CARDANO'SCHE FORMELN

BERNDT E. SCHWERDTFEGER

Für Klaus

ZUSAMMENFASSUNG. *Cardano*'s und *Ferrari*'s Formeln für die Wurzeln von Polynomen 3ten und 4ten Grades.

VORWORT

Die Formeln zur Lösung kubischer Gleichungen wurden erstmalig 1545 von *Girolamo Cardano* in seinem *Ars magna* veröffentlicht. Er zitierte *Scipione del Ferro* (vor 1515) und *Nicolo Tartaglia* (1535) als deren Urheber; diese haben aber nichts veröffentlicht. In seinem Buch sind auch die Formeln zur Lösung von Gleichungen 4. Grades angegeben, die von seinem Schüler *Lodovico Ferrari* stammen.

Anders als man erwarten würde, sind diese Formeln in den üblichen Lehrbüchern der Algebra aber kaum zu finden: bei *Lang* [4] stehen sie nicht, bei *Jantzen-Schwermer* [3] steht *Cardano*'s Formel ohne Beweis (von *Ferrari* kein Wort) und *Bourbaki* erwähnt sie in der *note historique* [2, A V.173].

In den Klassikern der Algebra *van der Waerden* [5], *Weber* [6] und in der vorzüglichen *Algebra* von *Bosch* [1] werden sie jedoch eingehend behandelt.

Für die kubische Gleichung $x^3 + ax = b$ lauten die Formeln für die Wurzeln x_0, x_1, x_2

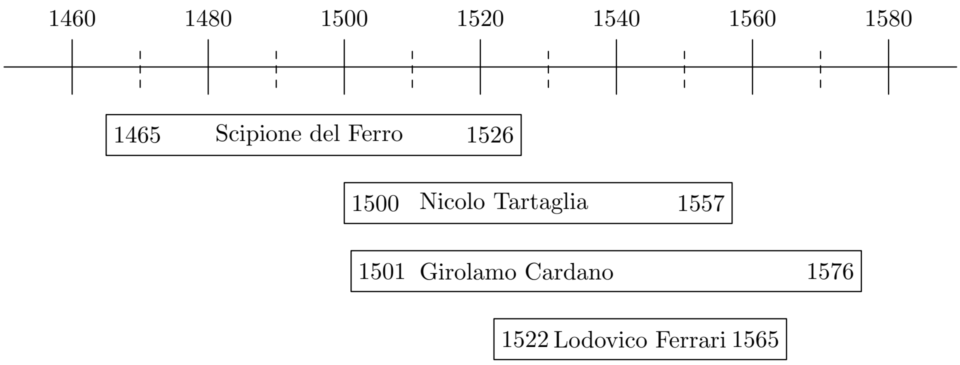
$$x_\mu = \varepsilon^\mu \sqrt[3]{\frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3}} + \varepsilon^{2\mu} \sqrt[3]{\frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3}} \quad (\mu = 0, 1, 2)$$

wo ε eine primitive 3. Einheitswurzel ist.

Berlin, 10. März 2011

 version 1.1, rev. 2015-03-04

1. ZEITACHSE



2010 *Mathematics Subject Classification.* Primary 12E05; Secondary 12F10.
Key words and phrases. Cardano's und Ferrari's Formeln für Gleichungen 3. und 4. Grades.

2. Polynomiale Gleichungen

Wir betrachten Gleichungen der Art

$$t^n + a_1 t^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

in einem Körper k der *Charakteristik* p $(= 0, 2, 3, \ldots)$. Wir werden gleich $p = 2$ oder $p = 3$ ausschließen und uns auf $n = 3$ und $n = 4$ beschränken. Zunächst schauen wir uns aber einmal den Fall $n = 2$ an:

$$t^2 + at + b = (t + \frac{a}{2})^2 - (\frac{a}{2})^2 + b$$

Da wir durch 2 teilen, müssen wir $p = 2$ ausschließen. Hier hat das Polynom rechts die Gestalt $x^2 - d$ und man kann durch die Quadratwurzel aus d die Lösungen angeben: $x = \pm\sqrt{d}$. Man beachte, dass wegen $p \neq 2$ auch $+1 \neq -1$ ist, es gibt also *zwei* verschiedene Quadratwurzeln aus 1 und die quadratische Gleichung hat ebenfalls zwei Lösungen falls $d \neq 0$. d heißt *Diskriminante* und entscheidet also darüber, ob zwei verschiedene Lösungen existieren oder nicht. Bezogen auf die ursprüngliche Gleichung ist $d = (a/2)^2 - b$ und die Lösungen sind

$$t_0 = -a/2 + \sqrt{d}$$
$$t_1 = -a/2 - \sqrt{d}$$

oder kurz

$$t_\mu = -a/2 + \varepsilon^\mu \sqrt{d}, \quad \text{wo } \mu = 0, 1 \text{ und } \varepsilon = -1$$

Bei einem Polynom n-ten Grades $t^n + at^{n-1} + \cdots \in k[t]$ können wir analog zur obigen *quadratischen* Ergänzung im Falle $n = 2$ den Koeffizienten von t^{n-1} zum Verschwinden bringen: $a = 0$, indem wir das Polynom schreiben

$$t^n + at^{n-1} + \cdots = (t + \frac{a}{n})^n + \text{ Terme in } t^{n-2}, t^{n-3} \ldots$$

Wieder müssen wir für $n \in k, n \neq 0$ annehmen, also $p \nmid n$.

Im Folgenden schließen wir die Charakteristiken $p = 2$ und $p = 3$ aus. Der Grund liegt darin, dass im kubischen Fall $n = 3$ eine Quadratwurzel und im biquadratischen Fall $n = 4$ eine kubische Gleichung gelöst werden muss.

3. Kubische Gleichungen

Die *Charakteristik* p von k sei $p \neq 2, 3$, d.h. wir können durch 2 und 3 teilen. Ferner nehmen wir an, dass die dritten Einheitswurzeln in k enthalten sind, $\varepsilon \in k$ mit $\varepsilon \neq 1$, $\varepsilon^3 = 1$, dann ist $\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$ und $\varepsilon(\varepsilon + 1) = -1$, $\varepsilon^2 = \varepsilon^{-1} = -1 - \varepsilon$.

Da $t^3 - 1 = (t-1)(t-\varepsilon)(t-\varepsilon^2)$ ist $t^3 + 1 = (t+1)(t+\varepsilon)(t+\varepsilon^2)$ und folglich $u^3 + v^3 = (u+v)(u+\varepsilon v)(u+\varepsilon^2 v)$. Wenn wir in den letzten beiden Faktoren einmal ε und einmal ε^2 (also insgesamt $\varepsilon \cdot \varepsilon^2 = 1$) aufnehmen, wird daraus $u^3 + v^3 = (u+v)(\varepsilon u + \varepsilon^2 v)(\varepsilon^2 u + \varepsilon v)$. Nennen wir die Faktoren x_0, x_1, x_2, so ist $x_0 + x_1 + x_2 = 0$ und $x_0 x_1 x_2 = u^3 + v^3$.

Wir bilden das Polynom mit den Wurzeln x_0, x_1, x_2

$$(t - x_0)(t - x_1)(t - x_2) = t^3 + at + b$$

und die Koeffizienten sind $b = -x_0 x_1 x_2 = -u^3 - v^3$ und

$$\begin{aligned} a = x_0 x_1 + x_0 x_2 + x_1 x_2 &= -x_0^2 + \frac{x_0 x_1 x_2}{x_0} = -(u+v)^2 + \frac{u^3 + v^3}{u+v} = \\ &= -u^2 - 2uv - v^2 + u^2 - uv + v^2 = -3uv \end{aligned}$$

Die beiden Gleichungen für a und b liefern eine quadratische Gleichung für u^3 und v^3, deren Diskriminante

$$\left(\frac{a}{3}\right)^3 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{u^3 - v^3}{2}\right)^2$$

ein Quadrat ist. Wir notieren die beiden Identitäten

$$u^3 = -\frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3} \qquad v^3 = -\frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3} \tag{1}$$

Das Polynom $p = t^3 + at + b$ hat also, mit u, v aus (1), die Wurzeln

$$x_0 = u + v \qquad x_1 = \varepsilon u + \varepsilon^2 v \qquad x_2 = \varepsilon^2 u + \varepsilon v$$

4. Biquadratische Gleichungen

Eine ähnliche Vorgehensweise ergibt auch die Lösung für

$$t^4 + at^2 + bt + c = 0 \tag{2}$$

Mit dem Ansatz $2t = u + v + w$

und den Abkürzungen $p = u^2 + v^2 + w^2 \qquad q = v^2w^2 + u^2w^2 + u^2v^2$

erhalten wir

$$4t^2 = p + 2(vw + wu + uv)$$

$$16t^4 = p^2 + 4p(vw + wu + uv) + 4q + 8uvw(u + v + w)$$

Eingesetzt in (2) ergibt sich

$$p^2 + 4q + 4ap + 16c + 8(uvw + b)(u + v + w) + 4(p + 2a)(vw + wu + uv) = 0$$

Diese Gleichung wird durch die drei *Annahmen* erfüllt

$$p^2 + 4q + 4ap + 16c = 0$$
$$p + 2a = 0$$
$$uvw + b = 0$$

Die zweite Annahme in die erste eingesetzt ergibt $q = a^2 - 4c$, folglich ist

$$u^2 + v^2 + w^2 = -2a$$
$$v^2w^2 + w^2u^2 + u^2v^2 = a^2 - 4c$$
$$uvw = -b \tag{3}$$

und damit sind u^2, v^2 und w^2 Wurzeln der *kubischen Resolvente*

$$x^3 + 2ax^2 + (a^2 - 4c)x - b^2 = 0$$

Die Quadratwurzeln sind so zu bestimmen, dass die Gleichung (3) erfüllt ist. Die vier Lösungen von (2) erhält man somit aus denen der kubischen Resolvente durch

$$2t_0 = u + v + w \qquad 2t_1 = u - v - w$$
$$2t_2 = -u + v - w \qquad 2t_3 = -u - v + w$$

Literatur

[1] Siegfried Bosch, *Algebra*, 7., überarb. Aufl., Springer-Lehrbuch, Springer, 2009.
[2] Nicolas Bourbaki, *Algèbre*, Springer, Berlin, 2007, 2010.
[3] Jens Carsten Jantzen and Joachim Schwermer, *Algebra*, Springer-Lehrbuch, Springer, 2006.
[4] Serge Lang, *Algebra*, 3rd ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 211, Springer, 2002.
[5] Bartel Leendert van der Waerden, *Algebra*, Grundlehren der math. Wiss., vol. 33-34, Springer, Berlin, 1960.
[6] Heinrich Weber, *Lehrbuch der Algebra*, 3rd ed., Vol. I-III, AMS Chelsea Publishing, Providence, Rhode Island, 2002.