

CARDANO'SCHE FORMELN

BERNDT E. SCHWERDTFEGER

Für Klaus

ZUSAMMENFASSUNG. *Cardano's* und *Ferrari's* Formeln für die Wurzeln von Polynomen 3ten und 4ten Grades.

VORWORT

Die Formeln zur Lösung kubischer Gleichungen wurden erstmalig 1545 von *Girolamo Cardano* in seinem *Ars magna* veröffentlicht. Er zitierte *Scipione del Ferro* (vor 1515) und *Nicolo Tartaglia* (1535) als deren Urheber; diese haben aber nichts veröffentlicht. In seinem Buch sind auch die Formeln zur Lösung von Gleichungen 4. Grades angegeben, die von seinem Schüler *Lodovico Ferrari* stammen.

Anders als man erwarten würde, sind diese Formeln in den üblichen Lehrbüchern der Algebra aber kaum zu finden: bei *Lang* [4] stehen sie nicht, bei *Jantzen-Schwermer* [3] steht *Cardano's* Formel ohne Beweis (von *Ferrari* kein Wort) und *Bourbaki* erwähnt sie in der *note historique* [2, A V.173].

In den Klassikern der Algebra *van der Waerden* [5], *Weber* [6] und in der vorzüglichen *Algebra* von *Bosch* [1] werden sie jedoch eingehend behandelt.

Für die kubische Gleichung $x^3 + ax = b$ lauten die Formeln für die Wurzeln x_0, x_1, x_2

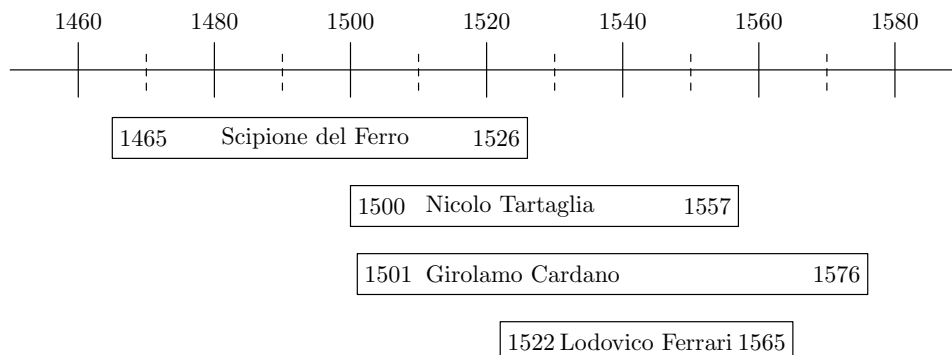
$$x_\mu = \varepsilon^\mu \sqrt[3]{\frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3}} + \varepsilon^{2\mu} \sqrt[3]{\frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3}} \quad (\mu = 0, 1, 2)$$

wo ε eine primitive 3. Einheitswurzel ist.

Berlin, 10. März 2011

B. E. Schwerdtfeger

1. ZEITACHSE



2010 *Mathematics Subject Classification*. Primary 12E05; Secondary 12F10.

Key words and phrases. Cardano's und Ferrari's Formeln für Gleichungen 3. und 4. Grades.

© 2010–2015 Berndt E. Schwerdtfeger

version 1.1, rev. 491, 4. März 2015.

2. POLYNOMIALE GLEICHUNGEN

Wir betrachten Gleichungen der Art

$$t^n + a_1 t^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

in einem Körper k der *Charakteristik* p ($= 0, 2, 3, \dots$). Wir werden gleich $p = 2$ oder $p = 3$ ausschließen und uns auf $n = 3$ und $n = 4$ beschränken. Zunächst schauen wir uns aber einmal den Fall $n = 2$ an:

$$t^2 + at + b = \left(t + \frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 + b$$

Da wir durch 2 teilen, müssen wir $p = 2$ ausschließen. Hier hat das Polynom rechts die Gestalt $x^2 - d$ und man kann durch die Quadratwurzel aus d die Lösungen angeben: $x = \pm\sqrt{d}$. Man beachte, dass wegen $p \neq 2$ auch $+1 \neq -1$ ist, es gibt also *zwei* verschiedene Quadratwurzeln aus 1 und die quadratische Gleichung hat ebenfalls zwei Lösungen falls $d \neq 0$. d heißt *Diskriminante* und entscheidet also darüber, ob zwei verschiedene Lösungen existieren oder nicht. Bezogen auf die ursprüngliche Gleichung ist $d = (a/2)^2 - b$ und die Lösungen sind

$$\begin{aligned} t_0 &= -a/2 + \sqrt{d} \\ t_1 &= -a/2 - \sqrt{d} \end{aligned}$$

oder kurz

$$t_\mu = -a/2 + \varepsilon^\mu \sqrt{d}, \quad \text{wo } \mu = 0, 1 \text{ und } \varepsilon = -1$$

Bei einem Polynom n -ten Grades $t^n + at^{n-1} + \dots \in k[t]$ können wir analog zur obigen *quadratischen* Ergänzung im Falle $n = 2$ den Koeffizienten von t^{n-1} zum Verschwinden bringen: $a = 0$, indem wir das Polynom schreiben

$$t^n + at^{n-1} + \dots = \left(t + \frac{a}{n}\right)^n + \text{Terme in } t^{n-2}, t^{n-3} \dots$$

Wieder müssen wir für $n \in k, n \neq 0$ annehmen, also $p \nmid n$.

Im Folgenden schließen wir die Charakteristiken $p = 2$ und $p = 3$ aus. Der Grund liegt darin, dass im kubischen Fall $n = 3$ eine Quadratwurzel und im biquadratischen Fall $n = 4$ eine kubische Gleichung gelöst werden muss.

3. KUBISCHE GLEICHUNGEN

Die *Charakteristik* p von k sei $p \neq 2, 3$, d.h. wir können durch 2 und 3 teilen. Ferner nehmen wir an, dass die dritten Einheitswurzeln in k enthalten sind, $\varepsilon \in k$ mit $\varepsilon \neq 1, \varepsilon^3 = 1$, dann ist $\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$ und $\varepsilon(\varepsilon + 1) = -1, \varepsilon^2 = \varepsilon^{-1} = -1 - \varepsilon$.

Da $t^3 - 1 = (t - 1)(t - \varepsilon)(t - \varepsilon^2)$ ist $t^3 + 1 = (t + 1)(t + \varepsilon)(t + \varepsilon^2)$ und folglich $u^3 + v^3 = (u + v)(u + \varepsilon v)(u + \varepsilon^2 v)$. Wenn wir in den letzten beiden Faktoren einmal ε und einmal ε^2 (also insgesamt $\varepsilon \cdot \varepsilon^2 = 1$) aufnehmen, wird daraus $u^3 + v^3 = (u + v)(\varepsilon u + \varepsilon^2 v)(\varepsilon^2 u + \varepsilon v)$. Nennen wir die Faktoren x_0, x_1, x_2 , so ist $x_0 + x_1 + x_2 = 0$ und $x_0 x_1 x_2 = u^3 + v^3$.

Wir bilden das Polynom mit den Wurzeln x_0, x_1, x_2

$$(t - x_0)(t - x_1)(t - x_2) = t^3 + at + b$$

und die Koeffizienten sind $b = -x_0 x_1 x_2 = -u^3 - v^3$ und

$$\begin{aligned} a &= x_0 x_1 + x_0 x_2 + x_1 x_2 = -x_0^2 + \frac{x_0 x_1 x_2}{x_0} = -(u + v)^2 + \frac{u^3 + v^3}{u + v} = \\ &= -u^2 - 2uv - v^2 + u^2 - uv + v^2 = -3uv \end{aligned}$$

Die beiden Gleichungen für a und b liefern eine quadratische Gleichung für u^3 und v^3 , deren Diskriminante

$$\left(\frac{a}{3}\right)^3 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{u^3 - v^3}{2}\right)^2$$

ein Quadrat ist. Wir notieren die beiden Identitäten

$$(1) \quad u^3 = -\frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3} \quad v^3 = -\frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3}$$

Das Polynom $p = t^3 + at + b$ hat also, mit u, v aus (1), die Wurzeln

$$x_0 = u + v \quad x_1 = \varepsilon u + \varepsilon^2 v \quad x_2 = \varepsilon^2 u + \varepsilon v$$

4. BIQUADRATISCHE GLEICHUNGEN

Eine ähnliche Vorgehensweise ergibt auch die Lösung für

$$(2) \quad t^4 + at^2 + bt + c = 0$$

Mit dem Ansatz

$$2t = u + v + w$$

und den Abkürzungen

$$p = u^2 + v^2 + w^2 \quad q = v^2 w^2 + u^2 w^2 + u^2 v^2$$

erhalten wir

$$4t^2 = p + 2(vw + wu + uv)$$

$$16t^4 = p^2 + 4p(vw + wu + uv) + 4q + 8uvw(u + v + w)$$

Eingesetzt in (2) ergibt sich

$$p^2 + 4q + 4ap + 16c + 8(uvw + b)(u + v + w) + 4(p + 2a)(vw + wu + uv) = 0$$

Diese Gleichung wird durch die drei *Annahmen* erfüllt

$$p^2 + 4q + 4ap + 16c = 0$$

$$p + 2a = 0$$

$$uvw + b = 0$$

Die zweite Annahme in die erste eingesetzt ergibt $q = a^2 - 4c$, folglich ist

$$u^2 + v^2 + w^2 = -2a$$

$$v^2 w^2 + w^2 u^2 + u^2 v^2 = a^2 - 4c$$

(3)

$$uvw = -b$$

und damit sind u^2, v^2 und w^2 Wurzeln der *kubischen Resolvente*

$$x^3 + 2ax^2 + (a^2 - 4c)x - b^2 = 0$$

Die Quadratwurzeln sind so zu bestimmen, dass die Gleichung (3) erfüllt ist. Die vier Lösungen von (2) erhält man somit aus denen der kubischen Resolvente durch

$$2t_0 = u + v + w$$

$$2t_1 = u - v - w$$

$$2t_2 = -u + v - w$$

$$2t_3 = -u - v + w$$

LITERATUR

- [1] Siegfried Bosch, *Algebra*, 7., überarb. Aufl., Springer-Lehrbuch, Springer, 2009.
- [2] Nicolas Bourbaki, *Algèbre*, Springer, Berlin, 2007, 2010.
- [3] Jens Carsten Jantzen and Joachim Schwermer, *Algebra*, Springer-Lehrbuch, Springer, 2006.
- [4] Serge Lang, *Algebra*, 3rd ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 211, Springer, 2002.
- [5] Bartel Leendert van der Waerden, *Algebra*, Grundlehren der math. Wiss., vol. 33-34, Springer, Berlin, 1960.
- [6] Heinrich Weber, *Lehrbuch der Algebra*, 3rd ed., Vol. I-III, AMS Chelsea Publishing, Providence, Rhode Island, 2002.