\text{Spec } \Gamma(W_i, \mathcal{A})$ se recollent au-dessus des intersections $W_i \cap W_j$. On obtient de ce fait un schéma $Y = \text{Spec } \mathcal{A}$ au-dessus de X .

Définition 1.1. *On dit qu'un morphisme de schémas $Y \xrightarrow{f} X$ est affine (ou que Y est affine sur X) s'il existe une algèbre quasi-cohérente \mathcal{A} sur X et un isomorphisme de schémas au-dessus de X : $Y \xrightarrow{\sim} \text{Spec } \mathcal{A}$.*

En remarquant qu'alors l'image directe de \mathcal{O}_Y est isomorphe à \mathcal{A} , on tire de la construction ci-dessus la proposition :

Proposition 1.2. *Soit X un schéma. Pour toute algèbre quasi-cohérente \mathcal{A} , il existe un schéma Y unique à isomorphisme près, et un unique morphisme (affine) $f : Y \rightarrow X$ tels que $f_*(\mathcal{O}_Y) \simeq \mathcal{A}$.*

On dit que $f : Y \rightarrow X$ est fini (ou que Y est fini sur X) s'il est affine et si $f_*(\mathcal{O}_Y)$ est un \mathcal{O}_X -module de type fini.

Proposition 1.3. *Soient X et Y deux schémas et $f : Y \rightarrow X$ un morphisme affine. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

- (1) *Y est fini sur X et localement de présentation finie.*
- (2) *$f_*(\mathcal{O}_Y)$ est un \mathcal{O}_X -module de présentation finie.*

Démonstration. (2) \Rightarrow (1) La question étant locale sur X , on peut supposer que $X = \text{Spec } A$. Alors $Y = \text{Spec } B$, et la flèche $Y \rightarrow X$ correspond à un morphisme d'anneaux $A \rightarrow B$.

L'hypothèse signifie qu'il existe une suite exacte de A -modules:

$$A^p \rightarrow A^n \rightarrow B \rightarrow 0$$

Soient ξ_1, \dots, ξ_n les images dans B de la base canonique de A^n . Il existe p relations linéaires $L_j(\xi_1, \dots, \xi_n) = 0$. Mais B est une A -algèbre et les produits $\xi_k \xi_\ell$ appartiennent à B . Il existe donc n^2 relations linéaires $M_{k\ell}$ telles que

$$\xi_k \xi_\ell = M_{k\ell}(\xi_1, \dots, \xi_n).$$

Considérons maintenant l'homomorphisme d'anneaux:

$$\begin{aligned} A[X_1, \dots, X_n] &\rightarrow B \\ X_i &\mapsto \xi_i \end{aligned}$$

Il est clair que cette application est surjective et que son noyau est l'idéal de type fini engendré par les polynômes $L_j(X_1, \dots, X_n)$ et $X_k X_\ell - M_{k\ell}(X_1, \dots, X_n)$.

(1) \Rightarrow (2) Si f est fini et localement de présentation finie, alors le faisceau d'algèbre $f_*(\mathcal{O}_Y)$ est localement, sur X , de présentation finie, voir au séminaire [2, Prop. 1.8] ou [5, Prop. 6.2.9].

On est ainsi ramené à la situation suivante

$$\text{Spec } B \rightarrow \text{Spec } A$$

où B est un module fini sur A et une algèbre sur A de présentation finie. Si B est engendré par ξ_1, \dots, ξ_n comme A -module, le morphisme d'anneaux

$$\begin{aligned} A[X_1, \dots, X_n] &\rightarrow B \\ X_i &\mapsto \xi_i \end{aligned}$$

est surjectif, et comme B est une A -algèbre de présentation finie, son noyau I est engendré par q polynômes P_j , voir au séminaire [2, Lemme 1.4] ou [5, Prop. 6.2.7]. Mais $\xi_k \xi_\ell \in B$, donc il existe n^2 relations linéaires $M_{k\ell}$ telles que

$$\xi_k \xi_\ell = M_{k\ell}(\xi_1, \dots, \xi_n).$$

Par suite

$$(*) \quad X_k X_\ell - M_{k\ell}(X_1, \dots, X_n) \in I$$

Si dans P_j on remplace tous les produits $X_k X_\ell$ par $M_{k\ell}(X_1, \dots, X_n)$ l'idéal I engendré ne change pas. Par récurrence sur le degré il devient possible d'engendrer I , comme A -algèbre, par q relations linéaires L_j et n^2 polynômes du type $(*)$.

Maintenant, A est limite inductive de ses sous-algèbres de type fini sur \mathbb{Z} :

$$A = \varinjlim A_r.$$

Il existe un indice r_0 tel que $A_0 = A_{r_0}$ contienne les coefficients des L_j et des $M_{k\ell}$.

Posons $B_0 = A_0[X_1, \dots, X_n]/I_0$. Les éléments ξ_i engendrent B_0 comme algèbre sur A_0 , d'où un homomorphisme surjectif de A_0 -modules:

$$\begin{aligned} A_0^n &\longrightarrow B_0 \\ e_i &\longmapsto \xi_i \end{aligned}$$

Mais A_0 étant de type fini sur \mathbb{Z} est noethérien et le noyau de ce morphisme est lui aussi de type fini. Il existe une suite exacte de A_0 -modules :

$$A_0^p \longrightarrow A_0^n \longrightarrow B_0 \rightarrow 0$$

qui, tensorisé par A donne le résultat cherché. \square

1.2. Revêtements étales.

Définition 1.4. Soit $f : Y \rightarrow X$ un morphisme de schémas. On dit que f est un revêtement étale (ou que Y est un revêtement étale de X) quand f est fini et étale.

Rappelons que f est dit *étale* si pour tout point $y \in Y$ il existe des voisinages affines $V = \text{Spec } B$ de y et $U = \text{Spec } A$ de $x = f(y)$ tels que $f(V) \subset U$ et que B soit une A -algèbre étale, c'est-à-dire:

- (1) B est une A -algèbre de présentation finie,
- (2) Tout morphisme de A -algèbres $B \rightarrow C/I$ où I est un idéal de carré nul de C se relève de façon unique en un morphisme $B \rightarrow C$.

Citons un critère permettant de vérifier que f est étale:

Proposition 1.5. Soit $Y \xrightarrow{f} X$ un morphisme de type fini où X est localement noethérien (et partant, Y aussi). Supposons que pour un point $y \in Y$ d'image $x \in X$, l'application $f_y^* : \kappa(x) \rightarrow \kappa(y)$ soit un isomorphisme.

Alors, pour que f soit étale en y , il faut et il suffit que l'application canonique $\widehat{f}_y^* : \widehat{\mathcal{O}}_{X,x} \rightarrow \widehat{\mathcal{O}}_{Y,y}$ soit un isomorphisme.

Démonstration. Supposons f étale en y . Notons $f_y^* : \mathcal{O}_{X,x} \rightarrow \mathcal{O}_{Y,y}$ l'homomorphisme canonique et \mathfrak{m}_x et \mathfrak{m}_y les idéaux maximaux. On a $f_y^*(\mathfrak{m}_x)\mathcal{O}_{Y,y} = \mathfrak{m}_y$ car f est net en y . Donc $f_y^*(\mathfrak{m}_x^n)\mathcal{O}_{Y,y} = \mathfrak{m}_y^n$ pour tout entier n . Par suite $\mathcal{O}_{Y,y}/\mathfrak{m}_y^n \simeq \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x^n \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} \mathcal{O}_{Y,y}$. L'algèbre $\mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x^n \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} \mathcal{O}_{Y,y}$ est étale sur $\mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x^n$, donc quasi-finie, donc finie car $\mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x^n$ est artinien. Comme elle est de plus plate, c'est un $\mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x^n$ -module libre. Son rang est le rang de $\mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} \mathcal{O}_{Y,y} = \mathcal{O}_{Y,y}/\mathfrak{m}_y$ sur $\mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x$. Il est donc égal à 1 et pour tout entier n on a $\mathcal{O}_{Y,y}/\mathfrak{m}_y^n \simeq \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x^n$. Par suite $\widehat{\mathcal{O}}_{Y,y} \simeq \widehat{\mathcal{O}}_{X,x}$.

Réciproquement, le foncteur complétion étant exacte et fidèle, $\mathcal{O}_{Y,y}$ est plat sur $\mathcal{O}_{X,x}$. Comme f est de présentation finie, il suffit de montrer que f est net. Or on a $\mathfrak{m}_x \mathcal{O}_{Y,y} \subset \mathfrak{m}_y$ et pour montrer l'égalité, il suffit de montrer que les complétés sont égaux. Or le complété de $f_y^*(\mathfrak{m}_x)\mathcal{O}_{Y,y}$ est $\widehat{f}_y^*(\widehat{\mathfrak{m}}_x)\widehat{\mathcal{O}}_{Y,y} = \widehat{\mathfrak{m}}_y$. \square

Si B est étale sur A , cela entraîne en particulier que B est plate sur A , voir RAYNAUD [8, V § 1, cor. 2]. D'autre part, en vertu de la proposition 1.3, il est équivalent de demander que $f_*(\mathcal{O}_Y)$ soit un module de type fini et une algèbre de présentation finie, et de demander que $f_*(\mathcal{O}_Y)$ soit un \mathcal{O}_X -module de présentation finie. Si de plus $f_*(\mathcal{O}_Y)$ est plat sur \mathcal{O}_X , on aura en tout point $x \in X$ un $\mathcal{O}_{X,x}$ -module plat et de présentation finie : un $\mathcal{O}_{X,x}$ -module libre. Et donc si $Y \xrightarrow{f} X$ est un revêtement étale, $f_*(\mathcal{O}_Y)$ est un \mathcal{O}_X -module localement libre de rang fini.

Proposition 1.6. *Soit \mathcal{A} une \mathcal{O}_X -algèbre quasi-cohérente. Pour que $Y = \text{Spec } \mathcal{A}$ soit un revêtement étale de X , il faut et il suffit que*

- (1) \mathcal{A} soit un \mathcal{O}_X -module localement libre de rang fini
- (2) pour tout point $x \in X$, l'anneau $\mathcal{A}_x \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} \kappa(x)$ soit une algèbre séparable sur $\kappa(x)$, savoir : un produit fini d'extensions finies séparables de $\kappa(x)$.

Démonstration. En effet, on vient de voir que si Y est un revêtement étale, \mathcal{A} vérifie (1) et (2) est l'expression de la netteté sur la fibre en x . Réciproquement, de (1) découle le caractère fini et plat de \mathcal{O}_Y ; reste la netteté qui se vérifie fibre par fibre au moyen de (2), voir RAYNAUD [8, III, Prop. 10]. \square

Remarquons que (1) n'a trait qu'à la structure de \mathcal{O}_X -module de \mathcal{A} , et que les exigences portant sur sa structure d'anneau ont été réduites à (2).

Proposition 1.7. *Soit X un schéma localement noethérien et supposons que pour tout x appartenant à un ensemble E dense dans X , $\kappa(x)$ soit algébriquement clos. Soit \mathcal{A} une \mathcal{O}_X -algèbre cohérente. Alors pour que $Y = \text{Spec } \mathcal{A}$ soit un revêtement étale de X , il faut et il suffit que $\widehat{\mathcal{A}}_x$ soit isomorphe à un produit fini de copies de $\widehat{\mathcal{O}}_{X,x}$ pour tout $x \in E$.*

Démonstration. En effet, $\widehat{\mathcal{O}}_{X,x}$ est hensélien et toute algèbre finie sur $\widehat{\mathcal{O}}_{X,x}$ est produit de ses composants locaux $\widehat{\mathcal{A}}_{y_i}$. De plus, pour que l'application f soit étale en y_i , il faut et il suffit que $\widehat{\mathcal{O}}_{X,x} \rightarrow \widehat{\mathcal{A}}_{y_i}$ soit un isomorphisme. L'assertion résulte alors de ce que la propriété d'être étale est une propriété ouverte. \square

2. ÉTUDE DU SCHEMA μ_n

2.1. Les schémas en groupes des racines de l'unité. Notons le groupe multiplicatif d'un anneau A par A^\times . Pour un groupe commutatif G le noyau de $x \mapsto x^n$ sera noté par G_n . Donc, $A_n^\times = \{x \in A \mid x^n = 1\}$ est le groupe des racines n -ième de l'unité dans A .

Définition 2.1. $\mu_n := \text{Spec } \mathbb{Z}[T]/(T^n - 1)$. μ_n est un schéma en groupes, car $\text{Hom}(\text{Spec } A, \mu_n) = \text{Hom}(\mathbb{Z}[T]/(T^n - 1), A)$, et un tel homomorphisme est déterminé par l'image de T , qui doit nécessairement être une racine n -ième de 1. Donc $\mu_n(A) = \text{Hom}(\text{Spec } A, \mu_n) = A_n^\times$.

Proposition 2.2. *Pour tout entier n , il existe un isomorphisme canonique*

$$\prod_{p|n} \mu_{p^{v_p(n)}} \xrightarrow{\sim} \mu_n$$

Démonstration. Pour tout anneau A , l'application

$$\prod_{p|n} A_{p^{v_p(n)}}^\times \longrightarrow A_n^\times$$

$$(a_p)_p \longmapsto \prod_p a_p$$

est un isomorphisme. Comme, pour tout schéma X , $\text{Hom}(X, \mu_n) \simeq \Gamma(X, \mathcal{O}_X)_n^\times$, on en déduit pour tout schéma X un isomorphisme canonique

$$\prod_{p|n} \text{Hom}(X, \mu_{p^{v_p(n)}}) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}(X, \mu_n)$$

et donc, par le lemme de YONEDA, un isomorphisme canonique

$$\prod_{p|n} \mu_{p^{v_p(n)}} \xrightarrow{\sim} \mu_n$$

□

Dans un corps K , un élément $\zeta \in K_n^\times = \mu_n(K)$ d'ordre n est appelé une racine *primitive* n -ième de l'unité. Dans ce cas l'ordre de ζ^k est $n/(n, k)$.

Définition 2.3. *Le n -ième polynôme cyclotomique est défini par*

$$\Phi_n(T) = \prod_{\substack{\zeta \in \mu_n(\mathbb{C}) \\ \text{primitive}}} (T - \zeta) = \prod_{\substack{k=1 \\ (k,n)=1}}^n (T - \zeta^k)$$

Remarque 2.1. Si $\varphi(n) := \text{card}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$, alors $\deg \Phi_n(T) = \varphi(n)$.

Comme $\varphi(n)$ est multiplicatif, si $(k, m) = 1$ on a $\deg \Phi_{km} = \deg \Phi_k \cdot \deg \Phi_m$.

Proposition 2.4.

- (1) $\Phi_n(T)$ est un polynôme unitaire à coefficients entiers.
- (2) $T^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d(T)$
- (3) Si $n = p^r m$, $p \nmid m$, $\prod_{d|m} \Phi_{dp^r}(T) = \Phi_{p^r}(T^m)$
- (4) Si $2 \nmid n$, $\Phi_{2n}(T) = \Phi_n(-T)$
- (5) Si $p \nmid n$, $\Phi_{pn}(T)\Phi_n(T) = \Phi_n(T^p)$, tandis que $\Phi_{pm}(T) = \Phi_n(T^p)$ si $p \mid n$.

Démonstration. (1) résulte du lemme de GAUSS.

(2) c'est évident ; (2) implique que $\sum_{d|n} \varphi(d) = n$.

(3) Le degré du membre de gauche est $\sum_{d|m} \varphi(dp^r) = (\sum_{d|m} \varphi(d))\varphi(p^r) = m\varphi(p^r)$, ce qui est le degré du membre de droite. Il suffit donc de démontrer que toute racine du membre de gauche est racine du membre de droite, ce qui est facile.

(4) et (5) sont clair. □

Voir aussi LANG, Algebra [7, VI, § 3 Roots of Unity].

Exemple 2.5.

$$\Phi_1(T) = T - 1, \quad \Phi_2(T) = T + 1, \quad \Phi_3(T) = T^2 + T + 1, \quad \Phi_4(T) = T^2 + 1$$

$$\Phi_p(T) = T^{p-1} + T^{p-2} + \dots + 1$$

$$\Phi_{p^r}(T) = T^{p^{r-1}(p-1)} + T^{p^{r-1}(p-2)} + \dots + 1 = \sum_{k=0}^{p-1} T^{p^{r-1}k} = \Phi_p(T^{p^{r-1}})$$

2.2. Les schémas cyclotomiques C_n . Pour étudier les morphismes $\mu_n \rightarrow \text{Spec } \mathbb{Z}$, ou les schémas en groupes $\mu_n/\text{Spec } \mathbb{Z}$, il est utile d'introduire les *schémas cyclotomiques*. La prop. 2.4, (1), montre que $\Phi_n(T) \in \mathbb{Z}[T]$, ce qui permet de faire la

Définition 2.6. *L'anneau des racines n -ième de l'unité est $Z_n = \mathbb{Z}[T]/\Phi_n(T)$ et son spectre $C_n = \text{Spec } Z_n = \text{Spec } \mathbb{Z}[T]/\Phi_n(T)$ s'appelle le n -ième schéma cyclotomique. La classe de T dans Z_n , $\zeta_n = T + (\Phi_n(T)) \in \mathbb{Z}[T]/\Phi_n(T) = Z_n$, joue le rôle de racine primitive n -ième typique.*

Lemme 2.7. *Pour $n = km$ avec $(k, m) = 1$ on a*

$$Z_k \otimes Z_m \xrightarrow{\sim} Z_n$$

Démonstration. On définit $Z_k \rightarrow Z_n$ par $\zeta_k \mapsto \zeta_n^m$, ce qui est bien défini, car l'ordre $\text{ord } \zeta_n^m = n/m = k$, d'où une application $u : Z_k \otimes Z_m \rightarrow Z_n$. Soit $a, b \in \mathbb{Z}$ tel que $am + bk = 1$, on a $u(\zeta_k^a \otimes \zeta_m^b) = \zeta_n^{am} \cdot \zeta_n^{bk} = \zeta_n$, et u est surjectif. Comme les deux algèbres sont des modules libres sur \mathbb{Z} de même rang $\varphi(k)\varphi(m) = \varphi(n)$, u est bijectif. \square

Proposition 2.8.

(1) *Il existe un morphisme canonique $\psi : \prod_{d|n} C_d \rightarrow \mu_n$. Le morphisme induit*

$$\prod_{d|n} C_d \times_{\text{Spec } \mathbb{Z}} \text{Spec } \mathbb{Z}[1/n] \xrightarrow{\sim} \mu_n \times_{\text{Spec } \mathbb{Z}} \text{Spec } \mathbb{Z}[1/n]$$

est un isomorphisme au-dessus de l'ouvert $n \neq 0$ de $\text{Spec } \mathbb{Z}$.

(2) *Il existe un isomorphisme canonique $C_n \xrightarrow{\sim} \prod_{p|n} C_{p^{v_p(n)}}$.*

Démonstration. (1) Comme $\Phi_d(T)|(T^n - 1)$ on a un homomorphisme canonique $\mathbb{Z}[T]/(T^n - 1) \rightarrow \mathbb{Z}[T]/\Phi_d(T)$, donc

$$\psi^* : \mathbb{Z}[T]/(T^n - 1) \rightarrow \prod_{d|n} \mathbb{Z}[T]/\Phi_d(T)$$

Au-dessus de $n \neq 0$, c'est-à-dire pour $(p) \in \text{Spec } \mathbb{Z}[1/n]$, on a la fibre

$$\psi^*(p) : \mathbb{F}_p[T]/(T^n - 1) \xrightarrow{\sim} \prod_{d|n} \mathbb{F}_p[T]/\Phi_d(T)$$

par le théorème des restes chinois, car les facteurs $\Phi_d(T)$ dans $T^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d(T)$ sont sans diviseurs communs, puisque $nT^{n-1} \neq 0$ dans $\mathbb{F}_p[T]$. Par NAKAYAMA (LANG [7, X, Prop. 4.5]):

$$\psi_p^* : \mathbb{Z}_{(p)}[T]/(T^n - 1) \xrightarrow{\sim} \prod_{d|n} \mathbb{Z}_{(p)}[T]/\Phi_d(T)$$

et par descente fidèlement plate [1, II, § 3, th. 1]

$$\psi^*[1/n] : \mathbb{Z}[1/n, T]/(T^n - 1) \xrightarrow{\sim} \prod_{d|n} \mathbb{Z}[1/n, T]/\Phi_d(T)$$

(2) Ça découle aussitôt du lemme 2.7. \square

2.3. Propriétés étales de C_n .

Proposition 2.9. *Les morphismes $C_n \rightarrow \text{Spec } \mathbb{Z}$ sont étales en $x \mapsto (p)$ ssi $p \nmid n$ ou $p = 2$ et $4 \nmid n$.*

Démonstration. Il suffit de vérifier la netteté sur les fibres $\mathbb{F}_p \rightarrow \mathbb{F}_p[T]/\Phi_n(T)$, et ceux-ci sont nets ssi $(\Phi_n(T), \Phi'_n(T)) = 1$ dans $\mathbb{F}_p[T]$, ce qui signifie que Φ_n ne possède que des racines distinctes.

\Leftarrow (suffisance)

Si $p \nmid n$, Φ_n a toutes ses racines distinctes. Si $p = 2$, $n = 2m$, $2 \nmid m$, on a $\Phi_n(T) = \Phi_m(-T)$ par prop. 2.4, (4), et il n'y a pas de racines multiples non plus.

\Rightarrow (nécessité)

D'autre part, supposons Φ_n sans racines multiples.

Soit $n = p^r m$, $p \nmid m$. Supposons d'abord $m = 1$, alors $\Phi_{p^r}(T) = (T^{p^r} - 1)/(T^{p^{r-1}} - 1)$ dans $\mathbb{Z}[T]$, donc $\Phi_{p^r}(T) = (T - 1)^{p^{r-1}(p-1)}$ dans $\mathbb{F}_p[T]$. Donc $p^{r-1}(p-1) = 1$ et on a $p = 2$ et $r = 1$.

Dans le cas m quelconque, pour $r = 1$ on a $\Phi_{pm}(T)\Phi_m(T) = \Phi_m(T^p)$ et dans $\mathbb{F}_p[T]$ ceci donne $\Phi_{pm}(T) = \Phi_m(T)^{p-1}$, donc $p-1 = 1$ est le seul cas sans racine multiple.

Soit maintenant $r > 1$ et montrons $\Phi'_n = 0$ par une récurrence sur m , avec comme hypothèse de récurrence $\Phi'_{tp^r} = 0$ si $t < m$.

Comme $\Phi'_{p^r} = p^{r-1}(p-1)(T-1)^{p^{r-1}(p-1)-1} = 0$ pour $r > 1$, la récurrence est déjà commencée avec $m = 1$. En dérivant l'équation (3) de prop. 2.4 on obtient

$$\sum_{d|m} \Phi'_{dp^r}(T) \prod_{t|m, t \neq d} \Phi_{tp^r}(T) = \Phi'_{mp^r}(T) \prod_{t|m, t \neq m} \Phi_{tp^r}(T) = 0$$

et donc $\Phi'_{mp^r} = 0$ dans $\mathbb{F}_p[T]$. \square

2.4. C_n est normal connexe.

Proposition 2.10. *Le schéma cyclotomique C_n est normal connexe.*

Corollaire 2.11. *C_n est irréductible, donc Φ_n est irréductible.*

Démonstration. C_n étant normal, tous ses anneaux locaux sont intègres, et un schéma connexe, dont les anneaux locaux sont intègres est irréductible. \square

Corollaire 2.12. *$Z_n = \mathbb{Z}[T]/\Phi_n(T)$ est l'anneau des entiers du corps de nombres $\mathbb{Q}[T]/\Phi_n(T)$.*

Démonstration. Résulte du fait que si tous les localisés d'un anneau sont normaux, l'anneau est normal. \square

Démonstration. (de la proposition 2.10)

Ecrivons $n = p^r m$, $p \nmid m$, et faisons une récurrence sur le nombre de facteurs premiers de n . Quitte à commencer la récurrence, nous pouvons supposer C_m et C_{p^r} normaux connexes. Les anneaux locaux ne se trouvant au-dessus de (p) sont étales sur ceux de C_m , et ceux qui se trouvent au-dessus de (p) sont étales sur celui (nous verrons plus tard qu'il n'y en a qu'un) qui se trouve au-dessus de (p) dans C_{p^r} , car ils sont obtenus par changement de base d'algèbres étales sur des anneaux locaux de $\text{Spec } \mathbb{Z}$, par la prop. 2.9. Donc, ils sont normaux [8, VII, Prop. 2].

Reste à commencer la récurrence, soit à démontrer que les anneaux locaux de C_{p^r} sont normaux. Ceux qui ne se trouvent pas au-dessus de (p) sont étales sur les anneaux locaux correspondant de $\text{Spec } \mathbb{Z}$, qui sont de la forme $\mathbb{Z}_{(\ell)}$, donc des anneaux de valuation discrète et normaux.

Au-dessus de (p) , il n'y a qu'un point, car la fibre est

$$\text{Spec } \mathbb{F}_p[T]/\Phi_{p^r}(T) = \text{Spec } \mathbb{F}_p[T]/(T-1)^{\varphi(p^r)}$$

qui n'a qu'un idéal premier engendré par $T-1$. Soit \mathfrak{p} l'unique idéal premier de $A = Z_{p^r}$ au-dessus de (p) . Nous allons démontrer que $A_{\mathfrak{p}}$ est un anneau de valuation discrète, en employant le critère [10, I, Prop. 2] qu'un anneau local dont l'idéal maximal est engendré par un élément non nilpotent est un anneau de valuation discrète.

Le candidat pour cet élément est $\zeta - 1$, où $\zeta = \zeta_{p^r} \in A$.

Lemme 2.13. $pA = (\zeta - 1)^{p^r - p^{r-1}}$

Démonstration. On a dans $A[X]$

$$\Phi_{p^r}(X) = \prod_{\substack{k=1 \\ (k,p)=1}}^{p^r} (X - \zeta^k) = \Phi_p(X^{p^{r-1}})$$

et $p = \Phi_p(1) = \Phi_{p^r}(1) = \prod_{(k,p)=1} (1 - \zeta^k)$ (voir les exemples 2.5). Comme

$$\frac{1 - \zeta^k}{1 - \zeta} = 1 + \zeta + \dots + \zeta^{k-1} \in A$$

et pour $(k, p) = 1$ il existe m tel que $km \equiv 1 \pmod{p^r}$, donc aussi

$$\frac{1 - \zeta}{1 - \zeta^k} = \frac{1 - \zeta^{km}}{1 - \zeta^k} = \frac{1 - \xi^m}{1 - \xi} \in A \quad \text{pour } \xi = \zeta^k$$

les $(1 - \zeta^k)/(1 - \zeta) \in A^\times$ sont des unités pour $(k, p) = 1$. Donc,

$$pA = \prod_{(k,p)=1} (1 - \zeta^k)A = (1 - \zeta)^{\varphi(p^r)}$$

□

Pour savoir que $A_{\mathfrak{p}}$ est un anneau de valuation discrète, il faut d'abord savoir que $\zeta - 1$ engendre un idéal maximal. Mais

$$A_{\mathfrak{p}}/(\zeta - 1) = \mathbb{F}_p[T]/(\Phi_{p^r}(T), T - 1) = \mathbb{F}_p[T]/((T - 1)^{\varphi(p^r)}, T - 1) = \mathbb{F}_p[T]/(T - 1)$$

est un corps, donc $\mathfrak{p} = (\zeta - 1)$.

Il faut aussi que $\zeta - 1$ ne soit pas nilpotent ce qui résulte du lemme.

C_n est connexe, car il est produit des $C_{p^{v_p(n)}}$; ceux-ci sont connexes. Pour le voir, supposons $C_{p^r} = X \cup Y$; l'application $C_{p^r} \rightarrow \text{Spec } \mathbb{Z}$ est fermée et ouverte (car finie resp. plat et localement de présentation finie), donc les images de X et Y sont des ouverts et fermé de $\text{Spec } \mathbb{Z}$. S'ils sont tous deux non vide, alors (p) est dans les deux images et $\mathfrak{p} \in X \cap Y$. □

2.5. Calcul de la différentielle et du discriminant de Z_n/\mathbb{Z} . Rappelons que l'idéal différentiel $\mathfrak{D}_{B/A}$ d'une extension monogène $B = A[X]/(f)$ est l'idéal engendré dans B par $f'(X)$ [10, III, Cor. 2 de Prop. 11]. L'idéal différentiel de Z_n/\mathbb{Z} est donc $\mathfrak{D}_{Z_n/\mathbb{Z}} = \Phi'_n(\zeta)Z_n$.

Proposition 2.14. $\mathfrak{D}_{Z_{p^r}/\mathbb{Z}} = \mathfrak{p}^{p^{r-1}(pr-r-1)}$, où $\mathfrak{p} = (\zeta - 1)$ est l'idéal premier au-dessus de p .

Démonstration. En dérivant la relation $\Phi_{p^r} \cdot (T^{p^{r-1}} - 1) = (T^{p^r} - 1)$, on obtient $\Phi'_{p^r} \cdot (T^{p^{r-1}} - 1) + \Phi_{p^r} \cdot p^{r-1}T^{p^{r-1}-1} = p^r T^{p^r-1}$ et, en y substituant une racine p^r -ième primitive ζ , il résulte que $\Phi'_{p^r}(\zeta) \cdot (\zeta^{p^{r-1}} - 1) = p^r \zeta^{p^r-1}$. On a donc

$$\delta(p^r) := \text{ord}_{\mathfrak{p}} \mathfrak{D}_{Z_{p^r}/\mathbb{Z}} = \text{ord}_{\mathfrak{p}}(p^r) - \text{ord}_{\mathfrak{p}}(\zeta^{p^{r-1}} - 1)$$

Pour évaluer le dernier terme on constate que

$$T^{p^{r-1}} - 1 = \prod_{k=1, p|k}^{p^r} (T - \zeta^k) = \prod_{k=1}^{p^{r-1}} (T - \zeta^{pk}),$$

donc

$$\zeta^{p^{r-1}} - 1 = \prod_{k=1}^{p^{r-1}} (\zeta - \zeta^{pk}) = (1 - \zeta)^{p^{r-1}} \cdot \prod_{k=1}^{p^{r-1}} \frac{\zeta - \zeta^{pk}}{1 - \zeta}$$

où le dernier produit est une unité, donc

$$\text{ord}_{\mathfrak{p}}(\zeta^{p^{r-1}} - 1) = p^{r-1}.$$

L'extension Z_{p^r}/\mathbb{Z} étant totalement ramifiée, l'indice de ramification $e_{\mathfrak{p}} = \text{ord}_{\mathfrak{p}}(p) = \varphi(p^r)$. Alors $\delta(p^r) = r\varphi(p^r) - p^{r-1} = r(p^r - p^{r-1}) - p^{r-1} = p^{r-1}(rp - r - 1)$. \square

Corollaire 2.15. Le discriminant de Z_{p^r} sur \mathbb{Z} est $\mathfrak{d}_{Z_{p^r}/\mathbb{Z}} = p^{p^{r-1}(pr-r-1)}$.

Démonstration. Par [10, III, Prop. 6] $\mathfrak{d}_{Z_{p^r}/\mathbb{Z}} = N(\mathfrak{D}_{Z_{p^r}/\mathbb{Z}})$ et $N(\mathfrak{p}) = p$. \square

2.6. Étude du schéma G_m ; morphisme de KUMMER.

Définition 2.16. Soit $G_m := \text{Spec } \mathbb{Z}[X, X^{-1}]$, le groupe multiplicatif. G_m est un schéma en groupes, car $\text{Hom}(\text{Spec } A, G_m) = \text{Hom}(\mathbb{Z}[X, X^{-1}], A) = A^\times$.

L'application $\varphi : \mathbb{Z}[X, X^{-1}] \rightarrow \mathbb{Z}[Y, Y^{-1}]$, définie par $\varphi(X) = Y^n$, induit un morphisme $\cdot^n : G_m \rightarrow G_m$, dit de KUMMER.

L'application induite sur $G_m(A) = A^\times$ est élevée à la puissance n -ième : $A^\times \rightarrow A^\times$, et la suite exacte de groupes $1 \rightarrow A_n^\times \rightarrow A^\times \xrightarrow{\cdot^n} A^\times$ donne une suite exacte de schémas en groupes

$$1 \rightarrow \mu_n \rightarrow G_m \xrightarrow{\cdot^n} G_m$$

Proposition 2.17. Soit S un schéma. L'application $G_m \times S \rightarrow G_m \times S$, induite par changement de base de \cdot^n , est étale ssi n est inversible sur S , i.e. si le morphisme canonique $S \rightarrow \text{Spec } \mathbb{Z}$ se factorise en $S \rightarrow \text{Spec } \mathbb{Z}[1/n] \hookrightarrow \text{Spec } \mathbb{Z}$.

Démonstration. Soient τ et ξ les images de T et X dans $\mathbb{Z}[X, X^{-1}][T]/(T^n - X)$. L'application $\psi : \mathbb{Z}[Y, Y^{-1}] \rightarrow \mathbb{Z}[X, X^{-1}][T]/(T^n - X)$ définie par $\psi(Y) = \tau$ est bien définie, car τ est inversible, en fait $\tau^{-1} = \xi^{-1}\tau^{n-1}$. ψ est un isomorphisme, car

l'application $\mathbb{Z}[X, X^{-1}][T]/(T^n - X) \rightarrow \mathbb{Z}[Y, Y^{-1}]$, définie par $\xi \mapsto Y^n$, $\tau \mapsto Y$, est son inverse. Le diagramme suivant commute:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}[Y, Y^{-1}] & \xrightarrow{\psi} & \mathbb{Z}[X, X^{-1}][T]/(T^n - X) \\ \varphi \uparrow & \nearrow & \\ \mathbb{Z}[X, X^{-1}] & & \end{array}$$

donc φ fait de $\mathbb{Z}[Y, Y^{-1}]$ une algèbre plate sur $\mathbb{Z}[X, X^{-1}]$.

La netteté se voit sur les fibres; soit donc $x \in \text{Spec } \mathbb{Z}[X, X^{-1}]$, de corps résiduel k , et soit α l'image de X dans k , $\alpha \neq 0$.

Si $x \mapsto (p) \in \text{Spec } \mathbb{Z}[1/n]$, alors $\text{char } k \nmid n$. Alors l'algèbre $k \rightarrow k[T]/(T^n - \alpha)$ est nette, comme $nT^{n-1} \neq 0$ et $(T^n - \alpha, nT^{n-1}) = 1$ dans $k[T]$.

Réciproquement, si n n'est pas inversible dans S , il existe un x de corps résiduel de $\text{char } k = p|n$. Alors $k \rightarrow k[T]/(T^n - \alpha)$ n'est pas net, car $nT^{n-1} = 0$. \square

2.7. Étude du schéma G_a ; morphisme d'ARTIN-SCHREIER.

Définition 2.18. Soit $G_a := \text{Spec } \mathbb{Z}[T]$, le groupe additif. G_a est un schéma en groupes, car $\text{Hom}(\text{Spec } A, G_a) = \text{Hom}(\mathbb{Z}[T], A) = A$. C'est même un schéma en anneaux.

L'application $\varphi : \mathbb{Z}[T] \rightarrow \mathbb{Z}[S]$, définie par $\varphi(T) = S^p - S$, p un nombre premier, induit un morphisme $\varphi : G_a \rightarrow G_a$, dit d'ARTIN-SCHREIER.

Proposition 2.19. Soit S un schéma de caractéristique p (i.e. tel que le morphisme canonique $S \rightarrow \text{Spec } \mathbb{Z}$ se factorise $S \rightarrow \text{Spec } \mathbb{F}_p \rightarrow \text{Spec } \mathbb{Z}$). Alors le morphisme $G_a \times S \xrightarrow{\varphi} G_a \times S$ est un homomorphisme étale de schémas en groupes.

Démonstration. Soient τ et ξ les images de T et X dans $\mathbb{Z}[T, X]/(X^p - X - T)$. L'application $\mathbb{Z}[S] \rightarrow \mathbb{Z}[T, X]/(X^p - X - T)$ définie par $\psi(S) = \xi$ est bien défini, et l'application $\mathbb{Z}[T, X]/(X^p - X - T) \rightarrow \mathbb{Z}[S]$, $\tau \mapsto S^p - S$, $\xi \mapsto S$ est son inverse. ψ est donc un isomorphisme, et le diagramme suivant commute:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}[S] & \xrightarrow{\psi} & \mathbb{Z}[T, X]/(X^p - X - T) \\ \varphi \uparrow & \nearrow & \\ \mathbb{Z}[T] & & \end{array}$$

φ fait donc de $\mathbb{Z}[S]$ une $\mathbb{Z}[T]$ algèbre plate.

La netteté se voit sur les fibres; soit donc $x \in G_a$, de corps résiduel k de caractéristique p , et soit α l'image de T dans k . Il suffit de voir que l'algèbre $k \rightarrow k[X]/(X^p - X - \alpha)$ est nette, mais $pX^{p-1} - 1 = -1$, et $(X^p - X - \alpha, -1) = 1$. \square

3. REVÊTEMENT TOPOLOGIQUES, ANALYTIQUES ET ALGÈBRIQUES

3.1. Rappel sur les revêtements topologiques. Soit X et Y deux espaces topologiques et $f : Y \rightarrow X$ une application continue, enfin soit y un point de Y .

- On dit que f est *étale en y* s'il existe des voisinages V de y et U de $f(y)$ tels que f soit un homéomorphisme de V sur U
- On dit que f est *étale* si f est étale en tout point $y \in Y$

- On dit que f est un *revêtement* si la topologie induite par Y sur $f^{-1}(x)$ est discrète quel que soit $x \in X$, et s'il existe un voisinage ouvert U de x et un homéomorphisme h qui rend le triangle ci-dessous commutatif:

$$\begin{array}{ccc} f^{-1}(U) & \xrightarrow{h} & f^{-1}(x) \times U \\ & \searrow f & \downarrow p_2 \\ & & U \end{array}$$

- On dit que f est *séparée* (ou que Y est séparé sur X) quand les propriétés équivalentes suivantes sont vérifiées:
 - (1) la diagonale du produit fibré $Y \times_X Y$ est fermée
 - (2) pour tout couple de points (y, y') distincts dans la même fibre, il existe des voisinages ouverts V de y et V' de y' tels que $V \cap V' = \emptyset$

En effet, affirmer (2), c'est dire que le complémentaire de la diagonale est ouvert.

Lemme 3.1. *Soit $f : Y \rightarrow X$ une application étale et séparée. Supposons que les fibres de f soient finies et que la fonction $x \mapsto \text{card } f^{-1}(x)$ soit localement constante. Alors f est un revêtement.*

Démonstration. Soit $x \in X$. La fonction $z \mapsto \text{card } f^{-1}(z)$ est constante sur un voisinage de x . Quitte à s'y restreindre on peut supposer que $\text{card } f^{-1}(z) = n$ pour tout $z \in X$. Posons $f^{-1}(x) = \{y_1, \dots, y_n\}$. Comme f est étale et séparée, il existe des voisinages ouverts disjoints V'_1, \dots, V'_n des y_i tels que $f(V'_i)$ soit ouvert et que $f|_{V'_i}$ soit un homéomorphisme.

Considérons $U = \bigcap_1^n f(V'_i)$. U est ouvert comme intersection finie d'ouverts et $V_i = V'_i \cap f^{-1}(U)$ l'est aussi pour la même raison. Et chaque V_i est homéomorphe à U par f .

Maintenant

$$f^{-1}(U) \supset \bigcup V_i$$

et même

$$f^{-1}(U) = \bigcup V_i$$

car au-dessus de tout $z \in U$, on compte autant de points dans $f^{-1}(z)$ que dans $f^{-1}(x)$, savoir n , et par hypothèse il y en a juste n . Enfin les V_i étant disjoints:

$$f^{-1}(U) = \coprod_{i \in f^{-1}(x)} V_i \simeq f^{-1}(x) \times U$$

□

Il faut noter que les revêtements étales algébriques ne sont pratiquement jamais des revêtements topologiques:

Proposition 3.2. *Soit Y un revêtement irréductible de degré n d'un schéma X de type fini sur un corps k algébriquement clos. Alors Y est un revêtement topologique si et seulement si $n = 1$.*

Démonstration. En effet, dire que $Y \rightarrow X$ est un revêtement topologique, c'est dire qu'il existe un ouvert U de X tel que, au-dessus de U , Y soit homéomorphe à $U \sqcup \dots \sqcup U$ (n fois). Y étant irréductible, deux ouverts quelconques de Y ne peuvent être disjoints et donc nécessairement $n = 1$. □

Cependant, pour les schémas de type fini sur \mathbb{C} , nous allons associer à un revêtement étale un revêtement topologique, mais en utilisant une topologie *différente* de la topologie de ZARISKI sur les spectres maximaux.

3.2. Revêtements étales analytiques. Soit U un ouvert de \mathbb{C}^n muni de la topologie usuelle et \mathcal{H} le faisceau des fonctions analytiques sur U . Soit \mathcal{J} un idéal de \mathcal{H} engendré par un nombre fini de sections. On définit un *ensemble analytique* comme suit:

$$V^h(\mathcal{J}) = \begin{cases} \text{comme ensemble \{zéros communs aux éléments de } \mathcal{J}\} \\ \text{comme topologie, celle induite par } U \\ \text{comme faisceau structural } \mathcal{H}/\mathcal{J} \end{cases}$$

Un espace topologique X annelé en anneaux locaux est appelé *espace analytique* s'il est localement isomorphe à des ensembles $V^h(\mathcal{J})$.

Un morphisme d'espaces analytiques $Y \rightarrow X$ est un morphisme d'espaces topologiques annelés en anneaux locaux, savoir

- une application continue $f : Y_{top} \rightarrow X_{top}$
- un homomorphisme d'anneaux $f^* : \mathcal{H}_X \rightarrow \mathcal{H}_Y$ local sur les fibres

Définition 3.3.

- (1) Un morphisme $Y \xrightarrow{f} X$ est étale en $y \in Y$ s'il existe des voisinages ouverts V de y et U de $f(y)$ tels que f soit un isomorphisme d'espaces analytiques de V sur U .
- (2) f est un revêtement analytique s'il est un revêtement topologique et s'il est étale en tout point $y \in Y$.

Considérons alors une flèche $Y \xrightarrow{f} X$ où

- Y est un espace topologique
- f est un revêtement topologique
- X est un espace analytique

Alors, il existe sur Y une structure d'espace analytique, à un unique isomorphisme près, et un unique morphisme f_{an} d'espaces analytiques dont l'application continue sous-jacente soit f tels que $f_{an} : Y_{an} \rightarrow X$ soit un revêtement analytique.

En effet, on met sur Y le faisceau $f^*(\mathcal{H}_X)$ et l'application continue f induit bien un morphisme d'espaces analytiques qui soit un isomorphisme local.

3.3. Revêtements étales algébriques et revêtements étales analytiques. Si A est une \mathbb{C} -algèbre de type fini, et si $\{x_1, \dots, x_n\}$ est un système de générateurs de A sur \mathbb{C} , alors A est canoniquement isomorphe à $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]/I$ où I est l'idéal des relations. Il est alors possible d'associer à A :

- d'une part le schéma $\text{Spec } A$
- d'autre part l'ensemble analytique $V^h(I)$
- enfin, il existe un morphisme: $\Psi_A : V^h(I) \rightarrow \text{Spec } A$ d'espaces annelés en anneaux locaux qui est défini par $(a_1, \dots, a_n) \mapsto (X_1 - a_1, \dots, X_n - a_n)$ qui est une injection continue et dont l'image est l'ensemble des points fermés de $\text{Spec } A$.

SERRE a généralisé cette correspondance, voir G.A.G.A. [11, Vol. I, 32.]. Rappelons des résultats y ayant trait:

Il existe un foncteur $X \mapsto X^h$ unique, à isomorphisme unique près, de la catégorie des schémas de type fini sur \mathbb{C} dans celle des espaces analytiques, et un morphisme fonctoriel d'espaces annelés $\Phi_X : X^h \rightarrow X$ tels que:

- (1) $(\text{Spec } \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]/I)^h = V^h(I)$ et $\Phi_{\text{Spec } \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]/I} = \Psi_{\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]/I}$
- (2) Il transforme immersions ouvertes en immersions ouvertes.
- (3) Il transforme produits fibrés en produits fibrés.
- (4) Φ_X est une injection continue, et son image est l'ensemble des points fermés de X .
- (5) Pour tout $x \in X^h$, $\Phi_{X^h, x}^* : \mathcal{O}_{X, \Phi(x)} \longrightarrow \mathcal{H}_{X^h, x}$ induit un isomorphisme sur les anneaux locaux complétés.

De plus, immersions fermées sont transformé en immersions fermées ; et si \mathcal{J} est un idéal de \mathcal{O}_X , $V(\mathcal{J})$ le fermé de X qui lui correspond, $\Phi^*(\mathcal{J})$ l'image réciproque de \mathcal{J} dans \mathcal{H}_{X^h} , alors

$$(V(\mathcal{J}))^h = V^h(\Phi^*(\mathcal{J}))$$

Revenons maintenant aux revêtements étales.

Proposition 3.4. *Soient X et Y de type fini sur \mathbb{C} , $f : Y \rightarrow X$, f^h le morphisme (analytique) qui lui correspond par le foncteur de G.A.G.A. Enfin y un point fermé de Y . Alors on a*

- (1) f est étale en $y \iff f^h$ est étale en y
- (2) f est un revêtement étale (algébrique) $\iff f^h$ est un revêtement étale (analytique).

Démonstration. Démontrons (1).

\Leftarrow Si f^h est un isomorphisme au voisinage de y , f_y^{h*} est un isomorphisme, l'application induite sur les complétés aussi. D'après (5), l'application

$$\hat{f}_y^* : \hat{\mathcal{O}}_{X, f(y)} \longrightarrow \hat{\mathcal{O}}_{Y, y}$$

est donc aussi un isomorphisme. X et Y étant de type fini sur \mathbb{C} cette condition est suffisante pour que f soit étale en y .

\implies Supposons f étale en y . On peut se limiter à un voisinage affine de $f(y)$, et dans l'image réciproque de ce voisinage on peut se restreindre à un voisinage affine de y . On est ainsi ramené au cas $\text{Spec } B \rightarrow \text{Spec } A$ où B est étale sur A , et A de type fini sur \mathbb{C} est isomorphe à $\mathbb{C}[Z_1, \dots, Z_p]/I$.

Quitte à restreindre encore les ouverts affines, B étale sur A est isomorphe à une algèbre étale standard ([8, II, Prop. 8]) :

$$(A[T]/(F(T)))_{F'(T)}$$

où $F(T)$ est un polynôme unitaire à coefficients dans A . En relevant les coefficients de F dans $\mathbb{C}[Z_1, \dots, Z_p]$, on obtient un polynôme G unitaire qui donne F par réduction modulo I .

On a un carré commutatif et cartésien :

$$\begin{array}{ccc} \text{Spec } (A[T]/(F(T)))_{F'(T)} & \hookrightarrow & \text{Spec } \mathbb{C}[Z_1, \dots, Z_p][T]/(G(T))_{G'(T)} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Spec } A & \hookrightarrow & \text{Spec } \mathbb{C}[Z_1, \dots, Z_p] \end{array}$$

où les flèches verticales sont étales. Si on passe aux analytisés au moyen du foncteur h de G.A.G.A., le carré reste cartésien et on obtient pour la flèche de droite la restriction de la projection naturelle $\mathbb{C}^{p+1} \rightarrow \mathbb{C}^p$ à l'espace analytique

$$Y = \{(z_1, \dots, z_{p+1}) \in \mathbb{C}^{p+1}; G(z_1, \dots, z_{p+1}) = 0, \partial G / \partial z_{p+1}(z_1, \dots, z_{p+1}) \neq 0\}$$

$$\begin{array}{c} (z_1, \dots, z_{p+1}) \in Y \\ \downarrow \\ (z_1, \dots, z_p) \in \mathbb{C}^p \end{array}$$

Et cette flèche est localement inversible par le théorème des fonctions implicites. Elle est donc étale et par suite f^h est étale.

Démontrons (2).

$\implies Y \rightarrow X$ étant étale, $Y^h \xrightarrow{f^h} X^h$ l'est aussi d'après (1). De plus Δ_Y étant fermée pour la topologie de ZARISKI dans $Y \times Y$, elle est aussi fermée pour la topologie usuelle qui est plus fine, et Y^h est séparé sur X^h . Si l'on montre que le cardinal des fibres est localement constant, le résultat s'en suivra par le lemme 3.1.

$$\begin{array}{ccc} f^{-1}(x) \subset & \longrightarrow & Y \\ \downarrow & & \downarrow f \\ \text{Spec } \kappa(x) \subset & \longrightarrow & X \end{array}$$

Or $\text{card } f^{-1}(x) = \deg(f_* \mathcal{O}_Y)_x \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} \kappa(x) : \kappa(x)$, cette dimension est localement constante dans la topologie de ZARISKI. Φ_Y étant une *injection* continue, elle est aussi localement constant sur X^h , d'où le résultat.

$\Leftarrow Y^h \rightarrow X^h$ étant étale, donc par (1) f est étale en tout point fermé $y \in Y$. Or les points fermés de Y sont dense dans Y , et l'ensemble des points où f est étale est un ouvert : c'est donc tout Y entier.

Reste à montrer que f est fini. On sait que le nombre de points de $f^{-1}(x)$ est localement constant. Montrons maintenant que f est séparé, c'est-à-dire que la diagonale de $Y \times_X Y$ est fermée. On sait déjà qu'elle est localement fermée. Le résultat vient alors du lemme suivant :

Lemme 3.5. *Soit Δ un sous-schéma localement fermé de Z . Alors l'adhérence de Δ^h pour la topologie fine est égale des points fermés de $\overline{\Delta}$, adhérence de Δ pour la topologie de ZARISKI.*

En effet, s'il en est ainsi Δ est un ouvert de $\overline{\Delta}$ et donc $\overline{\Delta} - \Delta$ est un fermé de Z qui ne contient aucun point fermé : il est donc vide et $\Delta = \overline{\Delta}$. \square

Démonstration. (du lemme) Nous allons montrer ce lemme en trois étapes :

(1) Le résultat est local sur Z .

En effet, si U_i est un recouvrement ouvert de Z , et si $\overline{\Delta}^h \cap U_i$ est égale à l'ensemble des points fermés de $\overline{\Delta} \cap U_i$, le lemme sera manifestement vrai. Or, pour les deux topologies, l'intersection $\overline{\Delta} \cap U_i$ est égale à l'adhérence dans U_i de $\Delta \cap U_i$. Par ailleurs, Z étant de type fini sur \mathbb{C} , un point $z \in Z$ est fermé dans Z si et seulement si il est fermé dans un voisinage ouvert de lui-même, en particulier dans les U_i . Nous pouvons donc supposer Z affine et irréductible.

(2) Δ étant localement fermé est l'intersection d'un fermé F et d'un ouvert U . Si F a des composantes irréductibles F_i , on peut ramener l'étude de l'adhérence de $F \cap U$ à celle des $F_i \cap U$. En effet, si $F = F_1 \cup F_2$, alors

$$\begin{aligned} F \cap U &= (F_1 \cap U) \cup (F_2 \cap U) \\ \text{et } \overline{F \cap U} &= (\overline{F_1 \cap U}) \cup (\overline{F_2 \cap U}) \end{aligned}$$

pour les deux topologies. Nous sommes ainsi ramenés à F fermé irréductible dans Z , affine. Autrement dit, si A est l'anneau des sections de Z ,

$$A = \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]/(f_1, \dots, f_p)$$

$$F = \text{Spec } A/\mathfrak{p} = \text{Spec } \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]/(f_1, \dots, f_p, g_1, \dots, g_q)$$

où \mathfrak{p} est un idéal premier.

Ainsi F est un schéma de type fini sur \mathbb{C} , irréductible. Et $U \cap F = V$ est un ouvert de ZARISKI non vide de F .

On sait qu'alors V est partout dense pour la topologie de ZARISKI. Montrons que l'ensemble des points fermés de V est partout dense pour la topologie fine.

- (3) Soit I le \mathcal{O}_F -idéal définissant G , complémentaire de V . I s'injecte dans \mathcal{J} le \mathcal{H}_F -idéal définissant G^h . Appelons x un point de G . Dire que x n'appartient pas à l'adhérence de V , c'est dire qu'il existe un voisinage (pour la topologie fine) de x dans lequel \mathcal{J} est nul, et en particulier $\mathcal{J}_x = 0$. Alors $I_x = 0$ et donc I est nul dans un voisinage (de ZARISKI) de x , ce qui est impossible puisque V est partout dense pour la topologie de ZARISKI.

□

Enonçons maintenant un résultat analogue à celui du lemme 3.1 topologique :

Lemme 3.6. *Soient X et Y deux schémas de type fini sur un corps k et soit $f : Y \rightarrow X$ un morphisme étale, séparé et vérifiant pour tout $x \in X$*

$$\sum_{y \in f^{-1}(x)} [\kappa(y) : \kappa(x)] = n$$

Alors f est un revêtement étale de degré n .

Démonstration. Y étant quasi-fini sur X se plonge par une immersion ouverte dans un schéma Y' fini sur X , voir RAYNAUD [8, IV, Cor. 2 de Th. 1], ZARISKI main theorem.

Nous allons voir que Y est aussi fermé dans Y' , après changement de base fidèlement plat.

$$\begin{array}{ccc} Y \subset & \xrightarrow{\quad} & Y' \\ & \searrow f & \swarrow f' \text{ finie} \\ & X & \\ & \downarrow & \\ & \text{Spec } k & \end{array}$$

Commençons par le changement de base produit par $\text{Spec } k' \rightarrow \text{Spec } k$ où k' est algébriquement clos ; ou simplement supposons k algébriquement clos. Effectuons le changement de base :

$$\coprod_{\substack{x \in X \\ \text{fermé}}} \text{Spec } \tilde{\mathcal{O}}_{X,x} \longrightarrow X$$

qui est surjectif et plat, car le *hensélisé* $\tilde{\mathcal{O}}_{X,x}$ est fidèlement plat sur $\mathcal{O}_{X,x}$ [8, VIII, Th. 3]. Au-dessus de l'ouvert $\text{Spec } \tilde{\mathcal{O}}_{X,x}$, Y' qui est finie, se décompose en produit de composants locaux B_{η_i} . Et parmi les points au-dessus de x , il y en a n qui appartiennent à $Y : y_1, \dots, y_n$. En notant \tilde{Y}_x le schéma déduit de Y par changement de base, au-dessus de $\text{Spec } \tilde{\mathcal{O}}_{X,x}$, on a : $\tilde{Y}_x = \text{Spec } \prod_{i=1}^n B_{\eta_i}$.

En effet, \tilde{Y}_x est ouvert dans \tilde{Y}'_x et contient donc avec y_i un voisinage ouvert de y_i dans \tilde{Y}'_x ; comme f est séparé, on peut choisir ces voisinages distincts et ce sont alors les $\text{Spec } B_{\eta_i}$: on a ainsi

$$\tilde{Y}_x \supset \coprod_{i=1}^n \text{Spec } B_{\eta_i}$$

et même

$$\tilde{Y}_x = \coprod_{i=1}^n \text{Spec } B_{\eta_i}$$

puisque au-dessus de tout $z \in \text{Spec } \tilde{\mathcal{O}}_{X,x}$, on compte n points dans \tilde{Y}_x et n points dans $\coprod_i \text{Spec } B_{\eta_i}$.

Donc \tilde{Y}_x est fermé dans \tilde{Y}'_x , et ce résultat est vrai au-dessus de voisinages de tous les points fermés de $\coprod \text{Spec } \tilde{\mathcal{O}}_{X,x}$ et le résultat est démontré. \square

Citons pour finir, sans démonstration, un *théorème d'existence* de GRAUERT et REMMERT, qui résulte facilement de G.A.G.A. dans le cas *projectif*.

Théorème 3.7. *Soit X un schéma de type fini sur \mathbb{C} , et soit Z un revêtement étale analytique de X^h . Alors il existe un revêtement étale algébrique Y de X tel que Z soit isomorphe à Y^h .*

4. REVÊTEMENTS EVENTUELLEMENT RAMIFIÉ DES COURBES

4.1. Différentielles sur les courbes.

Définition 4.1. *Soit k un corps (non nécessairement algébriquement clos). Une courbe régulière X/k est un schéma de type fini sur k réduit et irréductible, de dimension 1, et dont les anneaux locaux aux points fermés sont des anneaux de valuation discrète. X/k est lisse si pour tout $x \in X$, $\dim_{k(x)} \Omega_X(x) = 1$.*

Remarque 4.1. On a *lisse* \implies *régulier*, la réciproque étant vrai sur un corps k parfait.

Définition 4.2. *Soient X et Y deux courbes lisses sur k , de corps de fonctions rationnelles K et L respectivement. Un morphisme $g : Y \rightarrow X$ sera dit dominant séparable si l'image par g du point générique de Y est le point générique de X et si l'extension L/K induite par g au point générique est finie et séparable.*

Remarque 4.2. Il est clair que si g est un revêtement étale, même ramifié en un nombre fini de points, g est dominant séparable.

L'importance des morphismes dominants séparables proviendra du fait qu'ils permettent d'affirmer qu'une certaine suite est exacte. Pour la construire rappelons que pour tout anneau A , et pour tout morphisme $\varphi : B \rightarrow C$ de A -algèbres, il y a une suite exacte canonique

$$(1) \quad \Omega_{B/A} \otimes_B C \rightarrow \Omega_{C/A} \rightarrow \Omega_{C/B} \rightarrow 0$$

Dans la catégorie des schémas, pour tout morphisme $X \rightarrow S$, il existe un \mathcal{O}_X -module $\Omega_{X/S}$, le *module des différentielles relatives*, tel que en tout point $x \in X$, si $x \mapsto s$,

$$(\Omega_{X/S})_x \xrightarrow{\sim} \Omega_{\mathcal{O}_{X,x}/\mathcal{O}_{S,s}}$$

A la suite ci-dessus, il correspond, pour tout morphisme $g : Y \rightarrow X$ de S -schémas, une suite de \mathcal{O}_X -modules

$$g^*(\Omega_{X/S}) \rightarrow \Omega_{Y/S} \rightarrow \Omega_{Y/X} \rightarrow 0$$

Proposition 4.3. *Soient X et Y des courbes lisses, et $g : Y \rightarrow X$ un morphisme dominant séparable. Alors la suite*

$$(2) \quad 0 \rightarrow g^*(\Omega_{X/k}) \rightarrow \Omega_{Y/k} \rightarrow \Omega_{Y/X} \rightarrow 0$$

de \mathcal{O}_Y -modules est exacte.

Démonstration. Par les rappels ci-dessus, il suffit de vérifier l'injectivité de l'application $g^*(\Omega_{X/k}) \rightarrow \Omega_{Y/k}$, et bien sûr ceci se voit sur les fibres. Considérons d'abord le point générique. Là, l'application sur les anneaux est $\Omega_{K/k} \otimes_K L \rightarrow \Omega_{L/k}$, et comme L est fini et séparable sur K , donc étale, le lemme suivant est applicable.

Lemme 4.4. *Soit A un anneau, et $\varphi : B \rightarrow C$ un morphisme de A -algèbres, qui fasse de C une B -algèbre étale. Alors le morphisme canonique $\Omega_{B/A} \otimes_B C \rightarrow \Omega_{C/A}$ est un isomorphisme.*

Démonstration. Comme le lemme est de nature local on peut supposer C de forme B -algèbre étale standard, i.e. $C \simeq (B[X]/(f))_g$, où $f, g \in B[X]$ et l'image de f' inversible dans C [8, II, Prop. 8].

Soit M un C -module. Démontrons que l'application $\text{Der}_A(C, M) \rightarrow \text{Der}_A(B, \varphi_*M)$, définie par $D \mapsto D \circ \varphi$, est un isomorphisme, en construisant une application réciproque. Soit donc $\delta : B \rightarrow \varphi_*M$ une A -dérivation, il s'agit de démontrer que l'on peut l'étendre de manière unique à C . Pour voir ceci, il suffit de voir qu'il y a une manière unique de définir $\delta(x)$, où x est l'image de X dans C . Or comme $f(x) = 0$, $0 = \delta(f(x)) = f'(x)\delta(x) + \sum_{i=0}^n \delta(b_i)x^i$, où $f = \sum_{i=0}^n b_i X^i$. Donc, comme $f'(x)$ est inversible, $\delta(x) = -(f'(x))^{-1} \sum_{i=0}^n \delta(b_i)x^i$.

Le lemme suit maintenant de la suite d'isomorphismes canoniques

$$\begin{aligned} \text{Hom}_C(\Omega_{C/A}, M) &\simeq \text{Der}_A(C, M) \simeq \text{Der}_A(B, \varphi_*M) \simeq \text{Hom}_B(\Omega_{B/A}, \varphi_*M) \simeq \\ &\simeq \text{Hom}_C(\Omega_{B/A} \otimes_B C, M) \end{aligned}$$

□

Pour démontrer l'exactitude de la suite (2) aux points fermés, il faut calculer le module des différentielles relatives aux points fermés.

Lemme 4.5. *Soit k un corps, et A un anneau de valuation discrète sur k , d'uniformisante π . Supposons que A soit localisé d'une algèbre de type fini sur k et que le corps résiduel de A soit k . Alors $\Omega_{A/k}$ est un A -module libre de rang 1, engendré par $d\pi$.*

Démonstration. Démontrons d'abord que $\Omega_{A/k}$ est monogène, engendré par $d\pi$. Soit $M = A d\pi$ le sous-module de $\Omega_{A/k}$ engendré par $d\pi$. $\Omega_{A/k}$ étant de type fini comme A -module, on peut employer le lemme de NAKAYAMA, et il suffit de démontrer $\Omega_{A/k} = (\pi)\Omega_{A/k} + M$.

Soit donc $x \in A$, si x n'est pas inversible, il existe α inversible et $n > 0$ tels que $x = \alpha\pi^n$, et alors $d(x) = d(\alpha\pi^n) = n\alpha\pi^{n-1}d\pi + \pi^n d\alpha \in M + (\pi)\Omega_{A/k}$. Si x est inversible, soit \bar{x} l'image de x dans $A/(\pi) \simeq k$; $x - \bar{x}$ n'est pas inversible, et $d(x) = d(x - \bar{x})$; on est donc ramené au cas précédent.

Considérons maintenant l'application $\varphi : A \rightarrow \Omega_{A/k}$ définie par $\varphi(x) = x d\pi$. Nous venons de démontrer que φ est surjectif, démontrons qu'il est injectif. Soit $x \in \text{Ker } \varphi$, et écrivons $x = \alpha\pi^n$ avec α inversible, ce qui est possible si $x \neq 0$. Il existe alors $m > n$ tel que $m+1$ est inversible dans k , et $0 = \pi^m d\pi = d(\frac{\pi^{m+1}}{m+1})$.

Donc $\pi^{m+1} \in \text{Ker } d$. Ceci signifie que pour tout A -module M et pour toute k -dérivation $D : A \rightarrow M$, $D(\pi^{m+1}) = 0$. Mais si l'on prend $M = \widehat{A} \simeq k[[\pi]]$, et $D(\sum_{i=0}^{\infty} a_i \pi^i) = \sum_{i=1}^{\infty} i a_i \pi^{i-1}$, alors $D(\pi^{m+1}) = (m+1)\pi^m \neq 0$. \square

Terminons maintenant la démonstration de la proposition 4.3. Soit $y \in Y$ un point fermé, $x = g(y)$, et pour simplifier la notation écrivons $B = \mathcal{O}_{Y,y}$, $A = \mathcal{O}_{X,x}$. g induit une application $\Omega_{A/k} \otimes_A B \rightarrow \Omega_{B/k}$. Soit I son noyau. Comme L est plat sur B , la suite suivante est exacte :

$$0 \rightarrow I \otimes_B L \rightarrow \Omega_{A/k} \otimes_A L \rightarrow \Omega_{B/k} \otimes_B L$$

Mais $\Omega_{A/k} \otimes_A L \simeq \Omega_{K/k} \otimes_K L$ et $\Omega_{B/k} \otimes_B L \simeq \Omega_{L/k}$ et donc, par le lemme 4.4, $I \otimes_B L = 0$. Par le lemme 4.5, I est un sous-module d'un module libre sur un anneau principal, donc libre, et $I \otimes_B L = 0 \implies I = 0$. C'est ce qu'il fallait démontrer. \square

4.2. Rappels sur le théorème de RIEMANN-ROCH et sur la ramification.

Soit X une courbe lisse propre sur k de corps de fonctions rationnelles K , alors k est le corps des constants (c'est-à-dire qu'il est algébriquement clos dans K). Notons $|X|$ l'ensemble des points fermés de X . Un *diviseur* est une application $D : |X| \rightarrow \mathbb{Z}$ avec $D(x) = 0$ sauf pour un nombre fini de points. Rappelons qu'il existe une application de l'ensemble des diviseurs sur X sur l'ensemble des sous-faisceaux *invertibles* du faisceau constant K_X sur X , que nous noterons $D \mapsto \mathcal{O}_X(D)$, qui induit un isomorphisme du groupe des classes de diviseurs sur le groupe des classes d'isomorphisme de faisceaux invertibles.

Pour un diviseur D le *degré* est $\deg D = \sum_{x \in X} D(x) \deg(x)$, où $\deg(x) = [k(x) : k]$ est le *degré d'un point fermé* sur le corps de base. Si \mathcal{L} est un faisceau invertible, $\deg \mathcal{L} = \deg D$, où D est un diviseur tel que $\mathcal{O}_X(D) \simeq \mathcal{L}$.

Pour tout faisceau cohérent \mathcal{F} sur X , les $H^i(X, \mathcal{F})$ sont des espaces vectoriels de dimension finie sur k et $H^i(X, \mathcal{F}) = 0$ pour $i > 1$. Nous définissons $h^i(\mathcal{F}) = \dim_k H^i(X, \mathcal{F})$ et $\chi(\mathcal{F}) = \dim_k H^0(X, \mathcal{F}) - \dim_k H^1(X, \mathcal{F}) = h^0(\mathcal{F}) - h^1(\mathcal{F})$.

Théorème 4.6 (RIEMANN-ROCH). *Soit X comme ci-dessus, de genre $g_X = h^1(\mathcal{O}_X)$, et \mathcal{L} un faisceau invertible sur X . Alors*

- (1) $\chi(\mathcal{L}) = \deg \mathcal{L} + 1 - g_X$
- (2) *Il existe une dualité canonique*

$$H^1(X, \mathcal{L}) \otimes_k H^0(X, \Omega_X \otimes \mathcal{L}^\vee) \rightarrow k$$

En particulier, $h^1(\mathcal{L}) = h^0(\Omega_X \otimes \mathcal{L}^\vee)$ où $\mathcal{L}^\vee = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{L}, \mathcal{O}_X)$.

Corollaire 4.7.

- (1) $\chi(\mathcal{L}) = -\chi(\Omega_X \otimes \mathcal{L}^\vee)$
- (2) $\chi(\Omega_X) = -\chi(\mathcal{O}_X) = g_X - 1$
- (3) $\deg(\Omega_X) = \chi(\Omega_X) - 1 + g_X = 2g_X - 2$

Soient X et Y deux courbes lisses sur k , de corps de fonctions rationnelles K et L respectivement, et $g : Y \rightarrow X$ un morphisme dominant séparable.

Soient $y \in Y$, $x = g(y) \in X$, d'anneaux locaux $\mathcal{O}_{X,x} \subset \mathcal{O}_{Y,y}$ d'extension résiduel $k(y)/k(x)$, et soit π une *uniformisante* locale de $\mathcal{O}_{X,x}$.

Définition 4.8. *L'indice de ramification de g en y est*

$$e(y) := \text{ord}_y(\pi), \quad \text{où } \text{ord}_y \text{ est la valuation de } \mathcal{O}_{Y,y}$$

Le degré résiduel de g en y est

$$f(y) := [k(y) : k(x)]$$

Proposition 4.9. Soient $g : Y \rightarrow X$, L/K comme ci-dessus, et soit g de degré $n = [L : K]$. Alors pour tout point fermé $x \in X$

$$\sum_{y \in g^{-1}(x)} e(y)f(y) = n$$

Démonstration. C'est une formule classique, voir [10, I, Prop. 10]. \square

Corollaire 4.10. Pour tout faisceau inversible \mathcal{L} sur X , $\deg g^*\mathcal{L} = n \deg \mathcal{L}$.

Démonstration. Soit D un diviseur sur X et soit g^*D le diviseur sur Y qui est défini par $\mathcal{O}_Y(g^*(D)) = g^*(\mathcal{O}_X(D))$, donc $g^*(D)(y) = e(y)D(g(y))$. Son degré est alors

$$\deg g^*(D) = \sum_y e(y)D(g(y)) \deg(y) = \sum_x \sum_{y \in g^{-1}(x)} e(y)f(y)D(x) \deg(x) = n \deg D$$

car $\deg(y) = f(y) \deg(x)$. \square

4.3. Formule de HURWITZ. Soient X et Y deux courbes sur k , $g : Y \rightarrow X$ un morphisme dominant séparable, et $y \in Y$.

Définition 4.11. g est dit modérément ramifié en y si $p \nmid e(y)$ et $k(y)/k(g(y))$ est séparable. g est dit modérément ramifié s'il est modérément ramifié partout.

Remarque 4.3. Si k est de caractéristique zéro, tout morphisme est modérément ramifié.

Théorème 4.12 (HURWITZ). Soient X et Y des courbes propres lisses sur k , de genres g_X et g_Y respectivement, et $g : Y \rightarrow X$ un morphisme dominant séparable de degré n . Alors

$$(3) \quad 2g_Y - 2 = n(2g_X - 2) + \sum_{y \in Y} \dim_k(\Omega_{Y/X})_y$$

Si g est modérément ramifié en y , $\dim_k \Omega_{Y/X,y} = \deg(y)(e(y) - 1)$.

Remarque 4.4. La somme a un sens car $\Omega_{Y/X,y} = 0$ sauf pour un nombre fini de points $y \in Y$, comme nous allons le voir dans un instant. Également, $e(y) = 1$ sauf pour un nombre fini de points.

Démonstration. La suite exacte de cohomologie appliquée à la suite exacte (2) de la proposition 4.3 donne

$$\chi(\Omega_Y) = \chi(g^*(\Omega_X)) + \chi(\Omega_{Y/X})$$

L'ensemble des points y où g est étale est ouvert, et comme $\Omega_{L/K} = 0$, Y est étale sur X au point générique, et cet ensemble est non-vide. Son complémentaire est donc un ensemble fini R de points fermés, et $\Omega_{Y/X}$, qui a son support sur cet ensemble, est donc flasque. Donc $H^1(Y, \Omega_{Y/X}) = 0$ et $\chi(\Omega_{Y/X}) = h^0(\Omega_{Y/X}) = \sum_{y \in R} \dim_k \Omega_{Y/X,y}$. En appliquant le théorème de RIEMANN-ROCH, nous trouvons

$$\deg \Omega_Y = \deg g^*\Omega_X + \sum_{y \in Y} \dim_k \Omega_{Y/X,y}$$

Les corollaires 4.7 et 4.10 nous montrent que c'est bien la formule de HURWITZ (3).

Supposons maintenant que g soit modérément ramifié en y . Alors, $\Omega_{Y/X,y} = \Omega_{B/A}$ où $A = \mathcal{O}_{X,x}$, $B = \mathcal{O}_{Y,y}$. Les conditions de [10, III, Prop. 12] étant remplies, on conclut que B est monogène $B = A[t] \simeq A[T]/(f)$, donc $\Omega_{B/A} \simeq Bdt/(df) \simeq B/(f'(t))$. Enfin, la différentielle dans notre cas est [10, III, Prop. 13] : $\mathfrak{D}_{B/A} = f'(t)B = \mathfrak{m}^{e-1}$, où $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}(B)$ est l'idéal maximale et e l'indice de ramification

de B sur A . Le théorème est alors démontré, car on a la formule $\dim_k B/\mathfrak{m}^n = [B/\mathfrak{m} : k] \cdot n$. \square

5. π_1 PAR LACETS ET π_1 ÉTALE

5.1. La catégorie des revêtements étales topologiques.

Proposition 5.1. *Soit $f : Y \rightarrow X$ une application continue d'espaces topologiques. Pour que f soit un revêtement étale localement fini (sur X), il faut et il suffit que f soit étale, séparé et propre.*

Si X est connexe, ces conditions sont nécessaires et suffisantes pour que f soit un revêtement fini.

Démonstration. Si f est un revêtement localement fini, f est clairement étale, séparé et propre.

Réciproquement, soit x un point de X . La fibre $f^{-1}(x)$ est compacte, car f est propre et séparé, et discrète, car f est étale; c'est donc un ensemble fini de points $f^{-1}(x) = \{y_1, \dots, y_n\}$. Comme f est séparé, pour tout couple de points (y_i, y_j) il existe des voisinages ouverts V_{ij} de y_i tel que $V_{ij} \cap V_{ji} = \emptyset$. Posons $V_i = \bigcap_{j \neq i} V_{ij}$, voisinage ouvert de y_i , tel que pour $i \neq j$ on a $V_i \cap V_j = \emptyset$. Comme f est étale, il est possible de restreindre les V_i de façon que f soit un homéomorphisme de V_i sur son image. $Y - \bigcup V_i$ est un fermé qui ne contient pas $f^{-1}(x)$, donc $f(Y - \bigcup V_i)$ est un fermé qui ne contient pas x , donc $U = X - f(Y - \bigcup V_i)$ est un voisinage ouvert de x . On a alors

$$f^{-1}(U) \subset \bigcup V_i$$

Posons $W_i = V_i \cap f^{-1}(U)$, alors $f|_{W_i} : W_i \xrightarrow{\sim} U$ et

$$f^{-1}(U) = \bigsqcup W_i \text{ réunion disjointe.}$$

On a bien un homéomorphisme au-dessus de U

$$\begin{array}{ccc} f^{-1}(U) & \xrightarrow{\sim} & f^{-1}(x) \times U \\ & \searrow f & \downarrow p_2 \\ & & U \end{array}$$

Si X est connexe, le cardinal de la fibre est constant et f est fini. \square

Théorème 5.2. *Soient X un espace topologique connexe et x un point de X . Notons $\text{Rev}(X)$ la catégorie des revêtements finis de X . Soit F le foncteur de $\text{Rev}(X)$ dans Sets qui à tout revêtement fini Y de X associe la fibre $f^{-1}(x)$.*

Alors $\text{Rev}(X)$ est une catégorie galoisienne, et F est un foncteur fibre, voir [4, V].

Dégageons d'abord quelques propriétés de stabilité des revêtements.

Lemme 5.3.

- (1) *La propriété pour une application continue d'être un revêtement (resp. un revêtement fini) est stable par changement de base.*
- (2) *Soit $h : X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ un triangle commutatif d'applications continues*
 - (a) *Si f et g sont des revêtements finis, alors h est un revêtement fini.*
 - (b) *Si g et h sont des revêtements finis (resp. des revêtements et si X est localement connexe), alors f est un revêtement fini (resp. un revêtement).*

(c) Si f est un revêtement surjectif et si h est un revêtement fini, alors g est un revêtement fini.

Démonstration. Pour démontrer (1), soient $f : Y \rightarrow X$ un revêtement, $f' : Y' \rightarrow X'$ l'application correspondant à f par le changement de base continu $g : X' \rightarrow X$, x' un point de X' , x son image par g , enfin U un voisinage de x tel que $f^{-1}(U)$ soit homéomorphe à $f^{-1}(x) \times U$. Alors le carré commutatif ci-dessous est cartésien

$$\begin{array}{ccc} f^{-1}(x) \times U' & \longrightarrow & f^{-1}(x) \times U \\ \downarrow & & \downarrow \\ U' & \xrightarrow{g} & U \end{array}$$

et par suite

- $f'^{-1}(U')$ est homéomorphe à $f^{-1}(x) \times U'$ au-dessus de U' ,
- $f'^{-1}(x')$ est homéomorphe à $f^{-1}(x) \times \{x'\}$, c'est-à-dire à $f^{-1}(x)$, cqfd.

Montrons (2). L'assertion (2a) est vraie parce qu'une somme finie d'ensembles discrets est un ensemble discret.

Pour (2b) supposons d'abord que h et g soient des revêtements finis. Comme g et h sont étales, f l'est aussi, et il est séparé sinon h ne saurait l'être. Soit $z \in Z$, W un voisinage de z au-dessus duquel les revêtements g et h sont triviaux, y_1, \dots, y_p les points de Y au-dessus de z , V_i les voisinages correspondants homéomorphes à W , x_1, \dots, x_n les points de X au-dessus de z et U_i les voisinages correspondants. Si l'image réciproque par f de y_1 est $\{x_1, \dots, x_q\}$, les ouverts U_1, \dots, U_q sont homéomorphes par f à V_1 et donc

$$\forall y' \in V_1 \quad \text{card } f^{-1}(y') \geq q$$

Mais comme autant vaut pour y_2, \dots, y_p , et que la somme de ces cardinaux vaut n , ils sont constants et f est un revêtement. Si maintenant g et h sont des revêtements et si X est localement connexe, Z l'est aussi car h est étale. Le voisinage W peut alors être choisi connexe et chacune des composantes connexes de $h^{-1}(W)$ (resp. $g^{-1}(W)$) est homéomorphe à W . Le diagramme

$$\begin{array}{ccc} h^{-1}(z) \times W & \xrightarrow{f|_{h^{-1}(z)} \times id} & g^{-1}(z) \times W \\ \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq \\ h^{-1}(W) & \xrightarrow{f} & g^{-1}(W) \\ & \searrow h & \swarrow g \\ & & W \end{array}$$

est commutatif et il est alors clair que f est un revêtement trivial au-dessus d'une composante connexe de $g^{-1}(W)$.

Montrons enfin (2c). Le morphisme g est étale car $g \circ f$ et f le sont. Le composé $g \circ f$ étant propre et f étant surjectif, g est propre ; reste à voir que g est séparé. Mais la diagonale de $Y \times_Z Y$ est l'image de celle de $X \times_Z X$ par $f \times f$ qui est fermé car f est propre. Or h est séparé et la diagonale de $X \times_Z X$ est fermée, d'où le résultat. \square

Démontrons maintenant le théorème 5.2.

Démonstration. (G1) $\text{Revf}(X)$ contient l'objet final $id : X \rightarrow X$. Montrons qu'elle contient les produits fibrés. Soient Y, Z, T trois revêtements finis de X , et des morphismes de revêtements $Y \rightarrow T$ et $Z \rightarrow T$. Posons $P = Y \times_T Z$ et vérifions que P est un revêtement fini de X .

$$\begin{array}{ccc}
 P & \longrightarrow & Z \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 Y & \longrightarrow & T \\
 & \searrow & \searrow \\
 & & X
 \end{array}$$

Les flèches $Z \rightarrow T$ et $Y \rightarrow T$ sont des revêtements finis par Lemme 5.3, (2b). Les flèches $P \rightarrow Y$ et $P \rightarrow Z$ sont alors des revêtements finis par le lemme 5.3, (1). D'après le lemme 5.3 (2a), la flèche composé $P \rightarrow Y \rightarrow T \rightarrow X$ est alors un revêtement fini.

(G2) Les sommes finies existent clairement dans $\text{Revf}(X)$. Montrons que les quotients par les groupes finis existent aussi. Soit Y un revêtement fini de X et G un groupe fini de X -automorphismes de Y . Considérons la factorisation de f

$$\begin{array}{ccc}
 Y & \xrightarrow{f} & X \\
 p \downarrow & \nearrow \bar{f} & \\
 Y/G & &
 \end{array}$$

La flèche p est surjectif et étale. Elle est propre puisque l'orbite $p^{-1}(\bar{y}) = Gy$ est fini, donc quasi-compact. Elle est séparé, car f est séparé. Elle est donc un revêtement fini, et d'après le lemme 5.3, (2c), \bar{f} est un revêtement fini.

(G3) Soient $f : Y \rightarrow X$ et $g : Z \rightarrow X$ deux revêtements et $h : Y \rightarrow Z$ un X -morphisme. Notons T l'image de h et considérons le diagramme

$$\begin{array}{ccccc}
 Y & \longrightarrow & T & \longrightarrow & Z \\
 \searrow f & & \downarrow k & & \nearrow g \\
 & & X & &
 \end{array}$$

D'après le lemme 5.3, h est un revêtement, et d'après la proposition 5.1

- h est étale, donc T ouvert
- h est propre, donc T fermé

L'application k , restriction de g à une partie ouvert et fermé de Z est un revêtement fini. Le complémentaire S de T dans Z est aussi ouvert et fermé et donc $Z = T \sqcup S$. Si h est un monomorphisme, T est isomorphe à Y et (G3) est bien vérifié.

(G4) et (G5) sont clairs.

(G6) Reprenons la situation de (G3) et supposons que $h_x : f^{-1}(x) \xrightarrow{\sim} g^{-1}(x)$ soit un isomorphisme. D'après le lemme 5.3, h est un revêtement fini. Son degré est constant sur chaque composante connexe de Z . Le revêtement g étant étale et propre, l'image par g d'une composante connexe de Z est un ouvert fermé de X et c'est donc X tout entier. Si donc $z \in Z$, la composante connexe de z passe au moins un point de $g^{-1}(x)$ et le degré de h en z est égal au degré de h en ce point, à savoir 1, et par suite, h est un isomorphisme. \square

Il est ainsi possible d'attacher à tout espace topologique connexe non vide un groupe topologique $\pi_1(X, x)$ opérant continuellement sur les revêtements étales de X .

5.2. Le groupe des lacets.

Lemme 5.4. *Soit X un espace topologique réunion de deux ouverts connexes U_1 et U_2 tels que $U_1 \cap U_2$ soit connexe. Alors un revêtement trivial sur les U_i est trivial sur X .*

Démonstration. En effet, si U est un ouvert connexe de X au-dessus duquel le revêtement $Y \xrightarrow{f} X$ est trivial, $f^{-1}(U)$ est somme d'ouverts homéomorphe à U , donc connexes, ouverts et disjoints. Ce sont donc les composantes connexes de $f^{-1}(U)$. Si $x \in U$, l'homéomorphisme $f^{-1}(U) \xrightarrow{\sim} f^{-1}(x) \times U$ est canonique : à tout point de $f^{-1}(U)$ on fait correspondre d'une part l'intersection de sa composante connexe avec $f^{-1}(x)$, et d'autre part son image par f . Choisissons donc $x \in U_1 \cap U_2$. Il s'ensuit une trivialisations canonique du revêtement au-dessus de U_1 et une autre au-dessus de U_2 ; comme $U_1 \cap U_2$ est aussi connexe, ces deux trivialisations coïncident au-dessus de $U_1 \cap U_2$, et par suite elles constituent une trivialisations au-dessus de la réunion. \square

Dans la suite du chapitre, nous noterons I l'intervalle fermé $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ pourvu de la topologie induite.

Lemme 5.5. *Tout revêtement de I ou de I^2 est trivial.*

Démonstration. Cas de I .

Soit f un revêtement de I . A chaque point x attachons un intervalle ouvert U_x au-dessus duquel f est trivial. Les U_x forment un recouvrement ouvert de I dont on peut extraire un sous-recouvrement fini U_{x_1}, \dots, U_{x_n} ($x_1 < \dots < x_n$). L'intersection de U_{x_1} et de U_{x_2} est connexe et f est donc trivial au-dessus de $U_{x_1} \cup U_{x_2}$. On applique ainsi le lemme 5.4 $n - 1$ fois pour conclure que le revêtement f est trivial au-dessus de I .

Cas de I^2 .

Soit f un revêtement de I^2 , et soit x un point quelconque de I . A tout point $(x, y) \in \{x\} \times I$ attachons un pavé ouvert $]x - \varepsilon_y, x + \varepsilon_y[\times V_y$ au-dessus duquel f est trivial. Les V_y forment un recouvrement ouvert de I dont on peut extraire un sous-recouvrement fini V_1, \dots, V_n correspondant au points $y_1 < \dots < y_n$. Posons

$$U_x = \bigcap_{i=1}^n]x - \varepsilon_{y_i}, x + \varepsilon_{y_i}[.$$

L'intersection $U_x \times V_1$ et de $U_x \times V_2$ est connexe et f est un revêtement trivial au-dessus de chacun d'eux. Le même raisonnement qu'au cas I montre que f est trivial au-dessus de $U_x \times I$. On recommence le raisonnement sur les abscisses pour conclure que le revêtement f est trivial au-dessus de $I \times I$. \square

Définition 5.6. *Un chemin dans un espace topologique X est une application continue $\varphi : I \rightarrow X$. $\varphi(0)$ en est l'origine, $\varphi(1)$ en est l'extrémité. Les chemins dont l'origine égale l'extrémité sont appelés des lacets.*

Définition 5.7. *Deux applications $f_1, f_2 : Y \rightarrow X$ continues sont dites homotopes s'il existe une application continue $Y \times I \xrightarrow{g} X$ telle que $f_1 = g|Y \times \{0\}$ et $f_2 = g|Y \times \{1\}$. On dit aussi que g est une homotopie reliant f_1 à f_2 .*

Proposition 5.8. *Soit $f : Y \rightarrow X$ un revêtement étale. Pour tout chemin φ dans X d'origine x , il existe un unique chemin ψ dans Y d'origine donnée $y \in f^{-1}(x)$ tel que $\varphi = f \circ \psi$.*

Pour toute homotopie g reliant deux chemins φ_1 et φ_2 et tout point $y \in f^{-1}(\varphi_1(0))$, il existe une unique application continue $h : I \times I \rightarrow Y$ telle que $h(0,0) = y$ et que $g = f \circ h$.

On dit que les revêtements possèdent la propriété de *relèvement unique des chemins et des homotopies*.

Démonstration. Le revêtement Y_I obtenu par le changement de base φ est trivial. Soit y_I l'unique point de Y_I au-dessus de 0 et de y . Il existe une unique section

$$\begin{array}{ccc} Y_I & \xrightarrow{\iota} & Y \\ \sigma \downarrow & \nearrow \psi & \downarrow f \\ I & \xrightarrow{\varphi} & X \end{array}$$

$\sigma : I \rightarrow Y_I$ telle que $\sigma(0) = y_I$. Alors $\psi = \iota \circ \sigma$.

Le même raisonnement s'applique au changement de base g et on obtient la deuxième partie de la proposition. \square

Il est facile de vérifier que la relation *f_1 et f_2 sont homotopes* est une relation d'équivalence dans l'ensemble des chemins dans X . Soit maintenant x un point de X . L'ensemble des lacets d'origine et d'extrémité x , modulo la relation d'équivalence qu'est l'homotopie peut être muni d'une structure de groupe. Le composé de deux lacets L_1 et L_2 est leur succession. Plus précisément, soient $\varphi_1, \varphi_2 : I \rightarrow X$ deux lacets d'origine et d'extrémité x . Alors $\varphi_2 * \varphi_1$ est défini par

$$\varphi_2 * \varphi_1(t) = \begin{cases} \varphi_1(2t) & 0 \leq t \leq 1/2 \\ \varphi_2(2t-1) & 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

On vérifie que $(\varphi_1 * \varphi_2) * \varphi_3$ est homotope à $\varphi_1 * (\varphi_2 * \varphi_3)$ et que $\varphi^{-1}(t) = \varphi(1-t)$ est bien l'inverse modulo homotopie.

Le groupe ainsi obtenu s'appelle *groupe fondamental des lacets*, noté $\pi_1^\ell(X, x)$. Il opère sur le foncteur fibre F . En effet, donnons nous un revêtement $Y \xrightarrow{f} X$ et soit L un élément de $\pi_1^\ell(X, x)$, de représentant φ . Pour tout $y \in f^{-1}(x)$, il existe un unique relèvement de φ d'origine y et d'extrémité $z \in f^{-1}(x)$. Si g est une homotopie reliant φ et φ' , et h son unique relèvement, $h|_{\{1\} \times I}$ est une application continue de I dans l'espace discret $f^{-1}(0)$; elle est donc constante et les relèvements de φ et φ' ont même extrémité z . On pose

$$z = L(y).$$

L'unicité du relèvement d'un lacet entraîne que $L_1 * L_2(y) = L_1(L_2(y))$. Enfin il est clair que cet automorphisme est fonctoriel en Y . Il s'ensuit un homomorphisme de groupes

$$\pi_1^\ell(X, x) \rightarrow \text{Aut}(F)$$

Si on se limite aux revêtements finis, on note $\pi_1(X, x)$ le groupe $\text{Aut}(F|\text{Revf}(X))$ et on a de la même façon un morphisme $\alpha : \pi_1^\ell(X, x) \rightarrow \pi_1(X, x)$.

Proposition 5.9. *Si X est un espace topologique non vide, connexe et localement connexe par arcs, et si $x \in X$, alors l'image de l'homomorphisme $\alpha : \pi_1^\ell(X, x) \rightarrow \pi_1(X, x)$ est partout dense dans $\pi_1(X, x)$.*

Démonstration. La définition de la topologie sur $\pi_1(X, x)$ entraîne l'équivalence des propositions suivantes :

- (1) $\text{Im } \alpha$ est partout dense.

- (2) Pour tout quotient fini G de $\pi_1(X, x)$, le morphisme composé de α et de la surjection canonique $\pi_1(X, x) \rightarrow G$ est surjectif.

La démonstration est laissée au lecteur. Montrons donc que α est surjectif sur les quotients fini de π_1 . Soit $f : Y \rightarrow X$ un revêtement étale galoisien de X de groupe d'automorphismes P . Soient G le quotient de π_1 opérant sur la fibre en x , et g un élément de G .

Y étant localement homéomorphe à X est localement connexe par arcs ; étant galoisien, il est aussi connexe et il est donc connexe par arcs comme on le voit en considérant la composante connexe d'un de ses points.

Un point y étant alors donné dans la fibre de x , il existe un chemin ψ d'origine y et d'extrémité $g(y)$. Le chemin $\varphi = f \circ \psi$ est donc un lacet de X d'origine x dont l'unique relèvement est ψ . Si L est la classe d'homotopie de φ , on a

$$L(y) = g(y).$$

Maintenant Y est un P -ensemble, et il en est de même de $f^{-1}(x)$. Les éléments de G sont des automorphismes de P -ensemble. Par conséquent, si L et g coïncident en y , ils coïncident sur l'orbite suivant P de y , c'est-à-dire sur toute la fibre. \square

Définition 5.10. *On dit que X est semi-localement simplement connexe quand, pour tout point $x \in X$, il existe un voisinage V de x tel que le morphisme $\pi_1^\ell(V, x) \rightarrow \pi_1^\ell(X, x)$ soit nul.*

De façon plus concrète, tout lacet d'origine x contenu dans V est homotope, dans X , au lacet constant.

Proposition 5.11. *Soit X un espace topologique connexe, localement connexe par arcs et semi-localement simplement connexe. Soit U un sous-groupe d'indice fini de $\pi_1^\ell(X, x)$. Il existe un revêtement connexe $Y \xrightarrow{f} X$ tel que $\pi_1^\ell(X, x)$ opère transitivement sur $f^{-1}(x)$, et un point $y \in f^{-1}(x)$ dont le stabilisateur soit U .*

Démonstration. Soient $z \in X$ et φ_1, φ_2 deux chemins d'origine x et d'extrémité z . Alors $\varphi_1^{-1} * \varphi_2$ est un lacet d'origine x . Nous dirons que φ_1 et φ_2 sont équivalents modulo U quand la classe d'homotopie de $\varphi_1^{-1} * \varphi_2$ appartient à U .

Considérons maintenant l'ensemble $Y = \{(z, c) \mid z \in X, c \text{ est une classe modulo } U \text{ de chemins d'origine } x \text{ et d'extrémité } z\}$. Il existe une application $f : Y \rightarrow X$ définie par $(z, c) \mapsto z$. Nous allons définir sur Y une topologie pour laquelle f sera un revêtement étale. Soient $t = (z, c)$ un point de Y , et V un voisinage de z dans X tel que $\pi_1^\ell(V, z) \rightarrow \pi_1^\ell(X, z)$ soit nul. Posons

$$V_t = \{(z', c') \mid z' \in V, \exists b \in \pi_1^\ell(V, z) \text{ tel que } c' = c * b\}$$

La restriction de $f : V_t \rightarrow V$ est clairement surjective. Elle est aussi injective, car si (z, c_1) et (z, c_2) appartiennent à V_t , soient $c_1 = c * b_1, c_2 = c * b_2$ donc

$$c_1^{-1} * c_2 = b_1^{-1} * c^{-1} * c * b_2 = b_1^{-1} * b_2$$

et, dans X , le lacet $b_1^{-1} * b_2$ est homotope à zéro. Ces ensembles V_t vérifient les axiomes des voisinages et définissent sur Y une topologie pour laquelle f est un homéomorphisme local. D'autre part Y est séparé sur X , les voisinages $V_{(z,c)}$ et $V_{(z,c')}$ étant ou disjoints ou confondus. Enfin X étant connexe par arcs, la fibre en tout point a pour cardinal celui de $\pi_1^\ell(X, x)/U$. On a ainsi fait de Y un revêtement étale de X , sur lequel opère $\pi_1^\ell(X, x)$. Le stabilisateur de $y = (x, 0)$ est bien U . Reste à montrer que Y est connexe. Or si (z, c) et (z', c') appartiennent à Y , alors $c' * c^{-1}$

est une classe de chemins d'origine z et d'extrémité z' et il existe une homotopie reliant c à c' définie comme suit

$$h(s, t) = \begin{cases} \varphi(\sup\{0, t - 2s\}) & 0 \leq s \leq 1/2 \\ \varphi'(\sup\{0, t - 2 + 2s\}) & 1/2 \leq s \leq 1 \end{cases}$$

où φ et φ' sont des représentants de c et c' . Cela montre que Y est connexe par arcs. \square

Corollaire 5.12. *Avec les mêmes hypothèses sur X que dans la proposition 5.11, le noyau du morphisme $\pi_1^\ell(X, x) \rightarrow \pi_1(X, x)$ est l'intersection des sous-groupes d'indice fini de $\pi_1^\ell(X, x)$.*

Démonstration. En effet, si $Y \rightarrow X$ est un revêtement fini, le stabilisateur d'un point de la fibre en x est un sous-groupe de $\pi_1^\ell(X, x)$ d'indice fini. Réciproquement, on vient de voir qu'à tout sous-groupe U d'indice fini on peut associer un revêtement connexe Y de X tel que le stabilisateur d'un point y de la fibre en x soit précisément le sous-groupe U . \square

Dans ces conditions, en appelant U' le stabilisateur de y dans $\pi_1(X, x)$, l'homomorphisme α induit un isomorphisme

$$\pi_1^\ell(X, x)/U \xrightarrow{\sim} \pi_1(X, x)/U'$$

et on déduit alors de la proposition 5.11 et du corollaire ci-dessus le

Théorème 5.13. *Si X est un espace topologique connexe, localement connexe par arcs et semi-localement simplement connexe, et si $x \in X$, alors $\pi_1(X, x)$ est isomorphe au séparé complété de $\pi_1^\ell(X, x)$ pour la topologie des sous-groupes d'indice fini.*

On a même un résultat pour les revêtements non nécessairement finis.

Théorème 5.14. *Avec les mêmes hypothèses sur X que dans le théorème 5.13, la catégorie $\text{Rev}(X)$ des revêtements de X est équivalente à la catégorie des $\pi_1^\ell(X, x)$ -ensembles.*

Démonstration. En effet, à tout revêtement de X , on peut faire correspondre fonctoriellement le $\pi_1^\ell(X, x)$ -ensemble $f^{-1}(x)$ et le foncteur réciproque est donné par la construction de la proposition 5.11. \square

Mais parmi les $\pi_1^\ell(X, x)$ -ensembles figure $\pi_1^\ell(X, x)$ lui-même. Il lui correspond par cette construction un revêtement $\tilde{X} \rightarrow X$ appelé le *revêtement universel* de X . Comme un espace homogène sous $\pi_1^\ell(X, x)$ dans la catégorie des $\pi_1^\ell(X, x)$ -ensembles est isomorphe à un quotient de $\pi_1^\ell(X, x)$, tout revêtement connexe de X est isomorphe à un quotient de \tilde{X} .

Proposition 5.15. *Avec les hypothèses et les notations précédentes, \tilde{X} est simplement connexe, c'est-à-dire de façons équivalentes:*

- (1) $\pi_1^\ell(\tilde{X}, x) = 0$
- (2) \tilde{X} ne possède pas de revêtement non trivial.

Démonstration. Voyons le au moyen de (1).

Un point de \tilde{X} correspond à une classe d'homotopie, à extrémités constantes, de chemins de X d'origine x . Un lacet de \tilde{X} correspond à une application

$$\begin{aligned} \varphi : I \times I &\longrightarrow X \\ (m, t) &\longmapsto \varphi_m(t) \end{aligned}$$

telle que φ_0 et φ_1 soient les chemins constants x et que, pour tout m , $\varphi_m(0) = x$. Il est clair que l'application définie par

$$\varphi_{m,h}(t) = \begin{cases} x & t \leq h \\ \varphi_m(t-h) & t \geq h \end{cases}$$

est une homotopie du lacet $\varphi_m(t)$ dans le lacet constant x . □

6. THÉORÈMES FONDAMENTAUX SUR LE π_1 ÉTALE

6.1. Invariance du groupe fondamental par morphisme radiciel. Rappelons que dire qu'un morphisme $f : X' \rightarrow X$ est *radiciel*, c'est dire qu'au-dessus de chaque point de X , il y a au plus un point de X' , et que les extensions résiduelles sont inséparables. On vérifie alors que par tout changement de base $Y \rightarrow X$, un morphisme $f : X' \rightarrow X$ qui est fini, radiciel et surjectif, induit un homéomorphisme $Y' \rightarrow Y$ des espaces sous-jacents. Un morphisme fini, radiciel et surjectif est donc un homéomorphisme *universel*.

Théorème 6.1. *Soit $f : X' \rightarrow X$ un morphisme de schémas connexes, fini, radiciel et surjectif. Soit a' un point géométrique de X' , $a = fa'$ le point correspondant de X . Alors la flèche naturelle : $\pi_1(X', a') \rightarrow \pi_1(X, a)$ est un isomorphisme de groupes de GALOIS.*

Démonstration. Nous allons montrer que les catégories de revêtements sur X et X' sont équivalentes. En fait on peut prouver plus. Soit $\mathcal{E}(X)$ la catégorie des schémas étales séparés sur X . La catégorie des revêtements de X (schémas finis étales sur X) en est une sous-catégorie pleine. Alors le foncteur

$$f^* : \mathcal{E}(X) \longrightarrow \mathcal{E}(X')$$

est une équivalence de catégories (ce qui implique qu'il en est de même pour sa « restriction » aux sous-catégories pleines des revêtements).

6.1.1. *f^* est pleinement fidèle.* Si on se borne aux revêtements, d'après le dictionnaire galoisien, il suffit de voir qu'un revêtement connexe de X se transforme en un revêtement connexe de X' , ce qui est immédiat puisque f est un homéomorphisme universel.

Plus généralement, soit Z_1 et Z_2 deux objets de $\mathcal{E}(X)$, Z'_1 et Z'_2 les transformés dans $\mathcal{E}(X')$. Pour démontrer la pleine fidélité, il faut par définition montrer que $\text{Hom}_X(Z_1, Z_2) \simeq \text{Hom}_{X'}(Z'_1, Z'_2)$. On remarque alors que les morphismes $Z_1 \xrightarrow{h} Z_2$ sont en bijection avec les sections $\sigma : Z_1 \rightarrow Z_1 \times_X Z_2$

$$\begin{array}{ccc} Z_1 \times_X Z_2 & \longrightarrow & Z_2 \\ \sigma \uparrow \downarrow & \nearrow h & \downarrow \\ Z_1 & \longrightarrow & X \end{array}$$

On voit qu'en définitive il est nécessaire et suffisant de montrer que si Z est un schéma étale séparé sur X , $Z' = f^*Z$, pour les sections

$$\Gamma(Z/X) \simeq \Gamma(Z'/X')$$

(l'isomorphisme voulu s'en déduisant par changement de base).

Lemme 6.2. *Soit $p : Z \rightarrow X$ étale, séparé. Les sections de p sont en correspondance biunivoque avec les parties ouvertes X_i de Z telles que $p|_{X_i}$ induise un homéomorphisme de X_i sur X et radiciel.*

Démonstration. Si σ est une section, le lecteur vérifiera que $\sigma(X)$ correspond bien à la description des parties du lemme : $p|_{\sigma(X)}$ est radiciel, car les extensions résiduelles sont partout triviales.

Inversement, étant donné X_i comme dans le lemme, montrons que $p|_{X_i}$ est en fait un isomorphisme, ce qui prouvera l'existence d'une section σ définie par l'inverse de $p|_{X_i}$, avec $\sigma(X) = X_i$. On est dans la situation $g : Y \rightarrow X$, avec g étale, bijectif à extensions résiduelles triviales. Par changement de base fidèlement plat, on se ramène à la situation sur $\text{Spec } \tilde{\mathcal{O}}_{X,x}$, où $\tilde{\mathcal{O}}_{X,x}$ est l'hensélisé de l'anneau local en x :

$$\begin{array}{ccccc} \tilde{U} & \longrightarrow & \tilde{Y} & \longrightarrow & Y \\ & \searrow & \downarrow \tilde{g} & & \downarrow g \\ & & \text{Spec}(\tilde{\mathcal{O}}_{X,x}) & \longrightarrow & X \end{array}$$

\tilde{g} est alors quasi-fini et séparé, et il existe donc un plus grand ouvert \tilde{U} de \tilde{Y} qui soit fini sur $\text{Spec}(\tilde{\mathcal{O}}_{X,x})$ [8, VII, Prop. 3]. On a donc un revêtement de degré 1 puisque les extensions sont triviales. C'est donc un isomorphisme : $\tilde{U} \xrightarrow{\sim} \text{Spec}(\tilde{\mathcal{O}}_{X,x})$. Mais comme \tilde{U} est un ouvert de \tilde{Y} qui est lui-même homéomorphe à $\text{Spec}(\tilde{\mathcal{O}}_{X,x})$ c'est que $\tilde{U} = \tilde{Y}$, et \tilde{g} est un isomorphisme. \square

Pour appliquer ce lemme, il reste à voir que la propriété qui caractérise les X_i est invariante par le changement de base f (ce qui est clair) et que toute partie X'_j possédant sur X' la propriété provient d'une partie X_j (ce qui établira la correspondance biunivoque). $X'_j \subset Z'$ et Z' est homéomorphe à Z par le morphisme déduit de f . Soit X_j la partie de Z correspondant à X'_j par cet homéomorphisme. X_j est bien un ouvert de Z . Il est clair également que $p|_{X_j}$ est homéomorphe à X . Enfin : $X'_j \rightarrow X_j$ est radiciel (par changement de base), $X'_j \rightarrow X$ l'est (par composition)

$$\begin{array}{ccc} X'_j & \longrightarrow & X_j \\ \downarrow & \searrow & \downarrow \\ X' & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

donc $p|_{X_j}$ est radiciel. X_j vérifie la propriété sur X . Les parties (X_i) et (X'_i) sont donc en correspondance biunivoque, d'où l'isomorphisme pour les sections.

6.1.2. *f^* est essentiellement surjectif.* Nous supposons acquis le fait suivant : les schémas étales séparés sur X se descendent par *descente fidèlement plate*. Si on se borne aux revêtements, on sait qu'ils sont définis par la donnée de modules localement libres. On est ramené à un problème de descente de modules par descente fidèlement plate [9, Th. 4.4.1].

Montrons en effet qu'il suffit de résoudre le problème après extension fidèlement plate. On a un schéma Z' étale sur X' , séparé, qu'on cherche à descendre en un

schéma Z sur X :

$$\begin{array}{ccc} Z' & \cdots\cdots & Z \\ \downarrow & & \downarrow \\ X' & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

Supposons le problème résolu après une extension fidèlement plate $g : Y \rightarrow X$:

$$\begin{array}{ccccc} & & Z' & \longleftarrow & T' \\ & \swarrow & \downarrow & & \swarrow \\ X' & \longleftarrow & Y' & & T \\ \downarrow f & & \downarrow & \dashrightarrow & \downarrow \\ X & \xleftarrow{g} & Y & & T \end{array}$$

et montrons qu'il suffit alors de descendre le schéma T obtenu sur Y le long de g . Considérons une donnée de recollement sur Y relative à g : soit $u : T_1 \rightarrow T_2$ un $(Y/X)^2 = Y \times_X Y$ -isomorphisme [9, 4.2.1]; elle provient d'une donnée de recollement sur Y' . En écrivant les carrés et les cubes fibrés,

$$\begin{array}{ccccccc} X' & \longleftarrow & Y' & \xleftarrow{\cong} & (Y'/X')^2 & \xleftarrow{\cong} & (Y'/X')^3 \\ \downarrow f & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ X & \xleftarrow{g} & Y & \xleftarrow{\cong} & (Y/X)^2 & \xleftarrow{\cong} & (Y/X)^3 \end{array}$$

on en déduit qu'au-dessus de Y' elle est en fait une donnée de descente, et d'après *pleine fidélité* donc une donnée de descente sur Y . En descendant T le long de g on obtient Z et il s'en suit que Z provient bien de Z' .

Choisissons comme changement de base fidèlement plat $g : \coprod_{x \in X} \mathcal{O}_{X,x} \rightarrow X$. On peut alors se ramener au cas où Y est le spectre d'un anneau local. Il en sera alors de même de Y' (isomorphisme de spectres). On est alors ramené à un morphisme d'anneaux locaux $A \rightarrow A_0$. Soit \tilde{A} un *hensélisé strict* de A , et \tilde{A}_0 l'anneau obtenu par changement de base. \tilde{A}_0 est alors fini sur \tilde{A} , c'est donc aussi un hensélisé strict de A_0 [8, VIII, Prop. 4]. Le changement de base $A \rightarrow \tilde{A}$ est fidèlement plat [8, VIII, Th. 3]. Il suffit donc de voir qu'une algèbre étale sur \tilde{A}_0 se descend sur \tilde{A} et le théorème est démontré. Mais une algèbre étale sur \tilde{A}_0 est un produit de copies de \tilde{A}_0 . Il suffit donc de prendre un produit de copies de \tilde{A} , de même cardinal. \square

Remarque 6.1.

- (1) L'hypothèse de connexité n'est nécessaire que compte-tenu de la définition prise pour le π_1 . Sans cette hypothèse, on a encore $\mathcal{E}(X) \simeq \mathcal{E}(X')$.
- (2) Grâce à l'utilisation de l'*hensélisation* nous n'avons pas besoin dans cette démonstration des hypothèses noethériennes.
- (3) Nous avons vu que f fini, radiciel, surjectif impliquait l'équivalence des catégories $\mathcal{E}(X)$ et $\mathcal{E}(X')$ (universellement). Inversement, si $\mathcal{E}(X)$ et $\mathcal{E}(X')$ sont équivalentes (universellement), il en est de même des catégories d'ouverts $Ouv(X)$ et $Ouv(X')$, et f est un homéomorphisme universel.

Exemple 6.3. Soit X un schéma connexe sur un corps k , et soit k' une extension finie et purement inséparable de k . Par changement de base, on obtient :

$$\begin{array}{ccc} X_{k'} & \xrightarrow{f} & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Spec } k' & \longrightarrow & \text{Spec } k \end{array}$$

où f est fini, radiciel, surjectif.

La proposition s'applique :

$$\pi_1(X_{k'}, a') \simeq \pi_1(X, a)$$

Exemple 6.4. Prenons cette fois X de type fini sur k connexe, et $k \rightarrow k'$ une extension algébrique purement inséparable, mais non nécessairement finie. Il est encore vrai que

$$\pi_1(X_{k'}, a') \simeq \pi_1(X, a)$$

Démonstration. Prenons un revêtement fini Y' de $X_{k'}$. D'après le début du cours, on sait qu'il revient au même de se donner une certaine algèbre cohérente \mathcal{A} sur $X_{k'}$. Pour se donner \mathcal{A} , on recouvre $X_{k'}$ par des ouverts affines, en nombre fini, de façon que, sur chacun d'eux, l'algèbre soit définie par ses constantes de structures, en nombre fini. Finalement, il n'intervient dans la donnée de \mathcal{A} qu'un nombre fini d'éléments de k' , qui engendrent une extension finie k''/k . La situation montre que Y' provient d'un revêtement Y'' de $X_{k''}$:

$$\begin{array}{ccccc} Y' & \longrightarrow & Y'' & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ X_{k'} & \longrightarrow & X_{k''} & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \text{Spec } k' & \longrightarrow & \text{Spec } k'' & \longrightarrow & \text{Spec } k \end{array}$$

On est ramené au cas de l'exemple 6.3. □

Exemple 6.5. Soit X un schéma connexe, X_{red} le schéma réduit sous-jacent. Il est immédiat que le morphisme

$$X_{red} \hookrightarrow X$$

est fini, radiciel (à extension résiduelles triviales) et surjectif.

$$\pi_1(X_{red}, a) \simeq \pi_1(X, a)$$

On peut donc toujours supposer pour calculer le π_1 que l'on a éliminé les éléments nilpotents.

6.2. Invariance du groupe fondamental par spécialisation.

Théorème 6.6. Soit A un anneau noethérien, local, complet, et X un schéma connexe, propre sur $\text{Spec } A$. Soit X_0 le schéma réduit modulo l'idéal maximal \mathfrak{m} de A , a_0 et a des points géométriques de X_0 et X qui se correspondent. On a l'isomorphisme

$$\pi_1(X_0, a_0) \simeq \pi_1(X, a)$$

Démonstration.

$$\begin{array}{ccc} X_0 & \xrightarrow{g} & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Spec } A/\mathfrak{m} & \longrightarrow & \text{Spec } A \end{array}$$

Soit g^* le foncteur $Rev(X) \rightarrow Rev(X_0)$. Nous allons montrer que c'est une équivalence de catégories.

6.2.1. *g^* est pleinement fidèle.* D'après le dictionnaire galoisien, cela signifiera encore que $\pi_1(X_0, a_0) \rightarrow \pi_1(X, a)$ est surjectif, et il est équivalent de démontrer que g^* transforme objets connexes en objets connexes, i.e. si $Y \rightarrow X$ est un revêtement connexe de X , alors $Y_0 \rightarrow X_0$, obtenu par changement de base, est un revêtement connexe de X_0 .

Y est fini au-dessus de X qui est propre sur $\text{Spec } A$, il est donc lui aussi propre sur $\text{Spec } A$. Y_0 s'obtient en réduisant modulo \mathfrak{m} . Pour conclure, on peut alors invoquer le théorème de connexion de ZARISKI [6, III 4.3]. Donnons un raisonnement direct : les parties ouvertes et fermées d'un espace annelés en anneaux locaux Z correspondent bijectivement aux idempotents de $\Gamma(Z, \mathcal{O}_Z)$. En effet si e est un idempotent, l'ensemble des z tels que « $e = 0$ » au point z est une partie ouverte, et son complémentaire n'est autre que la partie ouverte correspondant à $1 - e$. D'après le théorème de finitude pour la cohomologie des morphismes propres $\Gamma(Y, \mathcal{O}_Y)$ est un module de type fini sur A . Il est donc complet. Appliquons le théorème de comparaisons [2, chap. 9, §3.2, Th. 3.4] ou [6, III, Cor. 4.2.4]

$$\Gamma(Y, \mathcal{O}_Y) = \Gamma(Y, \mathcal{O}_Y)^\wedge = \Gamma(Y_0, \widehat{\mathcal{O}}_Y)$$

Appliquons la remarque plus haut à l'espace annelé $(Z, \mathcal{O}_Z) = (Y_0, \widehat{\mathcal{O}}_Y)$. On en conclut que les parties ouvertes et fermées de Y et Y_0 sont en correspondance biunivoque. Comme Y est connexe, Y_0 l'est.

Remarque 6.2. Si on ne suppose plus A complet, mais seulement hensélien, les idempotents du complété sont les mêmes que ceux de l'anneau de départ ; le même argument s'applique donc et

$$\pi_1(X_0, a_0) \longrightarrow \pi_1(X, a)$$

est surjectif.

6.2.2. *g^* est essentiellement surjectif.* Soit Y_0 un revêtement de X_0 , il faut trouver un revêtement Y de X qui en provienne. Le morphisme $\text{Spec } A/\mathfrak{m} \rightarrow \text{Spec } A/\mathfrak{m}^{n+1}$ est fini, radiciel et surjectif (car $\mathfrak{p} \supset \mathfrak{m}^{n+1} \Rightarrow \mathfrak{p} \supset \mathfrak{m}$). On peut donc d'après théorème 6.1 relever Y_0 en Y_n sur X_n , où X_n est défini par le changement de base $A \rightarrow A/\mathfrak{m}^{n+1}$. On voit apparaître un système inductif:

$$\begin{array}{ccccccc} Y_0 & \longrightarrow & Y_1 & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & Y_n \\ \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow \\ X_0 & \longrightarrow & X_1 & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & X_n \longrightarrow X \\ \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow \\ \text{Spec } A/\mathfrak{m} & \longrightarrow & \text{Spec } A/\mathfrak{m}^2 & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & \text{Spec } A/\mathfrak{m}^{n+1} \longrightarrow \text{Spec } A \end{array}$$

Un revêtement étant défini par une algèbre cohérente localement libre, on a un système projectif de modules constitué des $\Gamma(Y_n, \mathcal{O}_{Y_n})$. D'après le théorème d'algébrisation [2, chap. 10, Th. 2.1] ou [6, III, Th. 5.1.4], ce système est défini par un

faisceau \mathcal{M} , localement libre sur X . Il reste à voir qu'on peut mettre sur \mathcal{M} une structure d'algèbre. On définit la structure d'algèbre de \mathcal{M} grâce aux propriétés des schémas formels ; les données d'algèbre sur les \mathcal{M}_n se traduisent en termes de produits tensoriels (en particulier, la donnée des morphismes $\mathcal{M}_n \otimes \mathcal{M}_n \rightarrow \mathcal{M}_n$) et de commutativité de diagrammes. On en déduit un morphisme $\mathcal{M} \otimes \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ qui rend commutatif les diagrammes

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M} \otimes \mathcal{M} & \longrightarrow & \mathcal{M} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{M}_n \otimes \mathcal{M}_n & \longrightarrow & \mathcal{M}_n \end{array}$$

et dont les propriétés sont la traduction pour \mathcal{M} des propriétés des \mathcal{M}_n . \mathcal{M} définit dès lors un schéma $Y \rightarrow X$ fini et plat. Il reste à voir que Y est étale sur X .

Au-dessus de chacun des X_n , Y_n est étale. Le morphisme $Y \rightarrow X$ est donc étale au-dessus des points de X qui sont au-dessus du point fermé de A . Mais l'ensemble des points de X où le morphisme est étale est un ouvert. C'est donc X tout entier. \square

Si on suppose A hensélien (au lieu de complet), on ne peut plus, dans cette seconde partie, utiliser le même raisonnement. Néanmoins, le résultat reste valable, d'après un théorème de *Michael ARTIN* dans « Algebraic approximation of structures over complete local rings » (Publ. Math. I.H.E.S., 36 (1969), Th. 3.1, p.30).

6.3. Une première suite exacte fondamentale. Soit X un schéma de type fini sur un corps k et \bar{k} une clôture algébrique de k , $a \in X(\bar{k})$ un point géométrique

$$\begin{array}{ccc} X_{\bar{k}} & \longrightarrow & X \\ \downarrow & \nearrow a & \downarrow \\ \text{Spec } \bar{k} & \xrightarrow{b} & \text{Spec } k \end{array}$$

et supposons X et $X_{\bar{k}}$ connexes. On a alors la suite exacte

$$0 \rightarrow \pi_1(X_{\bar{k}}, \bar{a}) \rightarrow \pi_1(X, a) \rightarrow \pi_1(\text{Spec } k, b) \rightarrow 0$$

avec $\pi_1(\text{Spec } k, b) \simeq \text{Gal}(\bar{k}/k)$.

Cette suite exacte fait apparaître dans le $\pi_1(X, a)$ une partie purement géométrique $\pi_1(X_{\bar{k}}, \bar{a})$ et une partie algébrique $\pi_1(\text{Spec } k, b) = \text{Gal}(\bar{k}/k)$ qui ne dépend que du corps de base.

Démonstration. Remarquons d'abord qu'on aurait pu supposer sans difficulté que X était un schéma de type fini sur un anneau A artinien, avec $k = A/\mathfrak{m}$, et \bar{k} une clôture algébrique de k , la suite exacte s'écrivant sans changement. En effet, en chassant les éléments nilpotents, on constate que le morphisme $X_{\bar{k}} \rightarrow X$ induit un isomorphisme entre les π_1 . La démonstration se ramène donc à $A = k$.

Considérons alors la clôture séparable $k_s \subset \bar{k}$ de k . \bar{k}/k_s est purement inséparable, et par suite, d'après théorème 6.1, on a l'isomorphisme

$$\pi_1(X_{\bar{k}}, \bar{a}) \simeq \pi_1(X_{k_s}, a_s).$$

k_s est limite inductive des extensions finis séparables k_i de k . $\text{Spec } k_i \rightarrow \text{Spec } k$ est un revêtement fini étale, qu'on peut supposer galoisien, et par suite $X_{k_i} \rightarrow X$ est aussi un revêtement fini étale galoisien de groupe $\text{Gal}(k_i/k)$.

Nous utiliserons le

Lemme 6.7. Soient \mathcal{C} une catégorie galoisienne, F un foncteur fibre, X un objet galoisien de \mathcal{C} , $\xi \in F(X)$. Soient \mathcal{C}/X la catégorie des objets et morphismes au-dessus de X , F/ξ le foncteur défini par $F/\xi(Y \rightarrow X) = \{\eta \in F(Y) \mid \eta \mapsto \xi\}$.

Alors,

- (1) \mathcal{C}/X est une catégorie galoisienne, F/ξ un foncteur fibre.
- (2) La suite $0 \rightarrow \pi_1(\mathcal{C}/X, F/\xi) \rightarrow \pi_1(\mathcal{C}, F) \xrightarrow{\xi} \text{Aut}(X) \rightarrow 0$ est exacte.

Appliquant ce lemme, on trouve que la suite

$$0 \rightarrow \pi_1(X_{k_i}, a_i) \longrightarrow \pi_1(X, a) \longrightarrow \text{Gal}(X_{k_i}/X) \rightarrow 0$$

est exacte, avec $\text{Gal}(X_{k_i}/X) = \text{Gal}(k_i/k)$.

Il faut passer à la limite projective. Comme on est dans la catégorie des groupes compacts totalement discontinus, les exactitudes se conservent

$$0 \rightarrow \varprojlim \pi_1(X_{k_i}, a_i) \longrightarrow \pi_1(X, a) \longrightarrow \text{Gal}(\bar{k}/k) \rightarrow 0$$

Comme dans l'exemple 6.4, tout revêtement sur X_{k_s} provient d'un revêtement sur un des X_{k_i} , correspondant à une extension galoisienne finie de k , donc

$$\pi_1(X_{k_s}, a_s) \simeq \varprojlim \pi_1(X_{k_i}, a_i)$$

et on obtient la suite exacte désirée. □

Remarque 6.3.

- (1) Supposons que X possède un point rationnel sur k . Les morphismes

$$\text{Spec } k \longrightarrow X \longrightarrow \text{Spec } k$$

induisent alors les morphismes

$$\pi_1(\text{Spec } k, b) \longrightarrow \pi_1(X, a) \longrightarrow \pi_1(\text{Spec } k, b)$$

dont le composé est l'identité et l'application $\pi_1(X, a) \rightarrow \text{Gal}(\bar{k}/k)$ se fend. On peut toujours, quitte à faire une extension finie, se ramener à ce cas.

- (2) On a pris \bar{k} clôture algébrique de k et non pas une extension algébriquement close quelconque Ω de k . Si on prend $k \rightarrow \Omega$ algébriquement close,

$$\begin{array}{ccc} X_\Omega & \longrightarrow & X_{\bar{k}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Spec } \Omega & \longrightarrow & \text{Spec } \bar{k} \end{array}$$

l'application sur les π_1 n'est pas nécessairement bijective. Cela est cependant vrai si X est propre, ou si k est de caractéristique 0.

Exemple 6.8. Soit $G_a = \text{Spec } k[X]$. Considérons l'application pour $a \in k^\times$

$$\begin{array}{ccc} k[X] & \longrightarrow & k[Y] \\ aX & \longmapsto & Y^p - Y \end{array}$$

On définit ainsi un morphisme $G_a \rightarrow G_a$ qui est un revêtement galoisien de degré p . A chaque élément non nul du corps de base correspond un tel revêtement, et à deux éléments distincts correspondent deux revêtements qui sont non isomorphes. Si alors Ω est choisi suffisamment gros, les π_1 ne pourront pas être isomorphes.

RÉFÉRENCES

- [1] Nicolas Bourbaki, *Algèbre commutative*, Springer, Berlin, 2006, 2007.
- [2] Michel Demazure, Jean Giraud, Michel Raynaud, and Jean-Louis Verdier, *Séminaire de géométrie algébrique d'Orsay, Année 1969-70* (1970), available at <http://berndt-schwerdtfeger.de/wp-content/uploads/pdf/sga.pdf>.
- [3] Jean Giraud, *Cours de C3 : Surfaces de Riemann compactes (1969-1970)* (2005), available at http://sites.mathdoc.fr/PMO/PDF/J_GIRAUD_1969-70.pdf.
- [4] Alexander Grothendieck, *Revêtements Étales et Groupe Fondamental (SGA 1)*, Documents Mathématiques, vol. 3, Société Mathématique de France, 2003.
- [5] Alexander Grothendieck and Jean Dieudonné, *EGA I : Éléments de Géométrie Algébrique*, Grundlehren der math. Wiss., vol. 166, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1971.
- [6] ———, *Éléments de Géométrie Algébrique*, Publ. Math. I.H.E.S. **4**, **8**, **11**, **17**, **20**, **24**, **28**, **32** (1960/1967).
- [7] Serge Lang, *Algebra*, 3rd ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 211, Springer, 2002.
- [8] Michel Raynaud, *Anneaux Locaux Henséliens*, Lecture Notes in Math., vol. 169, Springer, 1970.
- [9] Berndt E. Schwerdtfeger, *Topology, Sheaves and Flat Descent* (1999), available at <http://berndt-schwerdtfeger.de/wp-content/uploads/pdf/flat.pdf>.
- [10] Jean-Pierre Serre, *Corps Locaux*, Publications de l'Institut de Mathématique de l'Université de Nancago, vol. VIII, Hermann, Paris, 1962.
- [11] ———, *Œuvres. Collected Papers*, Vol. I-IV, Springer, Berlin, Heidelberg, 1986, 2000.

INDEX

A	
algèbre	
étaie standard	13, 17
analytique	
ensemble	12
espace	12
revêtement	12
anneau local	
hensélien	4
hensélisé $\tilde{\mathcal{O}}_{X,x}$	15, 28
hensélisé strict	29
ARTIN-SCHREIER	10
C	
chemin	23
courbe	
lisse	16
régulière	16
cyclotomique	
anneau	6
polynôme	5
schéma	6
D	
degré	
d'un diviseur	18
d'un point fermé	18
résiduel	18
descente	
fidèlement plate	28
donnée de	29
diviseur	18
dualité	18
E	
ensemble analytique	12
espace analytique	12
étaie	3, 10
étaie en y	10, 12
étaie standard	13, 17
G	
genre d'une courbe	18
groupe	
additif	10
fondamental des lacets	24
multiplicatif	9
H	
hensélien	4
hensélisé	15, 28, 29
hensélisé strict	29
homéomorphisme universel	27
homotope	23
homotopie	23
HURWITZ	19
I	
indice de ramification	18
K	
KUMMER	9
L	
lacet	23
M	
modérément ramifié	19
module	
des différentielles relatives	16
inversible	18
quasi-cohérent	1
morphisme	
affine	2
d'ARTIN-SCHREIER	10
de KUMMER	9
dominant séparable	16
fini	2
radiciel	27
P	
polynôme cyclotomique	5
R	
racine	
primitive	5
primitive typique	6
radiciel	27
relèvement	
des chemins, des homotopies	24
revêtement	
étaie	3
analytique	12
topologique	11
universel	26
RIEMANN-ROCH	18
S	
séparée	11
schéma	
cyclotomique	6
simplement connexe	26
semi-localement	25
U	
uniformisante	18